数学教育

中学几何教学论

马忠林　张贵新　编著

东北师范大学出版社

数 学 教 育

中学几何教学论

马忠林　张贵新　编著

东北师范大学出版社

数学教育

中学几何数学论

马忠林　张贵新　编著

东北师范大学出版社出版

（长春市斯大林大街110号）

吉林省新华书店发行

长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：9.375　字数：240千

1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷

印数：1—4000册

ISBN 7-5602-0025-7/G·5

统一书号：7334·55（压膜）定价：2.00元

前　言

几何教学是数学教学中的重要组成部分，尤其在中学数学教育中占有重要地位。几何教育对中学生的训练是多方面的、综合性的，对于培养学生的智力，发展学生的能力具有重要意义。因此，搞好几何教育是时代的要求，是实现教育面向现代化、面向世界、面向未来的需要。

中学几何教学论是探索几何教育规律，研究几何教育的现状与改革，既要对几何教学作一般论述，又要针对学生实际揭示几何教学方法。但几何教学论究竟包括哪些内容，尚需认真研究。

我们撰写的《中学几何教学论》共分为四篇：第一篇，对几何教育作了综合阐述，主要简略叙述了几何、几何教育的产生与发展，几何教育的特点，几何学习中的思维形式及教学的基本任务；第二篇，阐述了平面几何中的直线形、比例线段、相似形、圆的教学方法，并有针对性地分析了学生学习中的困难；第三篇，阐述了立体几何中的直线和平面，多面体和旋转体的教学方法，并分析了学生学习中遇到的典型问题，指出立体几何教学的改革途径；第四篇，阐述了平面解析几何中的直线、圆锥曲线及参数方程的教学方法，并简略地叙述了平面解析几何的基本思想与教学特点。

教学有法，但无定法。我们所提及的教学方法和学习方法不是固定模式，但尽量是教学实践中体会最深且有代表性的方

法。

我们对几何教学的认识尚为肤浅，在数学教育改革不断深入的形势下愿抛砖引玉，以起到互相学习，博采众家之长、补己之短的作用。

本书由东北师范大学教育研究所葛淑芬同志绘制了所有图形，在此表示感谢。

由于水平所限，加之时间仓促，不足之处乃至错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编著者

1987年5月于长春

目　　录

第一篇　几何教育的一般知识

第二篇　平面几何的教学

第三篇　立体几何的教学

第四篇　平面解析几何的教学

第一篇

几何教育的一般知识

本编试对几何、几何教育的产生与发展，几何教育的特点，几何学习中的思维形式，中学几何课的教学任务做综合的阐述。使读者对几何教育形成系统、全面的认识。

第一章　几何教育历史概述

§1.1　几何学的诞生

恩格斯在《反杜林论》中用下面的话揭示数学的起源：“数学是从人的需要中产生的，是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。”

“几何”（几何学）一词，拉丁文是 geometria，来自希腊文γεωμετρia，是由γε′α（土地），μετρεiv（测量）二字合成，原是土地测量的意思，可见几何学来源于农业生产的需要。日本中村正直（1832—1891）在《几何学序》（1873）中记载：“几何者，问多少之义。算学者，则亦当用此字。何独察物形之学，而称几何耶？英国艾约瑟先生，偶见访吾庐，语次及此。先生曰：希腊语GEO者地也，几何音仿佛GEO，盖或由是用此字也，余疑始解”。

由此，我们不难追溯几何学的起源。世界上最古老的几个国家都位于大河流域：黄河流域的中国，尼罗河的埃及，幼发拉底河与底格里斯河的巴比伦，印度河与恒河的印度。因为无论是人类、动物或植物的生长水是最重要的，所以这些国家首先发展了农业，也首先产生、发展了几何学。

位于埃及的尼罗河，发源于非洲内地。雨期一到，大量的洪水流出，其下游泛滥成灾，大批良田被淹没，从事耕种的劳动人民，虽然日出而作，日入方息，也要蒙受这种损失。因为他们耕种的土地，是国王以同样大小的正方形分配给他们的，并且每年都要向国王缴纳租金。为了计算租金的数量，洪水退后，要重新准确地测量土地，几何学就是这样在计算和测量中产生的。

在当时，埃及的人们首先发现了："如果按照三条边长之比为3:4:5，则边长为5的边所对之角为直角"。他们利用这种经验就能在地面上画直角等等。遗憾的是埃及人没有把这些经验集中起来，以至形成系统的知识。而把这些经验推广，解决实际问题的却是与埃及隔海相望的古希腊人。例如：在公元前5、6世纪，古希腊的太列斯（Thales约公元前640—前546年）、毕达哥拉斯（Pythagoras 约公元前580—前501年）他们在年青的时候都到过埃及，去学习埃及人们所获得的经验。太列斯不仅学习埃及人的知识，而且试图把这些零散的知识系统化，寻求这些知识间的关系。他最早地揭示了我们现在几何学中的定理。

"对顶角相等"。

"二边相等的三角形，二个底角相等"。

"一个角和夹这个角的二边对应相等时，则这二个三角形全等"等等。

由于太列斯努力整理劳动人民中的零散知识，使其条理清晰，根据充分，是使"几何"纳入科学轨道的重要步骤。有人称太列斯为第一位几何学家。

太列斯也力图把以上的定理用于实际，他在埃及时，就应用两个等角三角形对应边成比例的定理，测出金字塔的高度，使埃及法老阿美西斯（Amasis 二十六王朝）大为惊讶．应用两三角形的两角夹边对应相等，则三角形全等的定理，测定船离岸的远近．由于把几何理论应用于实际，使之发挥了惊人的作用．蕴含了几何应具有的强大生命力，逐步引起了数学家的重视，如：毕达哥拉斯企图用数来解释一切．不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数．当他发现“勾股定理”的时候，其欢欣之情不可言状，传说他宰了一百头牛，以示庆贺，故亦称“百牛定理”．他们证明了平面可用正三角形、正方形或正六边形填满，空间可用立方体填满，又知道正四面体，六面体，八面体和二十面体，并用这四种正多面体来表示火、风、土、水“四大元素”．后来又发现了正十二面体，但没有相应的第五种元素，于是就用来代表宇宙全体．

在漫长的历史岁月中，“几何”经历了多个朝代，延续于各国之中，使其不断发展、完善．由最初萌芽于埃及等国，以后又移植于爱奥尼亚，其次繁盛于意大利和雅典，在东方的中国、印度又有新的发现，渐具富丽之姿，经过一番新的培植，达到了丰茂成林的境地．

从公元前 4 世纪到公元 641 年，约千年间，几何开始脱离了哲学而独立，从用实验和观察以建立起自己结果的经验科学，过渡为演绎的科学．从不多的几个原始命题（公理）出发，作为逻辑推理而得到需要的结论．从而通过公理的建立，使几何迈入高度抽象化的境地．

公元前 3 世纪，大数学家欧几里得（Euclid 约公元前 330—前295）开始全面地总结前人的知识，勤于著书立说，他写过不少数学、物理著作．而最重要的是他的巨著《几何原本》，集中了当时数学工作的精华，用逻辑的观点使几何系统化、严谨化．

它标志着“几何学”真正降临人间。从来没有一本科学书籍，象《几何原本》那样巩固而长期地成为广大学生所传诵的读物，1482年到19世纪末，《几何原本》的印刷本竟用各种文字出了一千版以上。在这以前，它的手抄本几何学也已达1800年之久。欧几里得几何的影响如此深远，以致欧几里得和“几何学”变成了同义语。

《几何原本》的特点在于它是用公理法最早建立起演绎的数学体系的典范。它的基本思想是从较少的基本假定（定义、公理、公设）开始，推导出尽可能多的命题，尤其对平行公理的处理，是特别出色的。

《几何原本》共13卷。第1卷的主要内容是：三角形相等的条件，边角关系，平行线理论，三角形和多边形等积的条件；第2卷的主要内容是：三角形变成等积的正方形；第3卷的主要内容是：圆；第4卷的主要内容是：内接和外切多边形；第6卷的主要内容是：相似形；第11、12、13卷的主要内容是：立体几何；第5、7、8、9、10卷的主要内容是比例和算术。目前中学初等几何内容基本是被包括于《几何原本》之中。

欧几里得《几何原本》的巨大历史意义还在于：在公理法的基础上，逻辑地创造几何学作了首次尝试，即：

（1）欧几里得创造性地建立了几何学的体系。按照先摆出所用公理，明确提出所用的定义，由浅入深地揭示一系列定理的方法。这样编排符合人们的认识规律。所以，一直被人们所沿用。

（2）在《几何原本》中，对公理的选择是很出色的，使得用一小批公理证出几百个定理。其中，有很多是深奥的。尤其对平行公理的处理更显得高明。在定理的取舍方面，《几何原本》的著者是费尽心机的，例如：在书中没有列入三角形三个高交于一点的定理。

（3）《几何原本》系统地体现了逻辑证明，强调逻辑证明

是确立数学命题真实性的一个根本方法，从而把几何作为演绎系统建立起来，使几何从经验知识升华为理论知识，真正意义的几何科学从此诞生，并相对独立地得到发展。

（4）在《几何原本》中，示范地规定了几何证明的方法，即：分析法、综合法及归谬法。有的证明相当精练，有独到之处。

（5）《几何原本》是一部初等数学的基础教材，两千年来一直被人沿用、对数学教育产生了深远的影响。

但是，从现代公理法观点来分析，《几何原本》在定义、公设、公理方面和作为公理法的体系方面都存在一定的缺欠。即：

（1）定义方面：

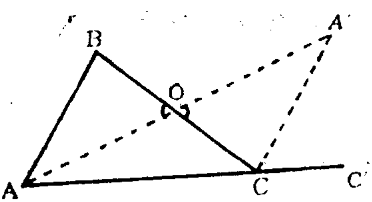
① 欧几里得对《原本》里的所有概念试图都下定义，这种想法是好的，但对一切概念都下定义是办不到的。

② 有些定义的含意是模糊不清的，如定义直线是："关于它的任何点一样地放置着的。"其含义可做任意解释。因为圆也可以说是"关于它上面的任何点一样地放置着的。"

③ 有些定义实际上是没有任何价值的，它们没有起定义的作用。如定义：点是没有部分的等等。在以后的演绎中根本没有用到，因此没有定义的必要。

（2）公理方面：

① 《几何原本》中的公理（包括公设）是不完全的，它缺少运动公理、连续公理和顺序公理。因此，进行论证时不得不求助于直观。



（图1—1）

我们举一个例子，如（图1—1）证明△ABC的外角∠BCC′大于不相邻的一内角∠B，《几何原本》的证法是：取

BC的中点O，连AO并延长到A′，使OA′=OA，易证：

$$\triangle AOB \cong \triangle A'OC,$$

从而得∠B=∠A′CO<∠BCC′。问题在于最后一步默认∠A′CO是∠BCC′的部分，也就是直观上认为A′在∠BCC′的内部。

事实上，要证明以上默认的事实，《几何原本》的公理是不够用的，必须补充以后增加的公理。

② 个别的公理是不必要的，例如："凡直角皆相等"是可以从其它公理和定理中推导出来的。

由上述，可知欧几里得《几何原本》的缺欠，在于其公理系统的不完备性与不独立性，在两千多年来，只有个别人注意到不完备性，如阿基米德曾提出连续公理问题，但总的说来，仍停留在《原本》的水平，而在历史上却从另一条路，所谓"第五公设"的研究，导致非欧几何的产生.从此,开始对公理的独立性、完备性等的研究。

在此也应该指出希腊几何学的思想和柏拉图（Plato 约公元前430—前349）"理想国"的思想是一致的，柏拉图主张："几何学不是应用于测量的学问，而是具有严密系统的理论"。他把理论和实际割裂开来、鄙视实践。往往把与生产实际直接联系的知识叫做"奴隶的数学"。使得整个《几何原本》中很难找到一个解决实际问题的内容，基本上全部是抽象的定义、公理和定理。《几何原本》问世后，不是立刻引起人们的注意，直到第五世纪，许多数学工作者对它进行了大量注释和评论。到了罗马帝国时期，由于罗马统治者关心的廉价的奴隶劳动以及适应这种劳动的科学技术，《几何原本》仍没有受到重视。公元六世纪，《几何原本》传到印度，印度学者对它也不感兴趣。到了公元九世纪以后，学术中心转移到阿拉伯，《几何原本》才得到重视，引起很多学者的研究。尤其是对三个著名作图问题研究，虽然证明出

三大问题是不能用尺规解决，然而、却使人们闯入了新的数学领域。激发了圆锥曲线，三、四次代数曲线及“割圆曲线”的发现，为发展成高等几何奠定了基础。

所谓三个著名问题是希腊诡辩学派在公元前五世纪左右提出来的，其内容是：

（1）位立方体：求作一立方体，使其体积是一已知立方体的二倍。

（2）三等分角：把一个任意角分为三个相等的部分。

（3）化圆为方：作一正方形，使其与一给定的圆面积相等。

这三个问题的重要性在于：虽然用直尺和圆规这二种工具能够成功地解决那么多其它作图问题，可是，直到19世纪，即距第一次提出三大问题的两千年之后，才证明出用直尺和圆规求解的不可能性。关键是在这两千多年的探索、研究中，引出了大量的发现，推动几何学的发展。

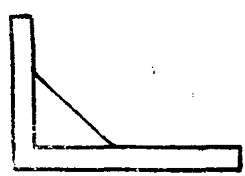
至到现在，国内、外个别杂志和中学教师还宣传任意角三等分问题等是尚未解决的难题，使得不少学生为这个问题耗去不少精力。最近我国著名教授苏步青告诫数学爱好者，指出：“初等几何作图法”是指在下列两条件之下使用圆规与直尺的作图法，①圆规只能做画圆之用，不许用作分度计或作量长度之用；②直尺只能做连接两点的直线之用；如果没有上述两条件，任意角的三等分当然是可能的。据我所知，三等分法有几十种之多。有了上述两个条件，任意角三等分是不可能的”。

§1.2我国几何教育的开创与发展

中国是数学起源最早的国家之一，我们的祖先在远古时代对图形以及绘制图形的工具就有所发现和运用，大约在六、七千年前，黄河流域等地区已经有了农业、畜牧业、绘制造采陶，加工石器．发掘出来的陶器已有各种几何图案．就是数学教育设施的创立也早于其他国家．其教育的历史大致可分为三个时期，即古代数学教育时期，主要是我国封建时代的数学教育，自春秋战国以来至鸦片战争前夕（公元1840年前）；近代数学教育时期，这个时期可分两个阶段，第一阶段自鸦片战争至五四运动以前，即（1840—1919年），第二阶段自五四运动至全国解放（1919—1949年）；现代数学教育时期，自1949年至今．几何教育是数学教育的重要组成部分，它的开创和发展贯穿于数学教育的始终．不仿几何教育也按此分期．

一、几何学的萌芽与几何教育的开创

据我国上古时期①最早的数学记述：（一）结绳，（二）规矩，（三）记数法．规就是圆规，甲骨文已有规这个字．矩由长短两尺合成，相交成直角．尺上有刻度，短尺叫勾，长尺叫股．有时为坚固起见，在两者之间



（图1—2）

① 上古时期一般指公元前2491年～前100年

还连上一条杆（图1—2）。矩的使用，是我国古代数学的特长，它不但可以用来画直线，作直角，而且可以测量。甲骨文也有矩字，可见起源很早，甚至可以推到传说中的大禹治水（公元前1889年）。《史记》卷二《夏本纪》记载禹治水时："左准绳，右规矩"。《周髀算经》（写于约公元前100年）里有："故禹之所以治天下者，此数之所生也"赵爽注："禹治洪水，……望山川之形，定高下之势，……乃勾股之所由生也"。意即：禹治洪水，必定要先测量地势的高低，因此要用到勾股的道理。从此看出，在上古时代，我国劳动人民，在长期的劳动实践中，已能反复使用规矩绘制出各种几何图形，并对几何有了一定认识。"合矩以为方"是用两个矩结合起来，可画成大小不同的方形；"环矩为圆"是在一线段上，使直角三角形直角顶点移动（轨迹）而形成圆形。在商代（约公元前1500年）的白陶器图案，大半是几何图案。

我国的《墨经》在几何学的论述上，可与古希腊的欧几里得《几何原本》媲美。其中对平行线、圆、（或球）、平面，……都有创见。

中国古代的几何教育伴随着数学教育的建立而产生，在古代书籍上曾有记载。《前汉书》记有周代教育制度说："八岁入小学、学六甲，五方计算之事"。《周礼》记曰："保氏……养国子以道，乃教之六艺"（六艺是礼、乐、射、驭、书、数）。最后一项的数即是数学。据后人注释"数"包含有方田、粟米、差分、少广…等等。《九章算术》② 的出现是以前数学内容的总结，而此书出现后又影响了以后一千多年的数学教学和数学研究。三国时代数学家刘徽说："幼习九章，长再详览"。《九章算术》一书中《方田》、《少广》、《商功》等章都充分地体现了古代的几何内容。

② 《九章算术》成书时间大约在公元50年到100年，钱宝琮：《中国数学史》p33