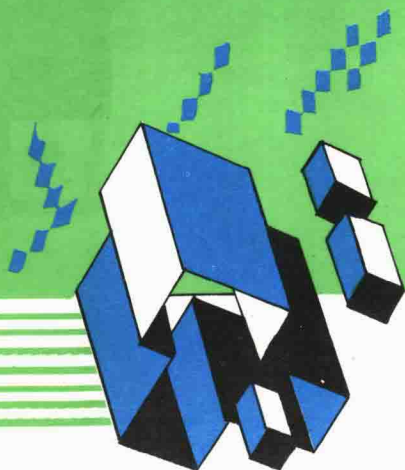


《数学·我们·数学》丛书

数学与教育

SHU XUE YU JIAO YU

丁石孙 著
张祖贵



要目

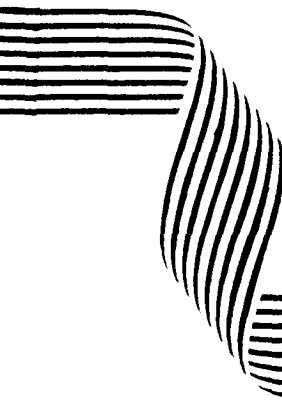
- 数学教育的历史回顾
- 数学与自然科学
- 数学与社会科学、人文科学
- 数学与人类思维
- 计算机出现的影响



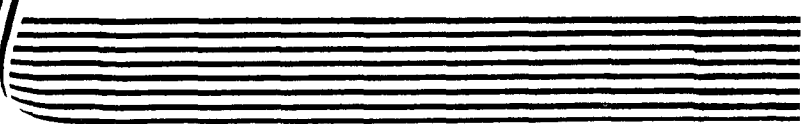
《数学·我们·数学》丛书

数学与教育

丁石孙 著
张祖贵



湖南教育出版社



数学与教育

Shuxue yu jiaoyu

丁石孙 张祖贵 著

责任编辑:孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米 32开 印张:6.125 字数:160000

1998年4月第2版 1998年4月第2次印刷

ISBN 7—5355—0951—7/G·983

定价:10.70元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

写在前面

丁石孙

在科学分类中，数学应该放在什么位置，这是一个经常被讨论的问题。我们看到，随着科学的发展，人们对这个问题的认识也在不断变化。特别进入 20 世纪 50 年代之后，由于数学的发展以及与数字相关的学科的发展，出现了数学科学这个概念。这反映了人们一种看法，即一些与数学关系密切的学科已经成熟但它们又不能包含在传统的数学之中，同时也反映了人们对数学的重要性的认识。也就是说，人们认为在科学分类中，与自然科学和社会科学等平行的还有数学科学。

我们打算讨论数学科学应该包括哪些内容，也不打算作科学分类方面的讨论，但是我们认为，数学的特殊性与重要性逐步被人们认识是非常有意义的。事实上，数学不仅在自然科学的各个分支中 useful，同时在社会科学的很多分支以及许多其它学科中也有用。近期随着科学的飞速发展，不但数学的应用范围日益广泛，而且数学对有些学科的作用也愈来愈深刻。事实上，数学的重要性不仅在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系，数学自身的发展水平也影响着人们的思维方式，影响着社会文化的进步。总之，数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多的人能认识到这一点，我们决定编辑出版

“数学·我们·数学”这套小丛书。与数学有联系的学科非常多，有些是传统的，即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科，如力学、物理以及天文等。化学虽然在历史上用数学不多，但它离不开数学大家是看到的。对这些学科，我们的丛书不打算多讲。我们选择的题目较多是那些与数学的关系虽然密切，但又不大被大家注意到的学科，或者是那些直到近年来才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不打算写成学术性的专著，而是力求让更大范围的读者能够读懂，并且能够从中得到启发，换句话说，我们希望每本书的论述是通俗的，但思想又不是浮浅的。这是我们的目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不容易达到。应该承认，我们很难做到每一本书都写得很好，更难保证书中的每个论点都是正确的。不过，我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见，甚至能就某些问题展开辩论。我们相信，通过讨论与辩论，问题会变得愈来愈清楚，认识也会愈来愈明确。

1996年4月于北京

关于《数学与教育》的再版

丁石孙

本书从初版到现在已过去了七年。实际上，在1987年就开始动笔，那是九年前的事。我们不能说在这段时间中我们有多大的长进，但是思想有些变化是事实。因之在这七年中，我们不断产生想修改原书的想法。今年出版社考虑到读者的需要，决定再版，这就给了我们一个机会。再回过头来看一下自己写的东西，也许是时间久了，现在的思想已跳出原来的框框，发现了不少问题，有些是错的，有些是不确切的，有些至少是不妥当的。我和张祖贵同志进行了讨论，凡是我们现在认识到的，都作了修改。总之，我们力图改正错误。年轻时曾背过陶渊明的“归去来辞”，其中有一句话，我是经常想到且引以为训的，即“觉今是而昨非”。这次对本书所作的修改，使我更认识到这句话的含义。这也许就叫实事求是吧。

1996年4月21日

前 言

每个人在学校所受的教育中，数学是一个重要的部分。这是一个公认的事实。因此，在研究学校的教育内容与教学方法时，数学的教学自然是一个受人重视的问题。由于数学的特殊性，如数学的高度抽象性，使得人们对她敬而远之。经验证明，教好数学是不容易的。

使每个人都能受到良好的数学教育，这是远远没能解决的问题。在某种意义上讲，这是一个世界性的问题。如果把这个问题局限于研究每个人应该掌握哪些数学知识与技能，以及如何把这些东西教好，那么数学教育的问题是解决不好的。更为根本的问题是弄清楚数学在整个教育中的地位与重要性，或者说得更广泛些，就是要弄清楚数学在整个科学文化中的地位与重要性。我们认为，长期以来，这些问题没有被人认真讨论过，甚至于数学是否有用都为一部分人所怀疑。这不但有害于我们教育水平的提高，也会影响科学、技术甚至整个社会的发展。

我们试图从历史发展的角度、从数学与其它科学文化部门的关系、从现代科学与技术的发展以及数学对于人的智力的培养等各个方面，来说明数学的地位和数学在教育中的作用，从而使数学得到应有的重视，促进整个教育水平的提高。

目 录

关于“数学与教育”的再版

前 言

第一章 数学与教育——追溯历史	1
第一节 古代东方的数学教育	1
第二节 古代中国的数学教育	6
第三节 古希腊的数学教育	20
第四节 从历史上的数学教育看中西方的数学	34
第二章 数学与自然科学的相互作用	39
第一节 数学在科学中的地位	39
第二节 数学与自然科学的关系	45
第三节 数学对于自然科学发展的推动作用	56
第四节 大学中理工科的数学教育	69
第三章 数学与社会科学及其它学科的关系	77
第一节 早期社会科学中应用数学方法的尝试	78
第二节 数学在经济学中的应用	85
第三节 数理语言学——数学在语言学中的应用	89
第四节 数学的应用范围在扩大	96
第四章 数学与人类思维	104
第一节 数学思维的特征	106
第二节 数学思维对人类思维的影响	112
第三节 数学与文化	119
第五章 计算机的影响	126
第一节 计算机的特征	127

第二节	计算机的作用与其它学科的发展	130
第三节	计算机与数学模型	135
第四节	机器证明与数学证明	139
第五节	形式化的计算机语言与教育的关系	142
第六节	计算机与教育	145
第六章	数学教育：实践与变革	152
第一节	近代数学教育的一次改革试验	152
第二节	新数学运动——又一次改革的尝试	160
第三节	中国近现代数学教育——回顾与展望	171
第四节	全社会都来关心数学教育	178
结束语		184

第一章

数学与教育

——追溯历史

不管用什么样的观点来分析数学的起源,我们都不能不承认这样的事实:数学一旦产生后,就以各种方式成为人类教育的一个组成部分。因此,数学与教育的关系,无论是对于数学发展,还是教育发展,都是一个重要的问题。

为了探索数学与教育的关系,我们认为应先回顾一下历史。剖析各个不同历史时期,不同文化形态、文明传统下的数学教育或者数学与教育的关系,对于所讨论的问题是有意义的。下面的讨论将特别着重这样三个方面:(一)数学教育的内容;(二)人们对待数学以及数学教育的观点;(三)数学在整个文化教育中所起的作用,以及数学在教育中所占的地位。

第一节

古代东方的数学教育

我们不准备考虑原始社会教育中数学与教育的关系。因为在这种教育中,学校根本不存在。虽然原始教育是教育史的重要内

容之一，但我们认为它对本书要讨论的内容关系不大。

我们认为，对于一种文化处于蒙昧状态、数学不发达的文明，讨论这种文明中数学与教育的关系也是没有什么价值的。因此，我们的讨论仅限于数学比较发达的文明。

据考古文献记载，学校这种教育结构约在第一个法老时代（proto-Sumerion times）——公元前 3000 年前左右已经形成。古代的巴比伦、埃及、印度等国家都建立有学校。现在有可靠的证据表明，埃及的学校是人类最古老的学校。^① 这些学校有不同类型，主要包括宫廷学校、职官学校、寺庙学校、文士学校等等。

在古巴比伦，已经出现了较为发达的数学。古巴比伦人掌握了分数的运算，六十进位制，一、二次方程的解法和一些简单的求面积、体积的方法。

大约在公元前 2500 年，出现了专门训练土地测量和实物记载人员的学校。古巴比伦人的这类学校在公元前 1200 年左右达到鼎盛时期。一个明显的标志是，学校已经成为了一个独立的社会单位，相应地出现了一些专门从事“纯粹的”数学教学的人。

古代东方，埃及的数学教育是最有特色的。可以说这是整个古代东方文化的典型。

尼罗河是人类文明的摇篮之一，她养育了古埃及的人民，蕴育了古埃及文明。古埃及在公元前三千年产生了文字，在与尼罗河戚戚相关的生活中，随之产生了数学、天文学、医学等科学萌芽，与此同时也产生了学校。我们今天看到的最初关于学校的记载，就保存在埃及“古王国”史料中。

古埃及的数学教育主要是在寺庙学校——即大城市神庙中附设的僧侣学校，以及较为世俗化的文士学校中进行的。学校中的功课是抄录各种数学书籍和解答数学习题。最近一两个世纪考古学家发现的莱因特（Rhind）纸草书和莫斯科纸草书，据推测是那

① 曹孚等编：《外国古代教育史》第 18 页，人民教育出版社，1981。

时学生们学习时的题目。^①可以认为,世界数学教育从公元前 2500 年的埃及僧侣学校中就开始了。

当时数学教育的主要内容有:象形记数方法;各种特殊的加、减、乘、除算术运算;计算三角形、四边形、圆形等面积(计算圆面积时取 $\pi=3.16$);计算正棱锥和截头棱锥等的体积;推算日历(年、季、月和昼夜),预测日、月蚀;观察天象等等。

当时的数学教育主要为政教合一的古埃及王朝培养官吏和办事人员,因此数学教育完全以解决实用问题为目的,在学校进行的大量练习是为了积累实际计算的经验和,所考虑的问题主要是关于金字塔、土地测量的,几何也是应用算术的主要内容。计算的规则大都是针对具体问题的。这种数学教育是古埃及文明高度发达的产物。

古埃及时期研究数学的动机,主要是出于实用的考虑,这几乎是古代数学的一大特征(古希腊除外)。古埃及对待数学教育也同样如此。狄奥多^②在论述古埃及僧侣学校讲授数学的观点时认为:“僧侣把算术和几何学传授给儿童;因为尼罗河的泛滥每年都要冲毁土地的界线,境界毗连的地主之间便时起纠纷,这些纠纷就是利用几何学来解决的。”据史料记载,由于尼罗河每年泛滥一次,因此社会上测量土地的任务是十分繁重的,而土地对于当时古埃及的社会政治是异常重要的问题,这样以测量土地为主要目的的数学教育占据着整个教育的重要地位。

僧侣学校是当时古埃及的主要教学机构,僧侣们在寺庙里培养新的僧侣。课程除了宗教科目之外,就是传授算术、天文学、几何和医学。所以僧侣们在人类文明史的早期充当着科学的保存者和教师的角色。由于僧侣们从事数学教学,因而他们在数学与教育中起了双重作用,既是数学知识的传播者,同时他们又促进了

^① The International Encyclopedia of Education, vol. 6. p. 3236.
Porgamon press, 1985.

^② 狄奥多(Theodore, 约公元前 80 年至 20 年)古希腊历史学家。

数学的发展。

我们认为，僧侣学校在数学发展中的重要作用是使得数学的学习、数学研究在某种程度上成为一种独立的、令人向往的事业，即学校的数学教育、数学学习成了脑力劳动与体力劳动分工的标志。因为从现存的古籍中我们发现，当时这类学校非常受重视，社会给予这类学校的师生以丰厚的待遇。这对于科学的发展、数学的发展是十分有利的。

脑力劳动、体力劳动的分离，刺激了人们研究学问的兴趣。对于这种状况，亚里斯多德，^①这位旷世奇才，有着比几乎任何人都深刻的理解。他认为，科学最先出现于人们开始有闲暇的地方，“之所以数学最先兴于埃及，就因为那里的僧侣阶级有闲暇。”^②历史的发展证明，只有形成知识分子阶层，出现一批与体力劳动者分离的脑力劳动者，人类知识的深化才有可能，数学、科学才能从生产技术中分离出来。虽然古埃及僧侣学校中所从事的数学与数学教育未能完全做到这一点，但已经有了雏形，为古希腊的数学及数学教育准备了积极的条件。

古埃及的数学教育对埃及文明发挥了巨大的影响和作用。首先，接受数学教育者在维持埃及的政局稳定方面起了一定的作用。埃及国王分配土地、纳税、补偿尼罗河洪水所造成的损失等都是依靠那些接受过数学教育的官吏来进行的。

古埃及的建筑堪称世界一大奇观，其中以举世闻名的金字塔为其卓越标志。今天的考古发现表明，在建筑金字塔的过程中大量地运用了数学，有些著名的考古学家和数学史家们指出，金字塔底边的长度几乎完全相等，每个角都非常接近 90° 。在这样的工程中，受过数学教育的监工、工程设计者起了重要作用。据史料记载，古埃及有一个家族为培养建设金字塔的设计者，开办了长

① 亚里斯多德 (Aristotle, 公元前 384—前 322 年) 古希腊著名学者。

② 亚里斯多德：《形而上学》。

达数世纪的学校。

天文学是古埃及的一大成就，而古埃及的天文学家、占星术家无一例外都接受过在当时看来是良好的数学教育。计算历法、航海都需要数学，人们求助于僧侣为他们计算各种日期，僧侣们当然知道历法对于民众的重要性。因此他们就利用这种知识获得了统治无知民众、在王公身边谋生的权利。他们通过精确的数学计算，知道洪水到来的日期，但却佯称是他们举行了虔诚的宗教仪式而带来的，由此让民众、君主为他们的仪式支付报酬。因此，我们看到，古代的天文学、占星术其实都是与数学密切相联的。数学知识在当时是一种权利，因此数学教育得以维持，同时也促进了天文学、占星术的发展。今天数学史家们强调，我们不能因为今天占星术名声不佳而抹煞它在古代文明中的积极作用。从某种程度上来说，古代的许多数学教育是在占星术教育中实施的。在古代，预先知道播种的季节、节日的时间和祭祀的日子，是十分必要的。当然，在现代还倡导占星术等各种巫术来预测，就只能是一种落后的、反科学的逆流。

古埃及的数学还与其文明的诸方面密切相关。在古埃及的绘画、雕塑、建筑、宗教中到处可见数学的影响。古埃及人甚至认为数学对于阐述文明中的许多问题是非常重要的。这一点，我们可以从莱因特纸草书的书名中看出，该书的书名是《阐明对象中一切黑暗的、秘密的事物的指南》。因此，数学教育被当作是掌握自然界秘密的一种关键。作为当时数学教材的莱因特纸草书，其中的编排方式的确适用于数学教育。

可以毫不夸张地说，数学在古埃及教育中占据主要地位，而数学及数学教育的发达促进了古埃及文明。要追溯数学对现代文化的影响，我们应该把注意力首先集中于埃及。^① 讨论数学与教育，也应该如此。古埃及的数学与教育作为与古希腊不同的方式，

① M. Kline: *Mathematics in Western Cultur* p. 29. Penguin Book, 1953.

在历史上具有典型的意义。

第二节 古代中国的数学教育

在中国古代科技发展史上，数学占有重要的地位。“天、算、农、医”四大学科，古代称为“算术”的数学居于其中。

中国古代数学，一般认为源于遥远的石器时代。根据典籍记载，从周代开始，在学校中开始有了数学教育。因此，中国古代数学教育与中国古代数学一样，也具有悠久的历史。

据《礼记·内则》第十二记载，周朝于小学时期，就开始注重对儿童的数学教育：“六年教之数与方名；九年教之数日；十年出外就傅，居宿于外，学书计。”^① 六岁学“数”，指学从1至10的数目，“方名”指辨识东南西北等方向；九岁学数日，指学古代的干支记日法；十岁出外拜师学“书计”，“计”指计算能力。此外还有《白虎通》：“八岁入小学”，“八岁毁齿，始有认知，入学，学算计。”

对儿童进行基本的数学教育，从周朝开始在我国各个历史时期都有记载，而且把这种数学教育作为启蒙教育的内容。《前汉书·食货志》：“八岁入小学，学六甲、五方、书记之事。”“六甲”即六十甲子。三国时魏国王粲著《儒史论》^② 中记载：“古者八岁入小学，学六甲、五方、书记之事。”《后汉书·杨终传》中有：“礼制：人君之子，年八岁为置少傅，教之书计，以开其明。”北魏著名农学家贾思勰在《齐民要术》中引后汉桓帝时代崔寔《四民月令》记载：“正月农事未起，命成童以上入太学，学五经，师法求

① 也有学者将此段标点为“九年教之数、日。十年出外就傅，居宿于外，学书，计。”指称内容区别不大。

② 王粲（177—217），《儒史论》见《太平御卷》卷六百三十。

备，习读书传。砚冰释，命幼童入学，学书篇章‘六甲、九九、急就、三苍之属’。”唐代，元代的典籍中也有类似记载。

这种对儿童的数学教育，明显地只是传授一些基本的日常生活中的数学常识。这种教育不需要专门的数学教员，附在一般文化教育中就行了。事实上，儿童所接受的数学知识是任何一位当时的文人所必备的。所以，在我国漫长的古代教育中，儿童教育中数学教育并不是独立的。儿童数学教育的这些内容已经是中国文化的一个组成部分。但不容否认，我国传统的学校教育中从周朝起确实有数学教育。对于中国古代大多数知识分子和官吏来说，启蒙时期所接受的儿童数学教育，差不多是他们一生中所接受的全部数学教育。

严格地说，中国古代儿童的数学教育只不过是一种常识教育。中国古代真正的数学教育是与中国古代数学的发展紧密相连的。

在中国教育史上，“六艺”是众所周知的。在《周礼》这部专门记述周朝百官制度的著作中，《地官·大司徒》篇中记载：“保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺，一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五御，五曰六书，六曰九数。”表明周朝时有一种称为“保氏”的官，负责对学生（国子）们进行教育，内容是“礼、乐、射、御、书、数”，数学也是教学科目之一。在这里，我们看到，数学处于和礼、乐、书等平等的地位。这种数学教育已经超出了一般常识教育。

作为数学教育的“九数”指的是哪些内容呢？据后汉郑玄^①注九数：“九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，勾股。”这些内容与现今仍存有的《九章算术》各篇的名称相同，只不过《九章算术》以“勾股”代“旁要”。三国时著名数学家刘徽^②在《九章算术·注》序中说得

① 郑玄：字康成，公元127—200年。

② 刘徽：魏晋时人。

更明确：“周公制礼而有九数，九数之流则《九章》是矣。”可以肯定九章的名称是所谓周礼九数的演变。周朝数学教学内容的“九数”，后来成为中国古代数学成熟标志的《九章算术》中的内容。对于这一点，明朝万历三十二年（1604），黄龙吟在《算法指南》的刻本中，根据周公制礼，《周髀算经》托为周公、商高问答之辩，断言“周公作九章之法，以教天下”，并且附了一张师徒传授、学习数学的插图。该图生动地描绘了古代中国数学教育的情景。

将周公封为中国古代数学教育的开山祖师，这与中国传统文化中的做法是颇为一致的。神农尝百草，仓颉造字，孔子教人识字，鲁班教天下木匠等等，每一行当都有一位历史上真实的人作为鼻祖。数学也不例外。在这个意义上，不妨称中国数学教育祖师是周公。

《九章算术》是一部现在有传本的、最古老的中国数学经典著作，^①而周朝数学教育的主要内容“九数”即为《九章算术》的内容。这表明，《九章算术》中所涉及的知识大都在周朝时中国人已经掌握了，同时《九章算术》的出现可以看作是该书以前^②数学成就、数学教学成就的总结。

不仅如此，《九章算术》成书以后，又影响了中国古代的数学教学、数学研究工作。在中国古代数学史上，《九章算术》的形成，标志着中国古代数学的形成^③，16世纪以前的中国数学著作大都遵照《九章算术》的体例。另一方面，我国古代数学教育一直以《九章算术》为主要内容。实际上，这两方面是互为因果的。

《九章算术》一直被我国古代数学家作为学习、研究数学的径。刘徽自己曾说：“幼习九章，长更详览”，最后完成了名垂千

① 钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社1981年，第28页。

② 关于《九章算术》的成书年代，数学界分歧较大，一般认为成书在西汉公元50—100年之间。

③ 严敦杰：中国数学教育简史，载《数学通报》1965年第8期，第44页。