

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

带电粒子束光学

The Optics of Charged
Particle Beams

吕建钦

高等教育出版社

第一章 电磁透镜中的场

从某种意义上讲,束流光学是电动力学最好的应用领域之一.束流光学系统是由各种具有聚、散焦作用的电磁透镜和漂浮空间组成.这些部件统称为光学元件,或简称元件.如前言中所述,束流光学是研究带电粒子束在电磁场中聚焦与传输规律的科学,因此 Maxwell 方程组和 Lorentz 方程是我们进行研究的基本出发点.

1.1 Maxwell 方程组

在真空中 Maxwell 方程组的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

式中 \mathbf{E} 为电场强度, \mathbf{B} 为磁感应强度, ρ 为空间电荷密度, \mathbf{j} 是自由空间中电流的密度, μ_0 和 ϵ_0 分别是自由空间中的磁导率和电容率. 本书中各物理量均采用国际单位制单位.

在束流光学中,我们所研究的电磁场多是静态的,因此 Maxwell 方程组可以化为较简单的形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

根据式(1.4),我们可以引入一个矢量位 \mathbf{A} , 使满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.9)$$

于是式(1.1)就可以写成

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.10)$$

由于 $\nabla \times \nabla \phi = 0$ (ϕ 为任意标量函数), 式(1.10)中旋度为零的量可以写

成某个标量函数的梯度. 令这个标量函数为电势 ϕ , 则有

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

或

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.11)$$

由 Maxwell 方程组可以导出电流的连续性方程. 对式(1.3)两边求散度, 得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$$

因为 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$$

再利用式(1.2)得

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

这就是电流的连续性方程. 在直角坐标系 (x, y, z) 中, 上式中第一项可以写为

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

但是电流密度 \mathbf{j} 又可以表示成

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (1.14)$$

其中 \mathbf{v} 为运动电荷的速度. 我们假定, 空间电荷密度 ρ 只是位置和时间的函数, 即

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

因此式(1.13)可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial x} x + \frac{\partial \rho}{\partial y} y + \frac{\partial \rho}{\partial z} z$$

代入式(1.12)得

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} x + \frac{\partial \rho}{\partial y} y + \frac{\partial \rho}{\partial z} z + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

上式表明, 带电粒子在运动中, 其空间电荷密度是守恒的.

对于静态电磁场, 式(1.11)化为

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

代入式(1.6)得

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1.17)$$

这就是静电场的 Poisson 方程. 当空间电荷不存在, 即 $\rho=0$ 时, 它就变成 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.18)$$

对于静磁场, 将式(1.9)代入式(1.7)得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.19)$$

由于 $\nabla \times (\nabla \Psi) \equiv 0$, 所以若将一任意标量函数 Ψ 的梯度加在 \mathbf{A} 上时, 即令

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \nabla \Psi$$

式(1.9)仍然满足

$$\nabla \times \mathbf{A}_1 = \nabla \times \mathbf{A}$$

为了唯一地确定 \mathbf{A} , 可以对 \mathbf{A} 加一个补充条件:

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (1.20)$$

此条件称为 Coulomb 条件. 再利用矢量恒等式:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

式(1.19)可以写成

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (1.21)$$

上式即为矢量 \mathbf{A} 的 Poisson 方程. 若 $\mathbf{j}=0$, 上式就化为 \mathbf{A} 的 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.22)$$

在束流传输系统中, 束流的聚焦和传输特性是由系统中的电场和磁场决定的. 因此, 束流光学的首要任务是确定各光学元件中电场和磁场的分布.

1.2 轴对称静电场

对于低能(能量 $w_0 < 1$ MeV)的带电粒子束, 常常采用具有轴对称性的电场和磁场作为束流传输元件. 首先讨论轴对称静电场.

在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中, 若忽略空间电荷的影响, 电势 ϕ 只是 r 和 z 的函数, 而与 θ 无关. 因此, ϕ 满足 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.23)$$

由于场的轴对称性, 可将电势 $\phi(r, z)$ 在 z 轴附近展开成 r 的偶次幂级数:

$$\phi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{2k}, k=0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

对 z 求二次导数得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k''(z) r^{2k} \quad (1.25a)$$

对 r 求导数得

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_k(z) r^{2k-1} \quad (1.25b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2k(2k-1)a_k(z) r^{2k-2} \quad (1.25c)$$

将式(1.25a)~式(1.25c)代入式(1.24),并令同次幂项的系数为零,可以得到关于系数 $a_k(z)$ 的递推公式:

$$a_k(z) = (-1) \frac{1}{(2k)^2} a_{k-1}''(z), k=1, 2, \dots \quad (1.26)$$

在以上各式中,“''”号表示对 z 求导数.在轴上($r=0$)的电势分布为

$$\phi(0, z) = a_0(z) = V(z) \quad (1.27)$$

可以看出,如果知道轴上的电势分布 $V(z)$,就可以利用递推公式(1.26)求出任一个系数 a_k .其普遍表达式为

$$a_k(z) = (-1)^k \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} V^{(2k)}(z), k=0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

代入式(1.24)得

$$\phi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} V^{(2k)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \quad (1.29)$$

在本书中,只讨论静电透镜的一级光学特性,所以在式(1.29)中只取前两项就够了.结果为

$$\phi(r, z) = V(z) - \frac{1}{4} V''(z) r^2 + \dots \quad (1.30)$$

根据式(1.30),可以写出电场的各分量:

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \approx \frac{1}{2} V''(z) r - \dots \\ E_z(r, z) &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \approx -V'(z) + \frac{1}{4} V'''(z) r^2 - \dots \\ E_\theta(r, z) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

这就是轴对称静电场的基本表达式.

1.3 轴对称静磁场

根据 1.1 节中的讨论, 因为磁场的散度为零, 故 \mathbf{B} 可以用一个矢量位 \mathbf{A} 表示. 由于磁场的轴对称性, 矢量位 \mathbf{A} 只是 r 和 z 的函数, 而与 θ 无关, 则有

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.32)$$

一般, 轴对称磁场是由通电流的螺线管产生的, 其矢量位只有沿 θ 方向的分量, 即

$$A_r = A_z = 0, A_\theta = A(r, z) \quad (1.33)$$

根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 得

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial z}, B_\theta = 0, B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \quad (1.34)$$

另外, 在不考虑空间中电流分布时, 磁场是无旋的, 即 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, 由此可得

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

将式(1.34)代入上式得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (1.35)$$

由于磁场具有轴对称性, B_z 为 r 的偶函数, 所以 A 应为 r 的奇函数, 故 A 的幂级数展开式可以写成

$$A(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(z) r^{2k+1}, k=0, 1, 2, \dots \quad (1.36)$$

与静电场的推导过程类似, 可以导出矢量位 A 的幂级数表达式

$$A(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)(k+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1} B^{(2k)}(z) \quad (1.37)$$

其中 $B(z) = B(0, z)$ 为轴上的磁感应强度分布. 利用式(1.34), 可得到 \mathbf{B} 的各个分量:

$$B_r(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k!)(k+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1} B^{(2k+1)}(z)$$

$$B_\theta(r, z) = 0 \quad (1.38)$$

$$B_z(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} B^{(2k)}(z)$$

在研究轴对称静磁透镜的光学特性时, 我们将忽略像差的影响, 故可

只取级数的第一项. 这样, 式(1.3)和式(1.38)可以写成

$$\begin{aligned} A(r, z) &= \frac{1}{2} B(z) r \\ B_r &= -\frac{1}{2} B'(z) r \\ B_\theta &= 0 \\ B_z &= B(z) \end{aligned} \quad (1.39)$$

从式(1.39)可以看出, 在近轴区域中, $B_r \ll B_z$, 所以磁感应线近似地与 z 轴平行; 另外, 在近轴区域中, B_r 正比于 r , B_z 与 r 无关.

1.4 磁多极场

1.4.1 曲线坐标系中静磁标势的 Laplace 方程

在加速器、束流输运系统或精密谱仪器中, 经常要用到二极磁铁、四极磁铁和六极磁铁等, 我们把它们统称为多极磁铁或多极场元件. 它们有一个共同的特点, 这就是它们的磁场都具有一个中央对称平面(如图 1.1 中 x 平面), 而且参考粒子的轨迹位于这个中央平面内. 为了研究多极场的特性, 首先建立正交曲线坐标系. 一般取中央对称平面为水平平面. 建立运动坐标系, 使坐标原点永远位于中心轨道上, 并且随着参考粒子运动. 一般粒子在磁场中的运动轨迹为一条曲线, 设参考粒子在运动中的瞬时位置为 A , 此点所对应的曲率中心为 C . 连接点 C 和点 A , 在线段 CA 的延长线上远离曲率中心的方向定为 x 轴, A 为坐标原点. 过点 A 而与中央平面垂直的直线为 y 轴, 向上的方向为其正方向. 参考轨迹本身取为

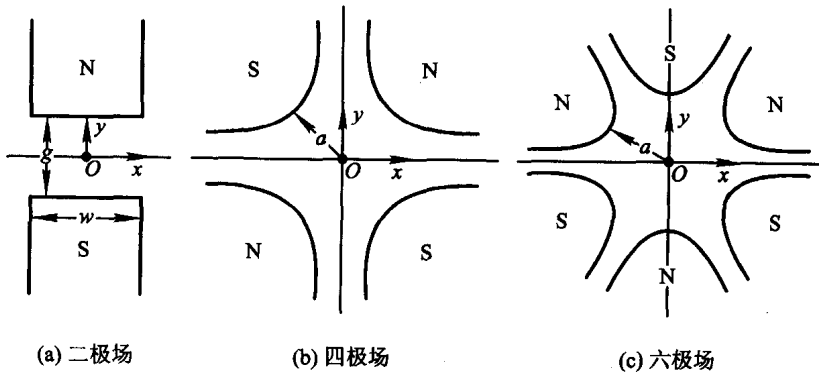


图 1.1 具有中央对称平面的磁多极场

τ 轴,这是一条曲线坐标,其正方向为粒子运动的方向.这样就构成了 (x, y, τ) 正交曲线坐标系,见图 1.2.

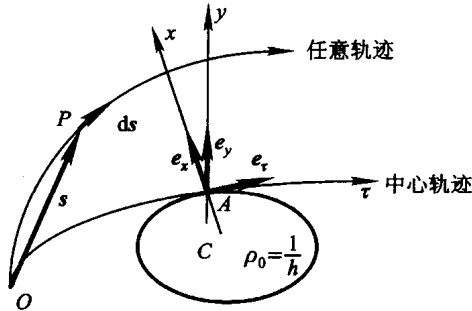


图 1.2 正交曲线坐标系

在正交曲线坐标系 (x, y, τ) 中, Laplace 算符的普遍表达式为

$$\nabla^2 \phi_m = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3}{H_i^2} \frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_i} \right) \quad (1.40)$$

ϕ_m 为磁标势函数,在我们所定义的曲线坐标系中, $H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 1 + hx, h = 1/\rho_0, \rho_0$ 为参考粒子轨道的曲率半径,而且 $\xi_1 = x, \xi_2 = y, \xi_3 = \tau$, 所以有

$$\nabla^2 \phi_m = \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+hx) \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} + \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{1+hx} \frac{\partial \phi_m}{\partial \tau} \right) \quad (1.41)$$

1.4.2 静磁场的幂级数展开

当不计自由电流密度 j 的影响时,式(1.7)化为 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, 即磁场是无旋的. 故可以把静磁场用一个磁标势函数 $\phi_m(x, y, \tau)$ 表示:

$$\mathbf{B} = \nabla \phi_m \quad (1.42)$$

再利用式(1.4), ϕ_m 满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (1.43)$$

对于我们所讨论的磁多极元件,磁场具有中央平面对称性, B_y 是 y 的偶函数, ϕ_m 应当是 y 的奇函数,即

$$\phi_m(x, -y, \tau) = -\phi_m(x, y, \tau) \quad (1.44)$$

此条件可以用磁场各分量的形式表示:

$$\begin{aligned} B_x(x, -y, \tau) &= -B_x(x, y, \tau) \\ B_y(x, -y, \tau) &= B_y(x, y, \tau) \\ B_\tau(x, -y, \tau) &= -B_\tau(x, y, \tau) \end{aligned} \quad (1.45)$$

以上条件说明,在中央平面上只有场分量 B_y 才有非零值,即磁场垂直于中央平面.把磁标势在中央平面附近做展开得

$$\begin{aligned}\phi_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{2k+1,l} \frac{x^l}{l!} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left(A_{10} + A_{11}x + A_{12} \frac{x^2}{2!} + A_{13} \frac{x^3}{3!} + \dots \right) y + \\ &\quad \left(A_{30} + A_{31}x + A_{32} \frac{x^2}{2!} + A_{33} \frac{x^3}{3!} + \dots \right) y^3/3! + \dots\end{aligned}\quad (1.46)$$

其中系数 $A_{2k+1,l}$ 为 τ 的函数.

将式(1.46)代入式(1.43),就得到关于系数 A 的递推公式:

$$\begin{aligned}-A_{2k+3,l} &= A''_{2k+1,l} + lhA''_{2k+1,l-1} - lh'A_{2k+1,l-1} + \\ &\quad A_{2k+1,l+2} + (3l+1)hA_{2k+1,l+1} + \\ &\quad l(3l-1)h^2A_{2k+1,l} + l(l-1)^2h^3A_{2k+1,l-1} + \\ &\quad 3lhA_{2k+3,l-1} + 3l(l-1)h^2A_{2k+3,l-2} + \\ &\quad l(l-1)(l-2)h^3A_{2k+3,l-3}\end{aligned}\quad (1.47)$$

式中撇号“'”表示 $\frac{d}{d\tau}$, $h(\tau) = 1/\rho_0$ 为参考粒子轨迹的曲率,并且所有下角标为负数的 A 的值均为零.从式(1.42)和式(1.46)可以看出,在中央平面上($y=0$),场分量 $B_y(x, 0, \tau)$ 可表示为

$$B_y(x, 0, \tau) = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \Big|_{y=0} = A_{10} + A_{11}x + A_{12} \frac{x^2}{2!} + A_{13} \frac{x^3}{3!} + \dots\quad (1.48)$$

从上式不难看出,系数 $A_{1,l}$ 为

$$A_{1,l}(\tau) = \frac{\partial^l B_y}{\partial x^l} \Big|_{x=0, y=0}, l=0, 1, 2, \dots\quad (1.49)$$

把式(1.46)代入式(1.42),就得到磁场各分量的表达式:

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\partial \phi_m}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{2k+1,l+1} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ B_y &= \frac{\partial \phi_m}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{2k+1,l} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{2k}}{(2k)!} \\ B_z &= \frac{1}{1+hx} \frac{\partial \phi_m}{\partial \tau} = \frac{1}{1+hx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A'_{2k+1,l} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}\quad (1.50)$$

1.4.3 静磁场的二级近似

在式(1.50)中,如果只取到 x 和 y 的二次项,磁场各分量为

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y, \tau) &= A_{11}y + A_{12}xy + \cdots \\
 B_y(x, y, \tau) &= A_{10} + A_{11}x + \frac{1}{2!}A_{12}x^2 + \frac{1}{2!}A_{30}y^2 + \cdots \\
 B_z(x, y, \tau) &= \frac{1}{1+hx}(A'_{10}y + A'_{11}xy + \cdots)
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

上式 B_y 的表达式中含有 A_{30} 项, 可以根据递推公式(1.47)求出:

$$A_{30} = -(A''_{10} + hA_{11} + A_{12}) \tag{1.52}$$

这样磁场各分量的表达式中就只含有 A_{10} 、 A_{11} 和 A_{12} 及其对 τ 的导数.

从式(1.48)、式(1.49)可以看出, 在中央平面上磁场分量 B_y 可写成如下 x 的幂级数形式

$$B_y(x, 0, \tau) = B_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^2 + \cdots \tag{1.53}$$

二极场
四极场
六极场

如果令

$$\begin{aligned}
 n &= - \left[\frac{1}{hB_y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\
 \beta &= \left[\frac{1}{2! h^2 B_y} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

则式(1.53)化为

$$B_y(x, 0, \tau) = B_y(0, 0, \tau)(1 - nhx + \beta h^2 x^2 + \cdots) \tag{1.55}$$

其中 $B_y(0, 0, \tau)$ 为中央平面上沿参考轨迹的磁感应强度, n 和 β 都是 τ 的函数. 对于质量为 m 、电荷为 q 、以速度 v_0 沿参考轨迹运动的粒子, 即参考粒子, 磁场对粒子的作用力满足

$$qv_0 B_y(0, 0, \tau) = mv_0^2 / \rho_0$$

即

$$B_y(0, 0, \tau) = hp_0 / q \tag{1.56}$$

其中 p_0 为参考粒子的动量.

比较式(1.51)和式(1.55), 并利用式(1.52)和式(1.56), 得

$$A_{10} = B_y(0, 0, \tau) = h \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

$$A_{11} = -nh^2 \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

$$A_{12} = 2\beta h^3 \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

$$A_{30} = -(h'' - nh^3 + 2\beta h^3) \left(\frac{p_0}{q} \right) \quad (1.57)$$

$$A'_{10} = h' \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

$$A'_{11} = -(2nhh' + n'h^2) \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

从而磁场各分量的二级近似式(1.51)可写为

$$\begin{aligned} B_x(x, y, \tau) &= \frac{p_0}{q} (-nh^2 y + 2\beta h^3 xy + \dots) \\ B_y(x, y, \tau) &= \frac{p_0}{q} \left[h - nh^2 x + \beta h^3 x^2 - \frac{1}{2} (h'' - nh^3 + 2\beta h^3) y^2 + \dots \right] \\ B_z(x, y, \tau) &= \frac{p_0}{q} [h'y - (nh^2 + 2nhh' + hh')xy + \dots] \end{aligned} \quad (1.58)$$

1.4.4 纯多极场分量

在圆柱坐标系中,纯多极场的磁标势一般可表示为

$$\phi_m = \frac{B_0 r^{l+1}}{(l+1)a_0^l} \sin(l+1)\theta, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (1.59)$$

其中 B_0 为极顶处的磁场, a_0 为多极场的内切圆半径, r 和 θ 为圆柱坐标系中的坐标. 若取 $l=0$, 式(1.59)化为

$$\phi_m = B_0 r \sin \theta$$

利用坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 写成直角坐标系中的量, 上式就是

$$\phi_m = B_0 y \quad (1.60)$$

显然有

$$B_y = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} = B_0, \quad B_x = B_z = 0 \quad (1.61)$$

这就是纯二极场.

若取 $l=1$, 式(1.59)化为

$$\phi_m = \frac{B_0 r^2}{2a_0} \sin 2\theta = \frac{B_0}{a_0} xy \quad (1.62)$$

从而可得磁场分量为

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial \phi_m}{\partial x} = \frac{B_0}{a_0} y \\ B_y &= \frac{\partial \phi_m}{\partial y} = \frac{B_0}{a_0} x \\ B_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

这就是纯四极场的表达式. 根据式(1.54)和式(1.63)得

$$\left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{B_0}{a_0} = -nh^2 \left(\frac{p_0}{q} \right) \quad (1.64)$$

这样, 我们可以定义一个量 k_q^2 :

$$k_q^2 = -nh^2 = \left(\frac{B_0}{a_0} \right) \left(\frac{q}{p_0} \right) = \left(\frac{B_0}{a_0} \right) \frac{1}{B\rho_0} \quad (1.65)$$

k_q^2 称为单位长度纯四极场的强度, $B\rho_0 = \frac{p_0}{q}$ 为中心轨道上粒子的磁刚度.

同样, 当 $l=2$ 时为纯六极场, 磁标势为

$$\phi_m = \frac{B_0 r^3}{3a_0^2} \sin 3\theta = \frac{B_0}{3a_0^2} (3x^2 y - y^3) \quad (1.66)$$

由此可得磁场的分量为

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{2B_0}{a_0^2} xy \\ B_y &= \frac{B_0}{a_0^2} (x^2 - y^2) \\ B_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

利用式(1.54)和式(1.67)得

$$\left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{B_0}{a_0^2} = \beta h^3 \left(\frac{p_0}{q} \right)$$

定义单位长度纯六极场的强度 k_s^2 为

$$k_s^2 = \beta h^3 = \frac{B_0}{a_0^2} \left(\frac{q}{p_0} \right) = \frac{B_0}{a_0^2} \frac{1}{B\rho_0} \quad (1.68)$$

用同样的方法还可以定义八极场强度和更高极场强度. 写成普遍的形式, 单位长度的多极场强度 k_l^2 定义为

$$\begin{aligned} k_l^2(\tau) &= \frac{1}{B\rho_0} \frac{1}{l!} A_{1,l}(\tau) \\ &= \frac{1}{B\rho_0} \frac{1}{l!} \left(\frac{\partial^l B_y}{\partial x^l} \right) \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \quad l=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.69)$$

从而式(1.48)可表示

$$B_y(x, 0, \tau) = B\rho_0 \sum_{l=0}^{\infty} k_l^2(\tau) x^l, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (1.70)$$

1.5 解析法求解静电场

当边界条件比较复杂时,用解析方法求解静电场是很困难的,一般要借助于电子计算机进行数值计算.但对于具有轴对称性的圆筒形静电透镜,由于边界条件比较简单,可以求出电场的解析表达式.

1.5.1 等径双圆筒电极的电势分布

设有两个半无穷长的同轴金属圆筒,半径都为 R ,两筒间的距离 s 很小,电势分别是 V_1 和 V_2 ,如图 1.3 所示.

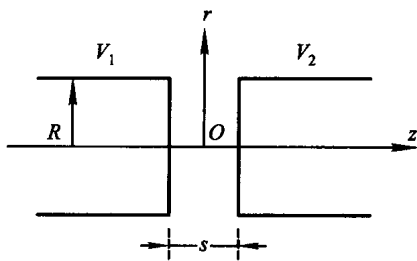


图 1.3 双圆筒透镜

取坐标原点在间隙的中心,由于轴对称性,电势 ϕ 与方位角 θ 无关,在圆柱坐标系中做变量分离:

$$\phi(r, z) = F(r) \cdot G(z) \quad (1.71)$$

代入方程(1.23)得

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{rF} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dz^2} = 0 \quad (1.72)$$

式(1.72)可以分解成以下两个方程:

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + k^2 G = 0 \quad (1.73)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - k^2 F = 0 \quad (1.74)$$

其中 k 为待定常数.以上两个方程的通解为

$$G_k(z) = A(k) \sin kz + B(k) \cos kz \quad (1.75)$$

$$F_k(r) = C(k) J_0(ikr) + D(k) N_0(ikr) \quad (1.76)$$

其中 $A(k)$ 、 $B(k)$ 、 $C(k)$ 和 $D(k)$ 为待定常数,由边界条件确定; $J_0(ikr)$ 为零阶第一类 Bessel 函数, $N_0(ikr)$ 为零阶 Neumann 函数.总的解为对每

一个 k 值的解的求和,

$$\begin{aligned}\phi(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_k(z) F_k(r) dk + V_c \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \sin kz + B(k) \cos kz] \\ &\quad [C(k) J_0(ikr) + D(k) N_0(ikr)] dk + V_c.\end{aligned}\quad (1.77)$$

因为当 $r=0$ 时, $N_0(ikr)$ 变为无穷大, 而轴上的电势只能为有限值, 所以应当舍去此项, 即 $D(k)=0$. 又因 $z=0$ 的平面是一个等位面, 即对于任意的 r 都应有 $\phi(r, 0) = V_c = \text{常数}$, 所以 $B(k)$ 也必须为零, 因而有

$$\begin{aligned}\phi(r, z) &= V_c + \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \sin kz J_0(ikr) dk \\ &= V_c + \int_0^{\infty} [A(k) - A(-k)] \sin kz J_0(ikr) dk\end{aligned}$$

由于 $A(k)$ 和 $A(-k)$ 都是待定常数, 所以可以将 $[A(k) - A(-k)]$ 直接记为 $A(k)$, 于是得到下式

$$\phi(r, z) = V_c + \int_0^{\infty} A(k) \sin kz J_0(ikr) dk \quad (1.78)$$

下面利用边界条件确定 $A(k)$. 对于等径双圆筒透镜, 其边界条件可写为:

$$z=0: \quad \phi(R, 0) = V_c = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$$

$$z<0: \quad \phi(R, z) = V_1$$

$$z>0: \quad \phi(R, z) = V_2$$

将以上边界条件代入式(1.78)得

$$\int_0^{\infty} A(k) \sin kz J_0(ikr) dk = \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{2}, & \text{当 } z > 0, r = R \\ -\frac{V_2 - V_1}{2}, & \text{当 } z < 0, r = R \end{cases}$$

经过 Fourier 变换得

$$A(k) J_0(ikR) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_2 - V_1}{2} \sin kz dz = \frac{V_2 - V_1}{\pi k}$$

所以

$$A(k) = \frac{V_2 - V_1}{\pi k J_0(ikR)}$$

将 $A(k)$ 代入式(1.78)得

$$\phi(r, z) = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kz J_0(ikr)}{k J_0(ikR)} dk \quad (1.79)$$

这就是双圆筒透镜的电势分布,其轴上电势分布为

$$\begin{aligned} V(z) &= \phi(0, z) \\ &= \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{k J_0(ikR)} dk \end{aligned} \quad (1.80)$$

$V(z)$ 的导数为

$$V'(z) = \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kz \frac{dk}{J_0(ikR)} \quad (1.81)$$

利用式(1.80)计算轴上的电势分布需要做积分,比较麻烦.为了方便,常常采用以下近似式来代替:

$$V(z) = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \tanh(\omega z/R) \quad (1.82)$$

$$V'(z) = \frac{V_2 - V_1}{2} \cdot \frac{\omega}{R} \cdot \operatorname{sech}^2(\omega z/R) \quad (1.83)$$

当 $z=0$ 时,用式(1.80)与用近似式(1.82)所得到的电势值相等,即

$$V(z) = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

现在需要使 $V'(z)$ 在 $z=0$ 处的值也相等.由式(1.81)和式(1.83)得

$$\frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{J_0(ikR)} = \frac{V_2 - V_1}{2} \cdot \frac{\omega}{R}$$

解得

$$\omega = \frac{2R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{J_0(ikR)}$$

令 $\xi = kR$, 上式就化为

$$\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{J_0(i\xi)} \approx 1.31835 \quad (1.84)$$

当两圆筒之间的距离 s 比较大不能忽略时,其轴上电势分布可用下式近似表示:

$$V(z) = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2\omega s/R} \ln \frac{\cosh[\omega(z+s/2)/R]}{\cosh[\omega(z-s/2)/R]} \quad (1.85)$$

1.5.2 等径三圆筒电极的电势分布

设三个圆筒的半径均为 R , 间距为 s ($s < R$). 取坐标原点在透镜的

中心,可将已知电极系统的电势分布看作由两个双圆筒透镜电势分布的叠加而成(如图 1.4 所示):

$$V(z) = V_I(z) + V_{II}(z)$$

其中 $V_I(z)$ 和 $V_{II}(z)$ 都可以看做双圆筒透镜的电势分布,并且可以用式(1.85)表示:

$$V_I(z) = \frac{V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2\omega s/R} \ln \frac{\cosh[\omega(z+a+s/2)/R]}{\cosh[\omega(z+a-s/2)/R]}$$

$$V_{II}(z) = \frac{V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2\omega s/R} \ln \frac{\cosh[\omega(z-a+s/2)/R]}{\cosh[\omega(z-a-s/2)/R]}$$

其中 $2a$ 为间隙中心到间隙中心之间的距离.注意,在式(1.85)中,两个双圆筒透镜的原点都在各自间隙的中心,因此,在写出 $V_I(z)$ 和 $V_{II}(z)$ 的表达式后,要做简单的坐标平移,然后再相加,结果为

$$V(z) = V_I(z) + V_{II}(z) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{2\omega s/R} \cdot$$

$$\ln \left\{ \frac{\cosh[\omega(z-a+s/2)/R] \cosh[\omega(z+a-s/2)/R]}{\cosh[\omega(z-a-s/2)/R] \cosh[\omega(z+a+s/2)/R]} \right\}$$

(1.86)

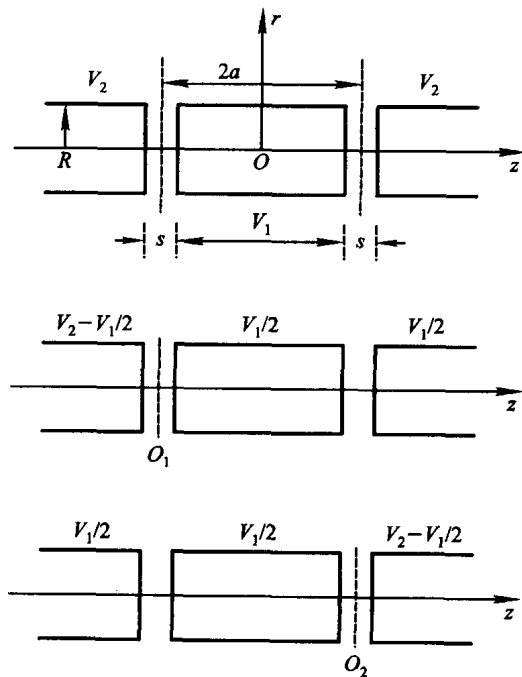


图 1.4 三圆筒透镜

1.5.3 圆孔膜片电极的电势分布

无穷大的金属膜片上开有一圆形小孔,孔的半径为 R . 在膜片两侧足够远处,电场强度是均匀的,各为 E_1 和 E_2 ,膜片上的电势为 V_0 ,见图 1.5. 在圆柱坐标系中边界条件可以表示为

$$\begin{aligned} V|_{z=0, r \geq R} &= V_0 \\ V|_{z \rightarrow -\infty} &= -E_1 z \\ V|_{z \rightarrow \infty} &= -E_2 z \end{aligned} \quad (1.87)$$

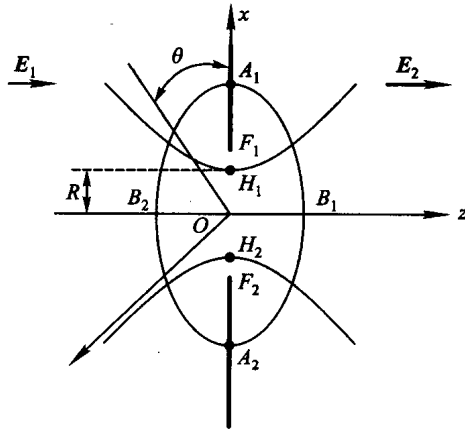


图 1.5 圆孔膜片的正交曲线坐标系

现在采用共焦点的旋转双曲面和旋转椭圆面作为曲线坐标系,公共焦点为 F_1 和 F_2 . 令

$$\begin{aligned} OF_1 = OF_2 = R, \quad OA_1 = OA_2 = a \\ OB_1 = OB_2 = b, \quad OH_1 = OH_2 = c \end{aligned}$$

在 xOz 平面中的椭圆方程为

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a > b, y = 0 \\ a^2 - b^2 = R^2 \quad (\text{椭圆的焦距}) \end{aligned}$$

引入参变量 μ , 令 $\mu R = b$, 则

$$a^2 = R^2(1 + \mu^2), \mu^2 \geq 0$$

椭圆方程可改写为

$$\frac{x^2}{R^2(1 + \mu^2)} + \frac{z^2}{R^2\mu^2} = 1, \quad y = 0$$

将椭圆绕 z 轴旋转, 可得椭球面的方程: