中國科學院佘山觀象台天文年刊

第二十四卷

伏洛拉羣小行星普遍攝動的計算和軌道的改進

李 珩　易照華　劉振鋭

中國科學院紫金山天文台編
科 學 出 版 社 出 版
1957

中國科學院佘山觀象台天文年刊
第二十四卷

伏洛拉羣小行星普遍攝動的計算和軌道的改進

中國科學院紫金山天文台編
科　學　出　版　社　出　版
1957

中國科學院佘山觀象台天文年刊

第 24 卷

伏洛拉攀小行星普遍攝動的計算和軌道的改進

編 算 者　李 珩　易照華　劉振鋭

編 輯 者　中國科學院紫金山天文台

出 版 者　科 學 出 版 社

北京朝陽門大街 117 號

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

印 刷 者　上海中科藝文聯合印刷廠

總 經 售　新 華 書 店

1957 年 4 月第 一 版　　書號：0748 印張：12 2/5

1957 年 4 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/10

(滬) 0001–1840　　字數：160,000

定價：(11) 道林本 3.00 元　報紙本 2.20 元

佘山觀象台天文年刊第24卷

目　　次

	頁
弁　言	1
緒　論	3
Ⅰ. 漢申-波林方法和軌道改進的原理	3
Ⅱ. 計算木星和土星的攝動和軌道改進的具體步驟	8
Ⅲ. 表的說明和使用	14
參考文獻	16
西文提要	18
17 顆伏洛拉型小行星的表	19
(261) Prymno	19
(284) Amalia	24
(428) Monachia	30
(753) Tiflis	35
(871) Amneris	40
(883) Matterania	45
(905) Universitas	50
(915) Cosette	55
(916) America	60
(1088) Mitaka	67
(1089) Tama	72
(1110) Jaroslawa	77
(1123) Shapleya	82
(1130) Skuld	87
(1182) Ilona	92
(1249) Rutherfordia	97
(1382) Gerti	102
星歷表	107
附表 Ⅰ	110
附表 Ⅱ	111
附表 Ⅲ	112
附表 Ⅳ	117

弁　言

自 19 世紀小行星經人大量發現以來，給天體力學提出一個新的問題，因而理論天文學得到了新的發展。雖然大行星的攝動已經拉普拉斯、列威耶 (Le Verrier) 諸位天體力學大師建立有完整的理論和計算的方法，但以小行星的偏心率和軌道傾角比較大行星的相同根數頗大，因而不能使用這些成法來算出小行星的準確位置。

根據觀測與理論計算之差的數值，不涉及時間 t 的因子，以作所謂特殊攝動的計算，一向是確定小行星攝動的唯一方法，可是特殊攝動計算，既相當繁重，而結果的有效期間又復甚短，故自 19 世紀後半期。有日耳登 (Gyldén)、漢申 (Hansen) 和赫爾 (Hill) 同時從分析的方法建立他們的所謂普遍攝動的理論。這些方法都不把攝動函數作嚴格的展開，而都使用高斯的內插方法，這樣雖然可以展開偏心角和傾角大的情形的攝動函數，但却失去了解決問題的普遍性；攝動函數展開爲數字係數的級數的形式，致使每一顆小行星都各有其展開式而須重新計算。

這些方法的優點是考慮到大行星對於小行星攝動的長期影響，故表攝動的公式能在相當長的時期內應用，因此它們叫做普遍攝動或絕對攝動，以區別於特殊攝動。這些方法以漢申的方法應用最爲廣泛，可是計算過程非常繁重。例如列沃 (Leveau) 利用漢申的方法計算灶神星 (Vesta) 的攝動，只是結果就載了 800 頁之多，花費了作者十年的時間之久。這樣的工作不但需要很長的計算時間，而且需要大量的觀測數據。在 19 世紀初期小行星的數量還不太多的時候，尚可以這樣大的勞力去追求準確度。但以後小行星數量增加，要對每一顆小行星都建立準確的理論和星曆表，便爲事實所不許可。可是小行星所受大行星的攝動的影響很大，若不及時將這些影響算出，小行星很容易有失掉的危險。於是在 20 世紀初期提出了兩種計算近似攝動的方法，卽勃倫德耳 (Brendell 1919) 的方法和波林 (Bohlin 1902) 的方法。

勃倫德耳的方法以日耳登的小行星理論爲基礎，將坐標的攝動轉換爲軌道根數的攝動。展開式裏只須保存幾個主要項，容易造表，使攝動的計算簡單化，故勃氏在短時間內就算出平均周日運動在 800″ 至 900″ 之間的數百顆小行星的近似攝動。

波林的方法雖然比較複雜，但却更準確。這個方法建立在漢申的方法的基礎上面，而加入了羣的概念。波林按施攝動的大行星的平均周日運動 n' 和某一假想的小行星的平均周日運動 n_0 之比 ($\mu_0 = n'/n_0$)，而可表爲有理數如 p/q (p, q 皆正整數) 的形式分羣。於是某一大行星 (例如木星) 對於某一小行星的攝動概可表爲 $w=1-n_0/n$ (n 表這個被攝動的小行星的平均周日運動) 的冪級數。設以 $\mu/\mu_0 = n_0/n$，則 $\mu = \mu_0(1-w)$；因 n 和 n_0 或者 μ 和 μ_0 的數值很是接近，故 w 是一微小的數量，將任何一種攝動 $f(\mu)$ 展開爲 w 的冪級數，便有以下的形式：

$$f(\mu) = f_0(\mu_0) + w f_1(\mu_0) + w^2 f_2(\mu_0) + \cdots$$

這些係數 $f_0, f_1, f_2, \cdots$ 都是 μ_0 的函數，是不難算出來的。按 μ_0 之數值的大小將小行星分爲若干羣。對於每一羣，天文工作者造有與 $f_0, f_1, f_2, \cdots$ 相當的數字表，以供計算各羣小行星的攝動的使用。因 $f(\mu)$ 的冪級數收斂迅速，通常只取至 w 的二次項爲止。

玆將現在已經研究過而且造成 w 的係數的數字表的小行星羣表示如下：

攝動星	羣名	μ_0	n_0 的近似值	作者
木星 ($n' \doteqdot 300''$)	Hecuba	1/2	600″	Zeipel
	Minerva	2/5	750	Wilson
	Hestia	1/3	900	Bohlin
	Flora	2/7	1050	Strömberg
	Hungaria	1/4	1200	Villemarqué
土星 ($n' \doteqdot 120''$)		1/5	600	Osten
		1/4	840	Block

因此絕大多數的小行星其平均周日運動在 $550'' < n < 1300''$ 之間受木星的普遍攝動的,概可用以上的表計算。

佘山觀象台在 1930—1942, 衛爾甘主持台務期間, 對於小行星羣的普遍攝動做了不少的工作（佘山天文年刊第 17, 19, 21 卷）。起初計算伏洛拉羣,繼後更創立匈牙利羣,算出它們的基本數字表, 爲以後計算這一羣小行星的普遍攝動打下基礎。他們計算伏洛拉羣受木星的攝動是用斯特隆別爾格的表,對於受土星的攝動是用勃拉克的表。因爲斯氏的表中沒有 1—4, 2—7 項,他們用波林的理論成了伏洛拉羣的 1—4 項係數表,更用勒威耶的大行星攝動的理論,算出 2—7 項的係數表。他們總共計算了 129 顆小行星的攝動係數,其中只有 47 顆作了軌道改進的研究。衛氏在軌道改進的工作方面,且提出了比較簡明的方法。

1946 年衛爾甘死去, 佘山觀象台的攝動計算便告停頓,但其留下的工作,就其所經營的兩羣小行星而言, 尚有 82 顆小行星的軌道根數須待改進,還有近十年來新發見 67 顆屬於此兩羣小行星的攝動係數和軌道改進,均待計算。

至於理論方面的工作, 如波林的理論的準確性、攝動表適用的範圍, 從而加以提高更增加其準確度一類的問題都值得探討。

1955 年夏季有北京大學數學力學系研究生易照華同志來佘山進修, 我特向其建議和我台研究實習員劉振銳同志合作, 重理衛氏未能完成的工作。經過整整一年的努力, 易、劉兩位同志已根據原有的攝動係數（其中 (284) 號的攝動係數係易同志所新算的, (916) 號的攝動係數係劉同志所新算的), 作成 17 顆小行星的軌道根數的改進,其計算結果與測觀結果加以比較之後,知其計算是合於標準的。

這 17 顆星的軌道改進,易同志算了 7 顆,即 (284), (871), (1088), (1089), (1110), (1123) 和 (1382); 劉同志算了 10 顆,即 (261), (428), (753), (883), (905), (915), (916), (1130) (1182) 和 (1249)。

自 1948 年國際天文協會第七屆大會以來, 小行星研究的國際中心移至蘇聯列寧格勒的理論天文研究所, 由該所担任«小行星星曆表» 的編算及出版工作。除蘇聯的天文工作者在這一方面作出大量的成績以外,其他各國的天文台亦作了很多的貢獻。現在出版的小行星星曆表中,大部分的小行星是算過了攝動的。

自解放以來南京紫金山天文台和上海佘山觀象台對於小行星均作照相定位觀測, 每年發表的結果常在 300 顆以上。紫金山天文台計算小行星的特殊攝動已有一些成績。發表在天文學報和小行星星曆表中。本報告內的成就亦已寄給蘇聯理論天文研究所,以供其採用。我們相信我國天文台對於小行星觀測與理論相結合的工作,已經打下了良好的基礎,將來繼長增高,作出更好更多的貢獻,是可以預期的。

本工作在進行期間, 曾蒙蘇聯理論天文研究所小行星部主任薩莫依洛娃-雅洪托娃教授來函鼓勵, 且爲我國天文學界特別寫了一篇關於小行星的綜合敍述的文章,已經易照華同志譯出,登載天文學報第四卷第一期（1956 年 6 月出版）。我們特在此向薩莫依洛娃-雅洪托娃教授致以感謝和敬意。

1956 年 7 月

李 珩

（中國科學院紫金山天文台研究員）

緒　論*

本工作所用的計算攝動的方法,叫做漢申–波林方法（Hansen–Bohlin），是波林根據漢申方法的原理,結合小行星羣的情況提出來的。最近幾十年來，對大部分的小行星都分成羣，而算出大行星（特別是木星）對於它們的攝動。雖然算出的結果的精確度不够高,但對於編製尋星用的星曆表來說，已完全能符合要求，可以保證小行星在相當長的時期內不致丟失。因此，今後還値得做下去，現在把漢申–波林方法和軌道改進的原理，計算攝動和軌道改進的具體步驟,以及我們工作所得的結果分述如下：

I.　漢申–波林方法和軌道改進的原理

§ 1. 計算小行星攝動的根本問題是根據某曆元 t_0 時的“瞬時軌道”，來求出小行星在任何時刻 t 時的軌道和位置。本方法是用“瞬時橢圓”的概念,來求小行星在任何時刻的位置。

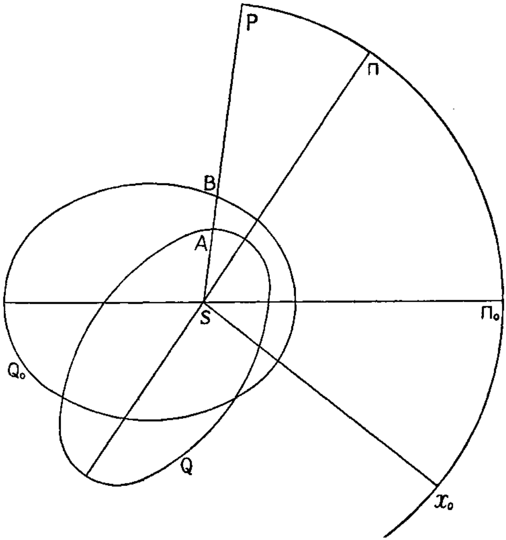

圖 1

*這篇緒論的內容是漢申–波林的普遍攝動的理論與其計算的方法，在天體力學上已經算是經典的了。照一般論文報告的寫法，本可略而不談。不過我們以其從未經人寫成中文，介紹給我國天文界。爲着引起我國更多的天文工作者注意這方面的問題，並推廣這方面的工作，我們認爲這樣系統的敍述是必要的。

先假定軌道平面不變,在 t_0 時,小行星沿橢圓 Q_0 運動(見圖 1),近日點方向爲 Π_0; 在 t 時,小行星沿橢圓 Q 運動,近日點方向爲 Π。設 X_0 爲一固定方向,作爲經度的起算點, A 爲小行星在 t 時的位置, P 爲其投影。

令

$$X_0\Pi_0 = \varpi_0,\quad X_0\Pi = \varpi,\quad \Pi_0 P = \bar{f},\quad \Pi P = f,$$

故小行星在 t 時的經度 $v = X_0 P = f + \tilde{\omega} = \bar{f} + \tilde{\omega}_0$。 $\bar{f}$ 爲小行星在 t 時對於橢圓 Q_0 的眞近點角,因有攝動關係, $\bar{f}$ 不能用普通的橢圓運動的方法來計算,漢申引入了一個新的自變量 z(爲 t 的函數)使得:

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} - e_0 \sin \bar{E} &= n_0 z + M_0 \\ \tan \frac{\bar{f}}{2} &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \tan \frac{\bar{E}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

故

$$SB = \bar{r} = a_0(1-e_0\cos\bar{E}).$$

但小行星在 t 時的眞正向徑爲 $r = SA$, 令

$$r = \bar{r}(1+\nu). \tag{B}$$

因此,只要知道了 z 和 ν, 就可以求出 r, $\bar{f}$, 也就是確定了小行星在 t 時的位置。令 $z = t + \delta z$, 漢申得到[1]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta z}{dt} &= \overline{W} = \Xi + \boldsymbol{r}\frac{r}{a_0}\cos f + \boldsymbol{\psi}\frac{r}{a_0}\sin f \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{n_0}{2\sqrt{1-e_0^2}}\left[\boldsymbol{r}\sin f - \boldsymbol{\psi}(\cos f - e_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

其中 Ξ, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\psi}$ 爲軌道根數的函數,它們對 t 的微商可以由一般的攝動理論求出來。爲計算方便起見,漢申又引入了一個同 t 相當,但同 t 無關的自變量 τ, 得到了另一套變量 ρ, ω, η(對應於 r, f, E)如下:

$$\left.\begin{aligned} \eta - e_0 \sin \eta &= n_0 \tau + M_0 \\ \rho \cos \omega &= a_0(\cos \eta - e_0) \\ \rho \sin \omega &= a_0 \sqrt{1-e_0^2} \sin \eta \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

令

$$\boldsymbol{W} = \Xi + \boldsymbol{r}\frac{\rho}{a_0}\cos\omega + \boldsymbol{\psi}\frac{\rho}{a_0}\sin\omega \tag{E}$$

故

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\rho}{a_0}\cos\omega + \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}\frac{\rho}{a_0}\sin\omega.$$

其中 $\frac{d\Xi}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}$ 可用一般的攝動理論求出,故積分(ρ, ω 作爲常量)後可求出 $\boldsymbol{W}$。現在規定,如果在同 $\boldsymbol{W}$ 有關的量的頭上加一橫線,就表示把其中的 τ 換爲 t, 相應地把 ρ, η, ω 換爲 r, E, f 則從(C)式可得:

$$\frac{d\,\delta z}{dt} = \overline{\boldsymbol{W}};\qquad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial\tau}\right)},$$

即得

$$\delta z = \int_0^t \overline{\boldsymbol{W}}\,dt \tag{F}$$

$$\nu = -\frac{1}{2}\int_0^t \overline{\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial\tau}\right)}dt \tag{G}$$

到此爲止, δz 和 ν 都可以求出,可得到 r, v, 如果小行星的軌道平面不變化,則可由下列式子求出小行星在 t 時的黃經黃緯 (l, b):

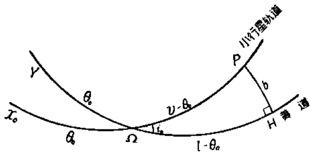

圖 2

$$\cos b \sin (l-\theta_0) = \cos i_0 \sin (v-\theta_0)$$
$$\cos b \cos (l-\theta_0) = \cos (v-\theta_0)$$
$$\sin b = \sin i_0 \sin (v-\theta_0).$$

但因有攝動,軌道平面在變化,漢申證明[2],如果只考慮攝動行星質量的一次冪,則只須引入一個攝動量 s,就可以由下式求出 (l, b):

$$\left.\begin{aligned}\cos b \sin (l-\theta_0) &= \cos i_0 \sin (v-\theta_0) - s \tan i_0 \\ \cos b \cos (l-\theta_0) &= \cos (v-\theta_0) \\ \sin b &= \sin i_0 \sin (v-\theta_0) + s\end{aligned}\right\} \tag{H}$$

其中 $s = a_0 u/r = a_0 \bar{R}/r$

R 的定義爲: $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{\rho}{a_0} hr \cos i_0 \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} \sin (\omega - f)$ (I)

$h = \dfrac{K}{\sqrt{a(1-e^2)}}$,而 K^2 爲萬有引力常數,z 爲大行星到小行星的軌道平面的距離,Ω 爲攝動函數。因此,s 可以由 (I) 式計算出來了。於是根據 (H) 式就可求出 (l, b),運用前面的 v,就全部把小行星在 t 時的黃道球面坐標 (r, l, b) 求出了。

§2. 這樣一來,在上面各式中,只要能求出 $\dfrac{d\Xi}{dt}$, $\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{d\psi}{dt}$, $\dfrac{dR}{dt}$, 則 δz, v, s 都可以根據前面的式子計算出來。根據漢申的公式 (把根數的脚數"0"略去):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Xi}{dt} &= -3h\frac{\partial \Omega}{\partial v} \\ \frac{dr}{dt} &= 2h\left[\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\cos f + \frac{e}{1-e^2}\right]\frac{\partial \Omega}{\partial v} + 2ha \sin f \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2h\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin f - 2ha\frac{\partial \Omega}{\partial r}\cos f \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\rho}{a} hr \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \sin (\omega - f)\end{aligned}\right\} \tag{J}$$

故關鍵在於把攝動函數 Ω 及其偏導數 $\dfrac{\partial \Omega}{\partial v}$, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial r}$, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}$ 展開成級數,以便積分。

大家知道:

$$\left.\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H \\ r\frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \cos H - \frac{r^2}{\Delta^3} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) z\end{aligned}\right\} \tag{K}$$

而 $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H$

其中 r, r' 爲小行星和大行星的向徑，Δ 爲它們的距離，H 爲二行星在太陽處的張角，z 爲大行星到小行星軌道平面的距離。

爲了能適用於小行星羣起見，波林[3] 先利用拉普拉斯係數把它們先展開成偏近點角 E 的三角級數。展開式的係數中包含了小行星和大行星的半長徑之比 $\alpha = a/a'$ 及二者的平均每日運動之比 $\mu = n'/n$。事實上，α 也可以用 μ 來表示：

$$\alpha = \frac{a}{a'} = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{1+m'}} \tag{L}$$

其中的 m' 爲大行星的質量。

對於平均每日運動相互接近的小行星羣，它們的 μ 也相互接近。因此，對於每一羣小行星，可以選擇一個標準 μ_0，使得本羣的每一個行星的 μ 用 μ_0 及另一小量 w 來表示：

$$\mu = \mu_0(1-w) \tag{M}$$

因 w 很小，故若把攝動函數展開式的係數再按照 w 來展開，則收斂得很快。一般情形下只要取到 w^2 項就够了。對於同一羣的小行星，μ_0 相同，只須改正 w。

§3. 對於伏洛拉 (Flora) 羣小行星 ($n \sim 1050''$)，取 $\mu_0 = 2/7$ (對應的 $n = 1047''$) 來討論木星的攝動。經過前面的攝動函數展開和進行積分以後，把三個量 δz, v, s 修改成 $n\delta z$, $2v$, $u/\cos i$ 得到下面的形式：

$$\left.\begin{aligned}
n\delta z = {} & (m-2l\eta)\,\eta + a_0\tau + (m-2l\eta)\,\tau\sin E - n\tau\cos E - \\
& -\frac{m\eta}{2}\tau\sin 2E + \frac{n}{2}\eta\tau\cos 2E + n(1-\eta^2/2)\sin E + (m-2l\eta-m\eta^2/2)\cos E - \\
& -\frac{5}{4}n\eta\sin 2E + \left(-\frac{5}{4}m\eta + 2l\eta^2\right)\cos 2E + \\
& + \sum_{\substack{n,r,s\\p,q}} \eta^p\eta'^q R_{p,q}(n+r,-n+s)\sin[n\Delta+(n+r)E-(n-s)A] \\
2v = {} & -n\eta - b_0\tau - n\tau\sin E - m\tau\cos E + m\sin E - n\cos E - m\eta\sin 2E + n\eta\cos 2E + \\
& + \sum_{\substack{n,r,s\\p,q}} \eta^p\eta'^q S_{p,q}(n+r,-n+s)\cos[n\Delta+(n+r)E-(n-s)A] \\
\frac{u}{\cos i} = {} & -\bar{n}\eta + c_0\tau - n\tau\sin E - \bar{m}\tau\cos E + \bar{m}\sin E - \bar{n}\cos E - \bar{m}\eta\sin 2E + \bar{n}\eta\cos 2E + \\
& + \iota\sum_{\substack{n,r,s\\p,q}} \eta^p\eta'^q T_{p,q}(n+r,-n+s)\sin[n\Delta \pm \Pi' + (n+r)E-(n-s)A] \\
\text{其中}\quad & R_{p,q}(n+r,-n+s) = R_{0,p,q} + w R_{1,p,q} + w^2 R_{2,p,q} \\
& S_{p,q}(n+r,-n+s) = S_{0,p,q} + w S_{1,p,q} + w^2 S_{2,p,q} \\
& T_{p,q}(n+r,-n+s) = T_{0,p,q} + w T_{1,p,q}
\end{aligned}\right\} \tag{N}$$

l, m, n, a_0, b_0, c_0, $\bar{m}$, $\bar{n}$, $R_{0,p,q}$, $R_{1,p,q}$, $R_{2,p,q}$, $S_{0,p,q}$, $S_{1,p,q}$, $S_{2,p,q}$, $T_{0,p,q}$, $T_{1,p,q}$, 載於斯特隆別爾格 (Strömberg) 的表中[4]

讀者不要把這裏的符號和前面的弄混淆了。這裏，$\eta = e/2$, $\eta' = e'/2$, e, e' 是小行星和木星的偏心率，ι, Δ, Π' 爲輔助量，是軌道根數的函數。$\tau = nt$, n 是小行星的平均每日運動，t 爲時間；求和號 Σ 內的 n, r, s, p, q 均代表整數。而

$$A = M' + \frac{2}{7}(E-M) \tag{O}$$

M, M' 爲小行星和木星的平近點角，E 爲小行星的偏近點角。

把這些係數算出後，再按照 $\cos(iE-i'A)$, $\sin(iE-i'A)$ 整理成三角級數（其中 i, i' 爲整數）。

在斯特隆別爾格的表中，沒有 $(E-4A)$ 和 $(2E-7A)$ 的係數，可是對於伏洛拉翠小行星來說，這兩項經常是很大，必須考慮。衛耳甘 (E. de la Villemarque) 直接用波林方法根據抛物線內插法原理來求出 $(E-4A)$ 的係數公式（只有 $n\delta z$ 和 $2v$ 的）；又根據大行星理論的展開式求出了 $n\delta z$ 的 $(2E-7A)$ 的係數[5]。

計算土星的攝動時，取 $\mu_0 = 1/7$，可根據勃拉克 (Block) 的表[6] 來計算，如果要求的精確度不高，則只要算長期項（即包含 $\tau = nt$ 的項）就行了。到此爲止，伏洛拉翠小行星的攝動可以全部算出來了。

§4. 在上面計算攝動的過程中，經過了幾次積分手續，因此有積分常數，包含在 $n\delta z$, $2v$, 和 $u/\cos i$ 的式子中。積分常數一共有七個 (c, dn, K_c, K_s, C, l, l_1)，但其中只有六個是相互獨立的。它們在攝動量中所處的地位如下：

$$\left.\begin{aligned}
n\delta z &= c + dnt + K_c\cos E + K_s\sin E - \frac{e}{4}K_c\cos 2E - \frac{e}{4}K_s\sin 2E + \cdots \\
2v &= 2C - K_s(1+e^2/2)\cos E + K_c\sin 2E + \cdots \\
u/\cos i &= -el_1 + l_1\cos E - l + \cdots \\
\text{其中存在一關係:}\quad C &= -\frac{2}{3}\frac{dn}{n} - \frac{e}{2}K_s.
\end{aligned}\right\} \tag{P}$$

可以根據在時間 $t = t_0$ 時，$n\delta z$, $2v$, $u/\cos i$ 及其導數爲零所得的六個條件來求，但這樣非常繁。經過很多人的研究，可以把積分常數的影響，歸併到 $t = t_0$ 時的軌道根數上面去（軌道根數也正好是六個）。也就是說，先假定積分常數爲 0，算出 $n\delta z$, $2v$, $u/\cos i$ 再由它們來算出 (α, δ)，同實際觀測值 (α_0, δ_0) 比較，得到 $0-C$，根據 $0-C$ 來求出相應的軌道根數的改正值。這樣一來，就是用軌道改進的方法來代替求積分常數了。實際上，奧斯騰 (Osten) 根據漢申的平均軌道概念和公式[7] 得出了積分常數和軌道改正值之間的具體關係[8]：

$$\left.\begin{aligned}
dn &= dn & dM &= c + \frac{K_c}{2e}\left(1+\frac{e^2}{2}\right) \\
d\varphi &= K_s/2 & d\omega &= -K_c\cos\varphi/2e \\
di &= l\cos\omega/\cos\varphi + l_1\sin\omega, & d\Omega &= (l\sin\omega\sec\varphi - l_1\cos\omega)\csc i
\end{aligned}\right\} \tag{Q}$$

這樣就把定積分常數問題和軌道改進統一起來了。

§5. 在常用的軌道改進的方法中，如果要求的精確度不高，小行星的軌道對黃道的傾角 i 很小，則最好用愓乾 (Tietjen) 方法的近似公式[9]。愓乾方法是先以軌道平面爲基礎的坐標系同直角坐標聯系，然後再轉化成 $0-C$ 同軌道根數改正值的關係：

$$\left.\begin{aligned}
&\cos S\cos\delta\, d\alpha + \sin S\, d\delta = \\
&\qquad = \frac{a}{\rho}\left[f_M\, dM + f_M\, t\, dn + f_\varphi\, d\varphi + f_\omega\, d\omega\right] \\
&-\sin S\cos\delta\, d\alpha + \cos S\, d\delta = \\
&\qquad = \frac{r}{\rho}\left[\sin(\omega+f)\, di - \cos(\omega+f)\sin i\, d\Omega\right]
\end{aligned}\right\} \tag{R}$$

其中 f_M, f_φ, f_ω 有表可查[10]，ρ 爲小行星同地球中心的距離。S 爲一輔助量，（見圖 3）

衛耳甘把 (R), (Q) 二式合併得[11]：

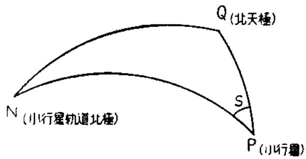

圖 3

$$\left.\begin{aligned}\cos S\cos\delta\,d\alpha+\sin S\,d\delta&=\frac{a^2\cos\varphi}{r\rho}\left[c+d\,nt+K_c\left(\cos E-\frac{e}{4}\cos 2E\right)+K_s\left(\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E\right)\right]\\-\sin S\cos\delta\,d\alpha+\cos S\,d\delta&=\frac{a}{\rho}\left[l_1\left(\cos E-e\right)+l\sin E\right]\end{aligned}\right\}\quad(S)$$

利用四個以上的觀測，可用最小二乘法（如只有四個則用代數法），解出積分常數；或再根據（Q）求出軌道改進值，再加入 $t=t_0$ 時的軌道根數(就不管積分常數了)。所得的新軌道根數叫做"平均軌道根數"（Éléments moyens），不能代表 $t=t_0$ 時的瞬時軌道。

如果要求的精確度不高，只要用（S）式的第一式；如要求高，可再用愛克爾特方法去求解[12,13]

II. 計算木星和土星的攝動和軌道改進的具體步驟

現在根據計算過程，把必需的公式和數值表整理如下：

§6. 求輔助量：

令：　M_0，ω，Ω，i，φ，n，a、e 爲小行星的軌道根數，

ω_j，Ω_j，i_j，φ_j，n_j、a_j、e_j 爲木星的軌道根數，

ω_s，Ω_s，i_s，φ_s，n_s，a_s、e_s 爲土星的軌道根數。

其中三者必須同一曆元。

用

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{I_j}{2}\sin\frac{\psi_j+\phi_j}{2}&=\sin\frac{\Omega-\Omega_j}{2}\sin\frac{i+i_j}{2}\\\sin\frac{I_j}{2}\cos\frac{\psi_j+\phi_j}{2}&=\cos\frac{\Omega-\Omega_j}{2}\sin\frac{i-i_j}{2}\\\cos\frac{I_j}{2}\sin\frac{\psi_j-\phi_j}{2}&=\sin\frac{\Omega-\Omega_j}{2}\cos\frac{i+i_j}{2}\\\cos\frac{I_j}{2}\cos\frac{\psi_j-\phi_j}{2}&=\cos\frac{\Omega-\Omega_j}{2}\cos\frac{i-i_j}{2}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

計算出木星的輔助量 I_j，ψ_j，ϕ_j，其中 $I_j/2$ 在第一象限。用下式驗算：

$$\frac{\sin\psi_j}{\sin i}=\frac{\sin\phi_j}{\sin i_j}=\frac{\sin(\Omega-\Omega_j)}{\sin I_j}\quad(2)$$

土星的輔助量 I_s，ψ_s，ϕ_s 用同樣公式計算，只要把其中的 Ω_j，i_j 改爲 Ω_s，i_s 就行了。

定義：

$$\left.\begin{array}{ll} \Pi_j = \omega - \phi_j, & \Delta_j = \Pi_j - \Pi'_j \\ \Pi'_j = \omega_j - \psi_j, & \Sigma_j = \Pi_j + \Pi'_j \\ \Pi_s = \omega - \phi_s, & \Delta_s = \Pi_s - \Pi'_s \\ \Pi'_s = \omega_s - \psi_s, & \Sigma_s = \Pi_s + \Pi'_s \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\eta = e/2, \qquad \eta' = e_j/2, \qquad \eta'' = e_s/2 \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \iota_j = \sin I_j \cos^2 \dfrac{\varphi_j}{2} & j_j^2 = \sin^2 \dfrac{I_j}{2} \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} \cos^2 \dfrac{\varphi_j}{2} \\ \iota_s = \sin I_s \cos^2 \dfrac{\varphi_s}{2} & j_s^2 = \sin^2 \dfrac{I_s}{2} \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} \cos^2 \dfrac{\varphi_s}{2} \end{array}\right\} \tag{5}$$

爲計算方便起見,可預先算出下列編號的輔助量,查出它們的正弦和餘弦。

$$\left.\begin{array}{llll} ① = \Delta_j & ⑩ = \Delta_j + \Sigma_j & ⑳ = \Delta_j + \Pi'_j & ㉚ = 2\Delta_j - 2\Pi'_j \\ ② = 2\Delta_j & ⑪ = \Delta_j - \Sigma_j & ㉑ = \Delta_j - \Pi'_j & ㉛ = 3\Delta_j - 2\Pi'_j \\ ③ = 3\Delta_j & ⑫ = 2\Delta_j + \Sigma_j & ㉒ = 2\Delta_j + \Pi'_j & ㉜ = 4\Delta_j - 2\Pi'_j \\ ④ = 4\Delta_j & ⑬ = 2\Delta_j - \Sigma_j & ㉓ = 2\Delta_j + \Pi'_j & ㉝ = 5\Delta_j - 2\Pi'_j \\ ⑤ = 5\Delta_j & ⑭ = 3\Delta_j + \Sigma_j & ㉔ = 3\Delta_j + \Pi'_j & ㉞ = 2\Delta_j - 4\Pi'_j \\ ⑥ = 6\Delta_j & ⑮ = 3\Delta_j - \Sigma_j & ㉕ = 3\Delta_j - \Pi'_j & ㉟ = 3\Delta_j - 4\Pi'_j \\ ⑦ = 7\Delta_j & ⑯ = 4\Delta_j + \Sigma_j & ㉖ = 4\Delta_j + \Pi'_j & \\ ⑧ = \Sigma_j & ⑰ = 4\Delta_j - \Sigma_j & ㉗ = 4\Delta_j - \Pi'_j & \\ ⑨ = \Pi'_j & ⑱ = 5\Delta_j + \Sigma_j & ㉘ = 5\Delta_j + \Pi'_j & \\ & ⑲ = 5\Delta_j - \Sigma_j & ㉙ = 5\Delta_j - \Pi'_j & \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} ㊱ = \Delta_s & ㊵ = \Delta_s + \Sigma_s \\ ㊲ = 2\Delta_s & ㊶ = \Delta_s + \Pi'_s \\ ㊳ = \Sigma_s & ㊷ = \Delta_s - \Pi'_s \\ ㊴ = \Pi'_s & ㊸ = 2\Delta_s + \Pi'_s \end{array}\right\} \tag{7}$$

§7. 求 l, m, n, a_0, b_0, c_0, $\bar{m}$, $\bar{n}$

首先求出微小量 w, 對木星用 w_j, 對土星用 w_s。

$$w_j = 1 - \frac{7}{2}\frac{n_j}{n}, \qquad w_s = 1 - 7\frac{n_s}{n} \tag{8}$$

對木星的量用 l_j, m_j, n_j, a_{0j}, b_{0j}, c_{0j}, $\bar{m}_j$, $\bar{n}_j$ 表示,它們的具體公式載於後面的附表 I。
對土星的量用 l_s, m_s, n_s, a_{0s}, b_{0s}, c_{0s}, $\bar{m}_s$, $\bar{n}_s$ 表示,它們的具體公式載於後面的附表 II。
求出後,把它們相加得:

$$\left.\begin{array}{llll} l = l_j + l_s, & m = m_j + m_s, & a_0 = a_{0j} + a_{0s}, & n = n_j + n_s \\ b_0 = b_{0j} + b_{0s}, & c_0 = c_{0j} + c_{0s}, & \bar{m} = \bar{m}_j + \bar{m}_s, & \bar{n} = \bar{n}_j + \bar{n}_s \end{array}\right\} \tag{9}$$

§8. 計算攝動係數 爲計算方便起見,我們把斯特隆別爾格的表整理成康敏當托夫 (Комендантов) 所給的形式[14]。因只考慮木星的攝動,故取消脚數 "j" 和 "s"。令:

$$u = 10\, w_j, \qquad u^2 = 100\, w_j^2 \tag{10}$$

根據後面的附表 III 來計算。其中表示:

$$
\left.\begin{aligned}
n\delta z &= \sum_{i,i'} R\,f[C_{i,i'}\cos(iE-i'A)+S_{i,i'}\sin(iE-i'A)]\\
2\nu &= \sum_{i,i'} S\,f'[C'_{i,i'}\cos(iE-i'A)+S'_{i,i'}\sin(iE-i'A)]\\
u/\cos i &= \sum_{i,i'} T\,f''[C''_{i,i'}\cos(iE-i'A)+S''_{i,i'}\sin(iE-i'A)]
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
R &= R_0+R_1u+R_2u^2\\
S &= S_0+S_1u+S_2u^2\\
T &= T_0+T_1u+T_2u^2
\end{aligned}
$$

R_0, R_1, R_2, S_0, S_1, S_2, T_0, T_1, T_2, 的具體數值以及 f, f', f'', $C_{i,i'}$, $C'_{i,i'}$, $C''_{i,i'}$ 的具體意義（根據前面的公式已能算出它們的數值）載於後面的附表 III 中。第一行中的數字 0−0, 1−0, 1−1, 2−1 等,表示 i, i' 的數值, 2−1 就表示 $2E-A$, 0−1 表示 $-A$。 計算時先根據 u 來計算 R（或 S, T), 再乘上同排的 f（或 f', f''), 再乘上 $C_{i,i'}$（或 $C'_{i,i'}$, $C''_{i,i'}$）卽得 $\cos(iE-i'A)$ 的係數, 算出後再把同類項（i, i' 的數值相同的項）相加（表中列在一起）卽得最後的 $\cos(iE-i'A)$ 的係數。$\sin(iE-i'A)$ 的係數的計算方法相同。

§9. 計算 $E-4A$ 項和 $2E-7E$ 項的係數

衛耳甘根據拋物線內插法的原理,先計算了三個小行星的相應於 $E-4A$ 的數值,然後再推出本羣小行星的有關數值。對 $2E-7A$ 是根據大行星理論中展開式的（$2M-7M'$）項搬來的。

1) $E-4A$ 項,只有 $n\delta z$ 和 2ν.

$$
\left.\begin{aligned}
n\delta z = {}& R_{3,0}\,\eta^3 \sin\text{④}\cos(E-4A)+R_{3,0}\,\eta^3\cos\text{④}\sin(E-4A)\\
&+R_{2,1}\,\eta^2\sin\text{③}\cos(E-4A)+R_{2,1}\,\eta^2\cos\text{③}\sin(E-4A)\\
&+R_{1,2}\,\eta\sin\text{②}\cos(E-4A)+R_{1,2}\,\eta\cos\text{②}\sin(E-4A)\\
&+R_{1,0}\,\eta\,\eta_J^2\sin\text{⑮}\cos(E-4A)+R_{1,0}\,\eta\,\eta_J^2\cos\text{⑮}\sin(E-4A)\\
&+R_{0,1}\,\eta_J^2\sin\text{⑬}\cos(E-4A)+R_{0,1}\,\eta\,\eta_J^2\cos\text{⑬}\sin(E-4A)\\[1ex]
2\nu = {}& S_{3,0}\,\eta^3\cos\text{④}\cos(E-4A)-S_{3,0}\,\eta^3\sin\text{④}\sin(E-4A)\\
&+S_{2,1}\,\eta^2\cos\text{③}\cos(E-4A)-S_{2,1}\,\eta^2\sin\text{③}\sin(E-4A)\\
&+S_{1,2}\,\eta\cos\text{②}\cos(E-4A)-S_{1,2}\,\eta\sin\text{②}\sin(E-4A)\\
&+S_{1,0}\,\eta\,\eta_J^2\cos\text{⑮}\cos(E-4A)-S_{1,0}\,\eta\,\eta_J^2\sin\text{⑮}\sin(E-4A)\\
&+S_{0,1}\,\eta_J^2\cos\text{⑬}\cos(E-4A)-S_{0,1}\,\eta_J^2\sin\text{⑬}\sin(E-4A)
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

其中 $R_{p,q}$, $S_{p,q}$ 的數值載的佘山天文年刊第 21 卷,第一分册, p. 42—44. (Annales de l'Observatoire de Zô-Sè. ToM. XXI. Fasc. I. p. 42—44)。 是按照 n 的數值給出,可根據所算小行星的平均每日運動 n 的數值,用內插法求出。

2) $2E-7A$ 項,只有 $n\delta z$.

$$
\left.\begin{aligned}
n\delta z = \frac{128''.1}{\omega_J^2}\times[{}& R'_{5,0}\,\eta^5\sin\text{⑦}\cos(2E-7A)+R'_{5,0}\,\eta^5\cos\text{⑦}\sin(2E-7A)\\
&+R'_{4,1}\,\eta^4\eta'\sin\text{⑥}\cos(2E-7A)+R'_{4,1}\,\eta^4\eta'\cos\text{⑥}\sin(2E-7A)\\
&+R'_{3,2}\,\eta^3\eta'^2\sin\text{⑤}\cos(2E-7A)+R'_{3,2}\,\eta^3\eta'^2\cos\text{⑤}\sin(2E-7A)\\
&+R'_{2,3}\,\eta^2\eta'^3\sin\text{④}\cos(2E-7A)+R'_{2,3}\,\eta^2\eta'^3\cos\text{④}\sin(2E-7A)\\
&+R'_{1,4}\,\eta\,\eta'^4\sin\text{③}\cos(2E-7A)+R'_{1,4}\,\eta\,\eta'^4\cos\text{③}\sin(2E-7A)\\
&+R'_{0,5}\,\eta'^5\sin\text{②}\cos(2E-7A)+R'_{0,5}\,\eta'^5\cos\text{②}\sin(2E-7A)
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&+R'_{3,0}\ j_*^2\eta^3 \sin \text{㉝} \cos(2E-7A)+R'_{3,0}\ j_*^2\eta^3 \cos \text{㉝} \sin(2E-7A)\\
&+R'_{2,1} j_*^2\eta^2\eta' \sin \text{㉜} \cos(2E-7A)+R'_{2,1} j_*^2\eta^2\eta' \cos \text{㉜} \sin(2E-7A)\\
&+R'_{1,2} j_*^2\eta\eta'^2 \sin \text{㉛} \cos(2E-7A)+R'_{1,2} j_*^2\eta\eta'^2 \cos \text{㉛} \sin(2E-7A)\\
&+R'_{0,3}\ j_*^2\eta'^3 \sin \text{㉚} \cos(2E-7A)+R'_{0,3}\ j_*\eta'^3 \cos \text{㉚} \sin(2E-7A)\\
&+R'_{1,0}\ \ j_*^4\eta \sin \text{㉟} \cos(2E-7A)+R'_{1,0}\ \ j_*^4\eta \cos \text{㉟} \sin(2E-7A)\\
&+R'_{0,1}\ \ j_*^4\eta' \sin \text{㉞} \cos(2E-7A)+R'_{0,1}\ \ j_*^4\eta' \cos \text{㉞} \sin(2E-7A)
\end{aligned}
$$

其中 $j_* = \sin\frac{I_j}{2}$ (見 §6), $R'_{p,q}$ 的數值載於後面的附表 IV 中。

對於 n 在 1000″ 附近的小行星, $E-4A$ 的係數較小,可以不算,對於 n 同 1047″ 相差很多的小行星 (如 $n<$ $<1000''$, 或 $n>1100''$), $2E-7A$ 的係數也很小,也可以不考慮。

根據 §8, §9 兩節的計算,把同類項合併,整理成爲 $\cos(iE-i'A)$, $\sin(iE-i'A)$ 的級數。寫成下面的形式:(以小行星 (284) 爲例)。

	$n\delta z$		$2v$		$\frac{u}{\cos i}$	
$iE-i'A$	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0−0	$-25''.667\tau$	0	$-0''.251\tau$	0	$-0''.485\tau$	0
1−0	$+2''.9$	$+21''.1$	$-6''.6$	$+2''.0$	$-2''.1$	$-1''.1$
1−0	-8.671τ	$+2.118\tau$	-2.146τ	-8.671τ	$+2.182\tau$	-3.335τ
2−0	+0.2	−1.4	+0.4	+0.6	−0.3	−0.2
2−0	$+0.480\tau$	-0.119τ	0	0	0	0
−1−1	+1.5	+3.0	+4.1	−3.0	−1.9	−1.8
0−1	+34.6	+11.1	+5.1	+4.4	+2.8	+2.6
1−1	+121.1	−5.6	+4.5	+88.6	0	+6.0
2−1	−1.7	+1.1	−0.6	+5.0	−1.0	+1.6
3−1	−0.2	+0.1	−0.2	−2.1	+0.1	−0.2
0−2	+5.2	−8.1	+22.7	−4.4	−5.6	+6.0
1−2	−61.3	−351.0	+191.9	−36.1	+4.6	−6.3
2−2	−27.8	−122.9	+157.6	−34.8	+2.8	−0.5
3−2	+2.1	+10.1	−2.2	−0.2	−0.4	−0.2
1−3	−895.3	−422.0	+57.6	−220.5	+2.2	−0.2
2−3	−379.0	−22.6	+37.8	−365.1	−12.8	−7.2
3−3	+20.8	+1.4	+6.3	+20.4	−0.1	+0.5
4−3	−1.2	+0.4	+0.1	−0.4	0	−0.1
1−4	−18.8	+14.3	+18.8	+11.7		
2−4	+36.2	−85.3	+74.8	+19.8	+3.3	−2.7
3−4	−0.5	−14.5	+18.9	−0.1	+0.3	−0.8
4−4	+1.3	+3.7	−4.1	+1.9	−0.2	0
5−4	−0.1	−0.2	+0.1	+0.1	0	0
3−5	−11.0	−3.6	+3.7	−14.5	−0.6	−0.7
4−5	+2.9	−0.5	+0.4	+4.5	+0.2	0
5−5	−0.8	+0.5	−0.7	−1.0	0	0
2−7	−4.1	+2.2				

表示:

$$
\begin{aligned}
n\delta z &= -25''.667\tau+2''.9\cos E+21''.1\sin E-8.671\tau\cos E+2''.118\tau\sin E+\cdots\\
&\quad+1''.5\cos(-E-A)+3''.0\sin(-E-A)+34''.6\cos(-E)+11''.1\sin(-E)+\cdots\\
2v &= -0''.251\tau-6''.6\cos E+2''.0\sin E-2''.146\tau\cos E-8''.671\tau\sin E+\cdots\\
&\quad+4''.1\cos(-E-A)-3''.0\sin(-E-A)+\cdots\\
u/\cos i &= -0''.485\tau-2''.1\cos E-1''.1\sin E+2''.182\tau\cos E-3''.335\tau\sin E+\cdots
\end{aligned}
$$

其中含有 τ 的項叫做長期項 (Termes séculaires), $\tau = nt$, n 爲小行星的平均每日運動,以弧度爲單位。t 爲由曆元起算的時間,以平太陽日爲單位。其餘的項叫做周期項 (Termes périodiques)。而特别對於 $(2E-7A)$ 這項叫長周期項 (Terme long-périodique), 因爲它在時間 t 增大時變化得很慢,需要很長的時間,它才能增加 2π。

§10. 求所需時刻的攝動值

計算出上面的攝動係數表以後,就利用四個以上的觀測值來作軌道改進 (即定積分常數)。先要找出四個以上的不同衛日時的觀測值,設其中一個的時刻爲 t, 位置爲 (α_0, δ_0)。

根據

$$\begin{aligned} M &= M_0 + n(t-t_0) \\ E &= M + e \sin E \end{aligned} \tag{14}$$

算出小行星在 t 時的平近點角 M 和偏近點角 E, 其中 M_0, n, M, E 均用度來作單位, t 以平太陽日作單位, t_0 爲小行星的軌道曆元, $t-t_0$ 可用二者的儒略日數來算。

再根據

$$A = M' + \mu_0 e \sin E = M' + \mu_0(E-M) \tag{15}$$

算出 A。M' 爲木星在 t 時的平近點角,可查佘山天文年刊第 19 卷第一分册,頁 136 得出,對於伏洛拉羣小行星, $\mu_0 = 2/7$。

有了 E 和 A, 按不同的 i, i', 算出 $iE-i'A$, 查出 $\cos(iE-i'A)$, $\sin(iE-i'A)$, 再乘上前面算出的相應的係數相加,而求出 $n\delta z$, 2ν, $u/\cos i$ 的值 (均以弧秒爲單位)。計算時可把長期項和周期項分開計算,算好再相加。長期項中包含了木星和土星的攝動,周期項中只有木星攝動。如果要求的精確度不高 (如只用於編製尋星用的星曆表), 攝動係數小於 3″ 的項都可以不考慮, $u/\cos i$ 可只考慮長期項。

§11. 計算加入攝動後的日心赤道直角坐標

1. 計算高斯常數 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, A, B, C.

根據小行星軌道根數 Ω, i, 以及同曆元的黃赤交角 ε, 用下列式子計算 (用對數):

$$\left.\begin{aligned} &\sin a \sin A = \cos \Omega \\ &\sin a \cos A = -\cos i \sin \Omega \\ &\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon \qquad n \sin N = \sin i \\ &\sin b \cos B = n \cos (N+\varepsilon) \qquad n \cos N = \cos \Omega \cos i \\ &\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon \qquad n > 0 \\ &\sin c \cos C = n \sin (N+\varepsilon) \\ &\qquad \cos a = \sin b \sin c \sin (B-C) \\ &\qquad \cos b = \sin c \sin a \sin (C-A) \\ &\qquad \cos c = \sin a \sin b \sin (A-B) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

算出後,用下列式子進行驗算:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2 \\ -\tan i = \frac{\sin b \sin c \sin (B-C)}{\sin a \cos A} = \frac{\cos a}{\sin a \cos A}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

2. 計算日心赤道直角坐標 (x, y, z):

根據高斯常數和小行星軌道根數 ω 和 a 用對數算出:

$$a \sin a \sin (A+\omega), \quad a \sin b \sin (B+\omega), \quad a \sin c \sin (C+\omega),$$
$$a \sin a \cos \varphi \cos (A+\omega), \quad a \sin b \cos \varphi \cos (B+\omega), \quad a \sin c \cos \varphi \cos (C+\omega),$$
$$a \sin 1'' \cos a, \quad a \sin 1'' \cos b, \quad a \sin 1'' \cos c,$$

再根據它們的數值列出 (x, y, z) 的公式:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin a \sin (A+\omega)(1+\nu)(\cos \bar{E}-e) + a \sin a \cos (A+\omega) \cos \varphi (1+\nu) \sin \bar{E} + a \sin 1'' \cos a \frac{u}{\cos i} \\ y &= a \sin b \sin (B+\omega)(1+\nu)(\cos \bar{E}-e) + a \sin b \cos (B+\omega) \cos \varphi (1+\nu) \sin \bar{E} + a \sin 1'' \cos b \frac{u}{\cos i} \\ z &= a \sin c \sin (C+\omega)(1+\nu)(\cos \bar{E}-e) + a \sin c \cos (C+\omega) \cos \varphi (1+\nu) \sin \bar{E} + a \sin 1'' \cos c \frac{u}{\cos i} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

對於時刻 t,

$$\left.\begin{aligned} \bar{M} &= M_0 + n(t-t_0) + n\delta z - \text{光行差}. \\ \bar{E} &= \bar{M} + e_0 \sin \bar{E}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ν 即爲攝動量 2ν 的一半,化作以弧度爲單位。對伏洛拉覃小行星來說,光行差 $= 0^{\circ}.0017\rho$, ρ 爲小行星到地球中心的距離,這裏可根據 M 查表[16] 得 $\log \frac{r}{a}$, 再算 r, 近似地取 $\rho = r - 1$。算出的 (x, y, z) 和 Ω, i, ω 的春分點的曆元是相同的。

§ 12. 求 $O-C$.

小行星的日心赤道直角坐標 (x, y, z) 算出後,再查天文年曆找出同一時刻的太陽的地心赤道直角坐標 (X, Y, Z)。注意二者的春分點的曆元要和觀測值 (α_0, δ_0) 的春分點的曆元相同。如果不同,則以 (α_0, δ_0) 爲準作歲差改正。可利用魯米諾夫 (Нумеров) 或杜比亞哥 (Дубяго) 的表[15]。

然後根據:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos \delta_c \cos \alpha_c &= x + X \\ \rho \cos \delta_c \sin \alpha_c &= y + Y \\ \rho \sin \delta_c &= z + Z \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

解出計算位置 (α_c, δ_c), 再同觀位置 (α_0, δ_0) 相減得 $O-C$:

$$d\alpha = \alpha_0 - \alpha_c, \qquad d\delta = \delta_0 - \delta_c \quad (21)$$

§ 13. 求積分常數

求出了 $d\alpha$, $d\delta$, 可由下式得出條件方程:

$$\left.\begin{aligned} & c + dnt + K_c\left(\cos \bar{E} - \frac{e}{4} \cos 2\bar{E}\right) + K_s\left(\sin \bar{E} - \frac{e}{4} \sin 2\bar{E}\right) = \frac{\rho r}{a^2 \cos \varphi} [\cos S \cos \delta \, d\alpha + \sin S \, d\delta] \\ & l_1(\cos \bar{E}-e) + l \sin \bar{E} = \frac{\rho}{a} [-\sin S \cos \delta \, d\alpha + \cos S \, d\delta] \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

其中, S, r, ρ 的計算如下:

$$\left.\begin{aligned} \sin S &= \sin c \cos (\alpha_c - \Omega_1), \quad S \text{ 在第 I 或 IV 象限} \\ r &= a(1+\nu)(1-e \cos \bar{E}) \\ \rho &= (z+Z) / \sin \delta_c \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

其中 Ω_1 爲小行星軌道對天赤道的升交點的黃經,可用下式計算: