運算微積手冊

В. А. ДИТКИН
П. И. КУЗНЕЦОВ

科学出版社

运算微积手册

В. А. ДИТКИН
П. И. КУЗНЕЦОВ 著
張 燮 譯

科学出版社
1958年

В. А. ДИТКИН и П. И. КУЗНЕЦОВ
СПРАВОЧНИК
ПО ОПЕРАЦИОННОМУ
ИСЧИСЛЕНИЮ
Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы
Москва 1951 Ленинград

內 容 提 要

本書包括运算微积工具的基本叙述与算子的数值表．第一部分專講运算微积的基础，主要取材于 В. А. 狄特金的論文[1]．第二部分是运算微积的公式表（共有 1354 个公式）．在作这个表时，利用了本書中的参考文献[2, 3, 4]各書以及發表在期刊文献中的著作．本書所載的某些結果，还是初次發表．

本書可供科学工作者、研究生、工程师以及高等学校師生參考之用．

運算微积手册

В. А. ДИТКИН 等著
張　　　燮　譯

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街 117 号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1958 年 3 月第 一 版　　書号：1082　字数：194,000
1959 年 11 月第四次印刷　　開本：787×1092 1/25
（京）6,070—7,269　　印張：10 2/25
定价：(10) 1.60 元

目　录

第一部分

运算微积的基本

§1. 引論

在前一世紀的中叶，出現了許多著作，它們是講符号計算或者运算微积以及它在微分方程的解法中的应用的. 特别要指出的，是俄国数学家瓦先柯-查哈尔千柯的著作 (Ващенко-Захарченко [5]). 他的著作出版于1862年，在当时是非常著名的. 在該書中，作者詳細地叙述了符号計算法，而且指出如何用这种方法来解綫性微分方程——不仅是具有常系数的，而且具有变量系数的方程——此外还用了符号計算法来解偏微分方程. 通常所謂的赫維賽德 (Heaviside) 分解法公式，在瓦先柯-查哈尔千柯的書[5, 第12頁]中也有:

$$f^{-1}(D)=\frac{1}{f'(\alpha_1)}(D-\alpha_1)^{-1}+\frac{1}{f'(\alpha_2)}(D-\alpha_2)^{-1}+$$
$$+\cdots+\frac{1}{f'(\alpha_n)}(D-\alpha_n)^{-1},$$

其中 α 是方程 $f(x)=0$ 的根. 此外，还載出了具有重根的情形的公式.

瓦先柯-查哈尔千柯很有系統地研究了符号計算的方法. 这里我們不能詳述这个著作的內容，而仅仅列出各章的名称如下: "符号及其性質"，"常系数綫性微分方程的积分法"，"变系数綫性微分方程的积分法"，"綫性微分方程的双对性"，"綫性偏微分方程的积分法"及"具有变量系数的偏微分方程的积分法".

莫斯科数学会的創立者之一列特尼可夫 (А. В. Летников) 發展了分数微分法的理論[6]，并將它用来解微分方程.

克雷洛夫[7] (А. Н. Крылов) 利用与近代运算微积有关的方法解决

了数学物理的問題.

到了今日,不論在分析学的理論問題里,还是在电机,力学,自动控制等等部門內,运算微积以及与它相关的富利叶变换和拉普拉斯变换都占有極为重要的地位.

苏联的学者克魯格[8,13](К. А. Круг),尤里也夫[9](М. Ю. Юрьев),爱弗若斯与但尼列夫斯基[10](А. М. Эфрос и А. М. Данилевский),叶弗江諾夫[12](С. И. Евтянов),里可夫[14](А. В. Лыков),布尔加可夫[15](Б. В. Булгаков),康托若維契[16](М. И. Конторович),盧利叶[11,17](А. И. Лурье)等人,在他們的著作中相当完备地說明了运算微积的巨大的可能性,指出了它的非常广泛的通用性,而且在很大的程度內促进了运算微积在广大的科学技术界中的普及.

运算微积的应用虽然如此的广泛,但作为一門独立的数学学科而言,它却一直到不久以前还沒有完全形成. 这种情形的理由是:主要研究运算微积的是这种人,对于他們而言,运算微积虽然重要,但仅仅是一种輔助的工具.

近年来运算微积的方法有相当的改变,到了今日,运算微积在本質上与算子理論毫無关系地發展着. 必須指出:在上列各种运算微积的教程中,沒有一个教程說明了算子的定义区的概念,而沒有这种概念便不能严格地建立运算微积的算子叙述,并且在許多情形下,都可以使作者們得出不正确的結論.

符号計算的方法,在上一世紀中叶便已經作出来了. 在該世紀末时,赫維賽德[18]利用这种方法解决了某些与电机工程有关的問題. 这种方法叙述如下:將方程

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^{i+k} u(x,\ t)}{\partial t^i \partial x^k} = 0 \tag{1.1}$$

中关于时間 t 的微分运算代以字母 p,于是方程便可以写成

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, p^i\ \frac{d^k u}{dx^k} = 0\ . \tag{1.2}$$

將此式看作关于变数 x 的常微分方程,其中包含参数 p. 解出这个方

程，而得

$$u(x;t)=F(x;p)\eta(t),$$

其中 $\eta(t)$ 是單位函数，也就是説，

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & 当\ t>0,\\ 0, & 当\ t<0.\end{cases}$$

这里的 $F(x;p)$ 是方程(1.2)的解，它看作算子 p 与参数 x 的函数，而 $u(x, t)=F(x;p)\eta(t)$ 是將單位函数 $\eta(t)$ 施以算子 $F(x;p)$ 所得的結果.

算子在單位函数上的值，用下面的方法来計算：

$$\frac{1}{p}\eta=\int_0^t dt=t,\quad \frac{1}{p^2}\eta=\frac{t^2}{2},\quad \cdots,\quad \frac{1}{p^n}\eta=\frac{t^n}{n!}.$$

然后

$$\frac{1}{p-a}\eta=\left(1+\frac{a}{p}+\frac{a^2}{p^2}+\cdots\right)\eta=1+at+\frac{(at)^2}{2!}+\cdots=e^{at}.$$

由此便易于找出算子 $\frac{1}{(p-a)^n}\eta$ 的值. 当 $H(p)$ 是有理分式时，可以用部分分式的分解法来計算 $H(p)\eta$ 的值. 最后，当 $H(p)$ 是遜純函数时，有时可以用求極限的手續来計算 $H(p)\eta$ 的值. 微分算子的形式求逆法，自然会引起許多不肯定的感覺，而且使得运算微积在应用上不够明朗.

运算微积的严格基础的建立开始得相当晚，这是当人們建立了拉普拉斯的函数变換 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 与符号算法的关系时才开始的.事实証明，在拉普拉斯变換下，微分算子化为一个乘以复变数 p 的乘法算子. 由此即知，倘若在微分方程(1.1)中，將 $u(x, t)$ 代以

$$\bar{u}(x, p)=\int_0^\infty u(x, t)e^{-pt}dt,$$

那么这个方程便化为未知函数 $\bar{u}$ 的常微分方程，原因是方程中关于变数 t 的导数成为因子 p^i. 利用熟知的黎曼-梅林(Riemann-Mellin)积分[19, 202 頁]可以由函数 $\bar{u}(x, p)$ 轉回到 $u(x, t)$.

正是利用这种方法，即本質上利用圍綫积分的方法，將运算微积作了进一步的發展，使得字母 p 不仅代表算子 $\frac{\partial}{\partial t}$，而且也代表复数 p——变换以后所得到的函数的变数．但随着运算微积的这种發展，旧有的符号計算法也重新建立了起来．事实是这样，由于积分方程論的發展，导出了綫性算子的一般理論，其中广泛地解釋了“算子函数”．精确地說，我們建立了对应的原理，使得某函数族与某算子类之間有对应关系，在此种关系下，每取所論的函数族中的一个函数 $F(\lambda)$，便有一个相应的算子 $F(A)$，而且单位函数 $F(\lambda)=1$ 对应于單位算子 E，而函数 $F(\lambda)=\lambda$ 对应于算子 A．

严格說来，这里講的是某算子类与某函数类的同構性，在此种同構性之下，單位函数对应于單位算子，函数 $F(\lambda)=\lambda$ 对应于算子 A 本身，又函数的和 $F_1(\lambda)+F_2(\lambda)$ 与积 $F_1(\lambda)F_2(\lambda)$ 对应于相应算子的和与积．运算微积也可以用这种普遍的观点来考虑 [20]．由拉普拉斯变换，使得函数集与算子集之間实現了对应关系，而根据这种对应性，完全有可能建立符号算法的严格基础．我們对于运算微积便遵循这种途徑，原因是現在算子的理論不仅已經广泛地应用于数学中，而且应用到物理学中，因而运算微积用算子的方式来推演是很自然的事．

§2. 拉普拉斯积分

我們用 $f(t)$ 代表实变数 t 的函数 $(0\leqslant t<+\infty)$，并設 $f(t)$ 在任何区間 $(0, A)$ 内都是勒貝格可积的．設 $p=\sigma+i\tau$ 为复变数．則表达式

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{2.1}$$

称为拉普拉斯积分，而函数 $F(p)$ 称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换．

拉普拉斯积分的主要性質如下．

1°．倘若积分 (2.1) 在某点 p_0 处收斂，那么它在所有满足条件 $\operatorname{Re}(p-p_0)>0$ 的点 p 处都收斂．

事实上，設

$$\varphi(t)=\int_0^t f(u)e^{-p_0u}du.$$

则因 $\sup\limits_{0<t<\infty}|\varphi(t)|=M<\infty$，故由等式

$$\int_0^A f(t)e^{-pt}dt=\varphi(A)e^{-(p-p_0)A}+(p-p_0)\int_0^A\varphi(t)e^{-(p-p_0)t}dt$$

便显然可以推出性質 1°.

这样，对于拉普拉斯积分而言，便有三种可能的情形：

1）积分到处發散.

2）积分到处收斂.

3）存在着如此的数 σ_c，使得当 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_c$ 时，积分收斂，而当 $\mathrm{Re}(p)<\sigma_c$ 时，积分發散.

在复数平面上，直綫 $\mathrm{Re}(p)=\sigma_c$ 叫做积分(2.1)的收斂軸，而数 σ_c 叫做积分(2.1)的收斂横标.

2°. 倘若积分(2.1)在一点 $p_0=\sigma_0+i\tau_0$ 絕对收斂，那么它在半平面 $\mathrm{Re}(p)\geqslant\sigma_0$ 內絕对一致收斂. 和前面一样，我們也可以定义絕对收斂軸 $\mathrm{Re}(p)=\sigma_a$ 与絕对收斂横标 σ_a. 此时显然有 $\sigma_a\geqslant\sigma_c$，而且不难作出 $\sigma_a>\sigma_c$ 的例子来.

3°. 設积分(2.1)在一点 $p_0=\sigma_0+i\tau_0$ 收斂，并設 $Q\geqslant0$ 与 $k\geqslant1$ 为某些常数，那么在由不等式

$$|p-p_0|\leqslant k(\sigma-\sigma_0)e^{Q(\sigma-\sigma_0)}\ (\sigma\geqslant\sigma_0)$$

所决定的区域 $\varDelta$ 內，积分一致收斂.

由 1° 可知，积分 (2.1) 在区域 $\varDelta$ 內收斂. 設 $\varepsilon>0$，$\varphi(t)=\int_0^t f(u)e^{-p_0u}du$，而 $A_0>Q$ 是如此的数，使得当 $t>A_0$，$t'>A_0$ 时，$|\varphi(t)-\varphi(t')|<\dfrac{\varepsilon}{k}$. 那么对于 $\sigma>\sigma_0$ 而言，卽有

$$\int_A^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_A^\infty e^{-(p-p_0)t}d[\varphi(t)-\varphi(A)]=$$

$$=(p-p_0)\int_A^\infty e^{-(p-p_0)t}[\varphi(t)-\varphi(A)]dt,$$

从而当 $A>A_0$ 时，

$$\left|\int_A^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}\,\frac{|p-p_0|}{\sigma-\sigma_0}\,e^{-(\sigma-\sigma_0)A}.$$

因此，如果 $p\neq p_0$ 屬于区域 Δ，那么

$$\left|\int_A^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt\right| \leqslant \varepsilon e^{-(\sigma-\sigma_0)(A-Q)} \leqslant \varepsilon.$$

倘若 $p=p_0$，則

$$\left|\int_A^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt\right| = \lim_{B\to+\infty}|\varphi(B)-\varphi(A)| \leqslant \varepsilon.$$

这样便証明了性質 3°.

注. 由不等式 $|p-p_0|\leqslant k(\sigma-\sigma_0)$ 所决定的区域显然屬于 Δ. 这个区域是平面上通过 p_0 点的兩个直綫所夾的部分.

倘若 $f(t)$ 仅仅在有限区間上不等于零，那么 $F(p)=\int_a^b f(t)\,e^{-pt}\,dt$ 显然是全整函数，而且

$$\frac{d^k}{dp^k}F(p)=\int_a^b(-t)^k f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

4°. 設 $\sigma_c<\infty$，則在半平面 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_c$ 內每点处，积分(2.1)代表变数 p 的解析函数，而且

$$F^{(k)}(p)=\frac{d^k}{dp^k}F(p)=\int_0^\infty(-t)^k f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

事实上，倘若 p 在上述半平面內，那么由 3° 可知，我們可以將 p 点圍在一个圓內，使这个圓完全屬于所論的半平面，而且积分(2.1)在此圓內一致收斂，从而級数

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

也一致收斂. 但这个級数的每項都是全整函数，故由著名的維尔斯特拉斯定理[21，第六章]可知，$F(p)$ 在上述圓內为解析函数，而且

$$F^{(k)}(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}(-t)^k f(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty(-t)^k f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

5°. 設 $F_1(p)$，$F_2(p)$ 为函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 的拉普拉斯变换. 倘若在一点 p_0 处，兩个拉普拉斯积分都收斂，而且

$$F_1(p_0+nl)=F_2(p_0+nl),$$

其中 $l>0$ 是常数，而 $n=0, 1, 2, \cdots$，那么殆遍成立着

$$f_1(t)=f_2(t).$$

由此种性質可知，根据拉普拉斯变换 $F(p)$ 可以唯一决定函数 $f(t)$，准确到測度为零的点集为止。

欲証 5°，只須証明一点即可：倘若

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-(p_0+nl)t}\, dt=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

那么 $f(t)=0$ 殆遍成立。

設 $\varphi(t)=\int_0^t f(u)\, e^{-p_0u} du$，則 $\varphi(t)$ 显然是連續函数，而且 $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=0$。此外，当 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时，$\int_0^\infty e^{-nlt}\, d\varphi(t)=0$，用部分积分法可得：

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-nlt}\, dt=0.$$

令 $x=e^{-lt}$，并記 $\varphi(-l^{-1}\ln x)=\psi(x)$，則上式可以写成

$$\int_0^1 \psi(x) x^{n-1} dx=0,$$

当 $n=1,2,3,\cdots$ 时。但函数 $\psi(x)$ 在閉区間 $[0, 1]$ 上連續，故由系統 $\{1; x; x^2; \cdots\}$ 的完备性可知，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\psi(x)\equiv 0$；于是 $\int_0^t f(u)\, e^{-p_0u} du= =0$ 对于一切 $t>0$ 都成立，所以 $f(u)=0$ 必定殆遍成立。

6°. 設积分 (2.1) 在一点 $p_0=\sigma_0+i\tau_0\,(\sigma_0>0)$ 处收斂，則

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}\int_0^t f(u)\, du=0$，也就是說，当 $t\to\infty$ 时，$\int_0^t f(u)\, du=o(e^{\sigma_0 t})$。

事实上，倘若保留前面的記号(参看 3° 的証明)，則有

$$\int_0^t f(u)\, du=-\int_0^t e^{p_0u}\, du[\varphi(t)-\varphi(u)]=$$

$$=\varphi(t)+p_0\int_0^{A_0}[\varphi(t)-\varphi(u)]\, e^{p_0u}\, du+p_0\int_{A_0}^t[\varphi(t)-\varphi(u)]\, e^{p_0u}\, du;$$

由此即得

$$\left|\int_0^t f(u)\, du\right|\leqslant \text{const}+|p_0|\cdot\varepsilon\int_{A_0}^t e^{\sigma_0 u}\, du=\text{const}+\varepsilon\frac{|p_0|}{\sigma_0}(e^{\sigma_0 t}-e^{\sigma_0 A_0}).$$

但 $\varepsilon>0$ 任意小，所以 6° 成立。

7°. 假設 a) $f(t)$ 有下界，也就是說，有如此的正数 C 存在，使得对于一切 $t\geqslant 0$ 而言，都成立着 $f(t)>-C$；

b) 下列兩个極限有一个存在：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt \quad 或者 \quad \lim_{\sigma\to\infty}\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt=\lim_{\sigma\to\infty}\sigma F(\sigma).$$

那么另一个極限也存在，而且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt=\lim_{\sigma\to\infty}\sigma F(\sigma).$$

8°. 假設 a) $f(t)$ 有下界；

b) 下列兩个極限有一个存在：

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt \quad 或者 \quad \lim_{\sigma\to 0}\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt=\lim_{\sigma\to 0}\sigma F(\sigma).$$

那么另一个極限也存在，而且

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)\,dt=\lim_{\sigma\to 0}\sigma F(\sigma).$$

后面兩种性質可以由陶伯尔定理(тауберовская теорема)的一般理論推导出来[22, 第二章]。

用 S 代表实变数 $t\geqslant 0$ 的所有这种函数的集合，它們的拉普拉斯积分存在。則当 $f(t)$ 屬于 S 时，积分

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{2.1}$$

在半平面 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_c$ 内收斂。收斂横标 σ_c 与函数 $f(t)$ 的选擇有关。

欲使 $f(t)$ 屬于 S 集，其必要与充分条件为：对于某个 $\sigma_0>0$ 而言，当 $t\to\infty$ 时

$$f_1(t)=\int_0^t f(u)\,du=o(e^{\sigma_0 t}), \tag{2.2}$$

也就是

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\sigma_0 t}\int_0^t f(u)\,du=0.$$

这个条件的必要性，在拉普拉斯积分的性質 6° 中已經証明了．而它的充分性由下面的等式推出：

$$\int_0^A f(t)\,e^{-pt}dt=f_1(A)\,e^{-pA}+p\int_0^A f_1(t)\,e^{-pt}dt.$$

事実上，当 $A\to\infty$ 与 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_0$ 时，由上式可以推出积分的收斂性，原因是

$$\int_0^\infty f_1(t)\,e^{-pt}dt$$

收斂，而当 $A\to\infty$ 时，$f_1(A)\,e^{-pA}\to 0$.

像我們已經指出的，拉普拉斯变換唯一地决定 $f(t)$（决定到測度为零的集）．現在轉而研究这种問題：倘若 $F(p)$ 已知，如何求 $f(t)$．

定理 1．倘若积分 (2.1) 具有收斂横标 $\sigma_c<\infty$，那么便存在着

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}F(p)\frac{e^{pt}}{p}dp=\begin{cases}\int_0^t f(u)\,du, & \text{当 } t>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t<0 \text{ 时，其中 } \gamma>\sigma_c,\gamma>0.\end{cases}$$

这样，几乎对于所有的 t，都有

$$f(t)=\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\,\frac{e^{pt}}{p}\,dp, \tag{2.3}$$

其中的积分指的是主值．

証．設

$$f_1(t)=\int_0^t f(u)\,du;\quad \sigma>\sigma_c,\quad \sigma>0,\quad \text{又 } p=\sigma+i\tau,$$

則

$$F(p)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A f(t)\,e^{-pt}dt=\lim_{A\to\infty}\left[f_1(A)\,e^{-pA}+p\int_0^A f_1(t)\,e^{-pt}dt\right].$$

但由性質 6° 可知，

$$\lim_{A\to\infty}f_1(A)\,e^{-pA}=0,$$

所以

$$\frac{F(p)}{p}=\int_0^\infty f_1(t)\,e^{-pt}dt\quad(\sigma>\sigma_c,\ \sigma>0), \tag{2.4}$$

并且由同一个性質 6° 可知，上式中的积分是絕对收斂的．因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}F(p)\frac{e^{pt}}{p}dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}e^{pt}dp\int_0^{\infty}f_1(\xi)e^{-p\xi}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f_1(\xi)e^{\gamma(t-\xi)}\frac{\sin\omega(t-\xi)}{t-\xi}d\xi. \qquad (2.5)$$

当 $\xi\leqslant 0$ 时,令 $f_1(\xi)=0$, 便可以写出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}F(p)\frac{e^{pt}}{p}dp=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)e^{\gamma(t-\xi)}\frac{\sin\omega(t-\xi)}{t-\xi}d\xi.$$

但 $f_1(\xi)e^{-\gamma\xi}$ 在直綫上每点的鄰区内都是連續囿变函数,而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(\xi)|e^{-\gamma\xi}d\xi<\infty$$

(参看拉普拉斯积分的性質 6°),故由富利叶积分的收斂性理論中的著名定理[19 卷 II]可知,存在着極限

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{\gamma t}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)e^{-\gamma\xi}\frac{\sin\omega(t-\xi)}{t-\xi}d\xi=f_1(t),$$

这就是所要証明的。

由定理的証法可以看出,对于函数 $f(t)$ 而言,公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{e^{\gamma t}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\gamma\xi}\frac{\sin\omega(t-\xi)}{t-\xi}d\xi$$

能够成立,只要在(2.5)中可以將积分的次序对調的話;但此时假設,当 $\xi<0$ 时, $f(\xi)=0$. 特别,由此可以推出,在(2.3)中可將算子 $\frac{d}{dt}$ 施行于积分号下面,只要函数 $f(\xi)e^{-\gamma\xi}$ 满足富利叶积分的收斂性的古典条件[19, 卷 II]的話;例如,倘若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|e^{-\gamma\xi}d\xi=\int_0^{\infty}|f(\xi)|e^{-\gamma\xi}d\xi<\infty,$$

而且 $f(\xi)$ 在直綫上每点的鄰区內都是囿变函数,那么按主值意义的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{-pt}dp=\frac{1}{2}\left[f(t+0)+f(t-0)\right]$$

存在。

注 1. 由性質 6° 可以推知,有如此的常数 Q 存在,使得对于所

有一切 t,

$$|f_1(t)|<Qe^{\sigma_0 t}\ (\text{其中}\ \sigma>\sigma_0).$$

此时由等式(2.4)即得

$$\left|\frac{F(p)}{p}\right|\leqslant\frac{Q}{\sigma-\sigma_0}. \tag{2.6}$$

注 2.　倘若

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\ \ (\sigma>\sigma_c),\ \text{而}\ f_1(t)=\int_0^t f(u)du,$$

那么由現在所証明的即知，函数 $f_1(t)$ 的拉普拉斯变换即为 $\frac{F(p)}{p}$，而且拉普拉斯积分当 $\sigma>\sigma_c$ 时絕对收斂．因此，如果

$$f_n(t)=\int_0^t d\xi_n\int_0^{\xi_n}d\xi_{n-1}\cdots\int_0^{\xi_2}f(\xi_1)d\xi_1=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{n-1}d\xi,$$

那么

$$\frac{F(p)}{p^n}=\int_0^\infty f_n(t)e^{-pt}dt,$$

又

$$f(t)=\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\frac{e^{pt}}{p^n}dp\ \ (\gamma>\sigma_c). \tag{2.7}$$

由不等式(2.6)可知，当 $n=3$ 时，积分(2.7)在任何閉区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 内都是絕对一致收斂的．显然，n 越大时这个积分的收斂性越好．

定理 2 (乘法定理)．假設当 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_a$ 时，积分

$$F_1(p)=\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt\ \text{与}\ F_2(p)=\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt \tag{2.8}$$

絕对收斂，則 $F(p)=F_1(p)F_2(p)$ 即为

$$f(t)=\int_0^t f_1(t-\xi)f_2(\xi)d\xi \tag{2.9}$$

的拉普拉斯变换，而且当 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_a$ 时，积分

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{2.10}$$

絕对收斂．

証．由积分(2.8)的絕对收斂性可以推出二重积分

$$F_1(p)F_2(p)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-p(u+v)}f_1(u)f_2(v)\,du\,dv$$

的絕对收斂性 [23，第三章]．在此积分中令 $u+v=t$，$v=\xi$ 而更換变数，则求积区域便成为直綫 $\xi=0$，$t=\xi$ 所圍成的区域．現在应用富比尼（Fubini）定理 [23，第三章] 卽知，积分（2.9）几乎对于所有一切 t 都存在，而且

$$F_1(p)F_2(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f_1(t-\xi)f_2(\xi)\,d\xi,$$

又当 $\mathrm{Re}(p)>\sigma_a$ 时它是絕对收斂的．

乘法定理也可以陈述为下面的形式較为便利：

定理 2a．設 $\dfrac{\bar{f}(p)}{p}$，$\dfrac{\bar{g}(p)}{p}$ 与 $\dfrac{\bar{f}(p)\bar{g}(p)}{p}$ 分别为函数 $f(t)$，$g(t)$，$h(t)$ 的拉普拉斯积分，则几乎到处都成立着

$$h(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(\xi)g(t-\xi)\,d\xi. \tag{2.11}$$

証．由假設可知，

$$\bar{f}(p)\bar{g}(p)=p\int_0^{\infty}h(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

故有[参看(2.7)]

$$\frac{\bar{f}(p)\bar{g}(p)}{p^3}=p\int_0^{\infty}h_3(t)\,e^{-pt}dt, \tag{2.12}$$

其中

$$h_3(t)=\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^{t_2}h(u)\,du.$$

但函数 $\dfrac{\bar{f}(p)}{p^2}$ 与 $\dfrac{\bar{g}(p)}{p^2}$ 都是絕对收斂的拉普拉斯积分[参看(2.3)]：

$$\frac{\bar{f}(p)}{p^2}=\int_0^{\infty}f_1(t)\,e^{-pt}dt,\quad \frac{\bar{g}(p)}{p^2}=\int_0^{\infty}g_1(t)\,e^{-pt}dt,$$

其中

$$f_1(t)=\int_0^t f(u)\,du,\quad g_1(t)=\int_0^t g(u)\,du.$$