不变子空间

H·Radjavi P·Rosenthal 著

王振鹏 译

吉林大学出版社

不变子空间

H. Radjavi
P. Rosenthal 著

王振鹏 译

吉林大学出版社

不 变 子 空 间

H. Radjavi
P. Rosenthal
著

王振鹏 译

责任编辑:赵洪波　　封面设计:张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

(长春市东中华路29号)　　长春大学印刷厂印刷

开本:850×1168毫米　1/32　　1991年12月第1版

印张:9.5　　1991年12月第1次印刷

字数:216千字　　印数1—900册

ISBN 7-5601-1020-7/O·110　　定价:3.15元

著者前言

近年来，由于受到对希氏空间上非自伴算子的结构的兴趣的刺激，出现了大量的关于不变子空间的文章. 其中的一些结果得之于某些一般的研究工作：Livsic 首先开始研究的特征算子函数理论；BrodsKii 及其合作者对三角模型的研究；以及 Sz.-Nagy 和 Foias 的酉膨胀理论. 其它一些定理的证明与兴趣，和任何一种特殊的结构理论无关. 因为在每种结构理论中处于领导地位的数学家们已对他们的工作做了出色的解说(见 Sz.-Nagy-Foias[1]，Brodskii[1]，Gohberg-Krein[1]，[2])，所以我们在本书中将集中介绍与这些理论无关的结果. 我们希望，我们已对这些结果做了相当全面的考察；我们还建议读者参考上述文献以了解补充的消息.

目录指明了本书所包含的材料. 我们限于讨论可分希氏空间上的算子，虽然大多数定理在一般的希氏空间中、很多定理在巴氏空间中，也是对的. 我们觉得这种限制是有道理的，因为在可分希氏空间的情形，定理易于解释，一般说来又最有趣，而且可能最有用.

我们想使本书能被通晓测度论、复分析和初等泛函分析的数学家所读懂，而不管他们是否认真地学习过希氏空间上的算子理论. 为此，我们收入了一些众所周知的材料(例如谱定理). 全书只有两处用到了为本书所没有的材料：在第三章中我们需要 $\mathscr{H}^p$ 理论的一些基本知识，在第六章中则需要一些有关 Schatten p-类算子的事实. 在这两处，我们讨论了为我们的证明所需要的定理并引了标准的原文.

每章都有标题为“补充命题”的一节. 它列举了一些与该章

内容密切有关的结果，这些结果可用类似于正文中的方法加以证明. 这样做有两个目的：开列出了一批有用的事实，而这些事实因篇幅所限不能被收入于正文中；这些结果可做为习题，读者做了它们，将有助于加深理解.

本书介绍的定理，是几百名数学家的成果. 我们曾企图在标题为“评注”的各节中指出所介绍的内容的发展过程，但是我们认识到，这种企图是不能完全胜任的. 很多人贡献出了思想，这些思想成为本书的那样大的一部分内容，以致于很难追溯它们的历史. 我们向做出了贡献但未被提及名字的大量数学家以及在参考文献中被引用的数学们，表示深深的谢意.

我们感谢多伦多(Toronto)大学的 Chandler Davis，George Duff 和 Israel Halperin，因为他们的行政安排使得我们的合作能顺利进行. 我们还十分感谢读完本书初稿后提出建议和指出错误的学生们与同事们. 在这方面，Abie Feintuch，Peter Fillmore，Ali A. Jafarian，Eric Nordgren 和 Helen Rosenthal 特别帮助了我们.

想表达我们对 Paul Halmos 的谢忱的深度，是很困难的. 他作为一位有启发性的教师和数学家，强烈地影响了我们的全部数学工作；他作为 Springer-Verlag 的编辑，提出了极为具有建设性的批评；他作为一位朋友，在我们似乎已经不可能完成本书的时候，是我们的勇气的主要源泉. 我们希望，本书能在某种程度上证明，他为了我们的利益而做出的努力是并非枉然的.

Heydar Radjavi，Peter Rosenthal

多伦多，1972 年 10 月

目　　录

第〇章　引论和预备知识

本章的大部分内容是今后所需要的某些基本的定义与结果. 除 §0.4 之外，这些结果全都是人们熟知的. 读者可以仅仅为了参看有关的记号而使用其它各节.

0.1　希氏空间

在整个这本书中，我们将研究定义在(在同构意义下)唯一的，可分的，无穷维复希氏空间上的算子；一般地，把这个空间记作 $\mathscr{H}$. 除了那些明显涉及有限维空间的结果之外，关于空间的这个假设，被认为隐含在全部结果的陈述之中.（大多数结果实际上对于不可分的希氏空间也成立，而且很多结果对于巴氏空间也是对的，但是在可分希氏空间的情形，一般说来，解释较为简单.）有时我们要考虑 $\mathscr{H}$ 的某些具体实现(例如 $\mathscr{L}^2(0,1)$和 l^2).

我们假定读者熟悉在 Rudin[1，第四章]，Halmos[2]和 Berberian[1]中所论述的希氏空间几何学，$\mathscr{H}$ 上的内积$(\cdot,\cdot)$关于第一个变量是线性的，关于第二个变量是共轭线性的. 两希氏空间 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{K}$ 的直接和记作 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$，而 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ 的元素写成 $x\oplus y$ 的形式，其中 $x\in\mathscr{H}$，$y\in\mathscr{K}$. 一族空间 $\{\mathscr{H}_\alpha\}_{\alpha\in A}$的直接和记作 $\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus\mathscr{H}_\alpha$，而其元素写作$\sum\limits_{\alpha\in A}\oplus x_\alpha$，其中 $x_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha$ 对于所有的$\alpha\in A$).

$\mathscr{H}$ 中的一线性流形是 $\mathscr{H}$ 的那样一个子集：它在向量加法和乘以复数的乘法之下是封闭的. $\mathscr{H}$ 的一子空间是那样一

个线性流形：它在范数拓朴之下是闭的；平凡子空间指的是$\{0\}$和$\mathscr{H}$. 如果$\mathscr{S}\subset\mathscr{H}$，则$\mathscr{S}$的新开集(或新成集)$V\mathscr{S}$是指所有包含$\mathscr{S}$的子空间的交集. 二子空间$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$称为互补
2 的，如果$\mathscr{M}\cap\mathscr{N}=\{0\}$且$\{x+y: x\in\mathscr{M}, y\in\mathscr{N}\}=\mathscr{H}$. 子空间$\mathscr{M}$的正交补是$\mathscr{M}^{\perp}=\{x\in\mathscr{H}: (x, y)=0$ 对所有的 $y\in\mathscr{M}\}$，而$\mathscr{M}\ominus\mathscr{N}=\mathscr{M}\cap\mathscr{N}^{\perp}$.

$\mathscr{H}$上的一算子是以$\mathscr{H}$为定义域以$\mathscr{H}$的一子集为值域的有界(即连续)线性变换. 对于可以是无界的线性映射，我们使用线性变换这一术语. $\mathscr{H}$上的全部算子组成的巴氏代数记作$\mathscr{B}(\mathscr{H})$. 恒等算子简记之为1，而A的伴随算子记作A^*. 如果$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$是互补子空间，则沿$\mathscr{N}$到$\mathscr{M}$上的射影是如下定义的算子P: $P(x+y)=x$ 当 $x\in\mathscr{M}$, $y\in\mathscr{N}$ (P的连续性由闭图形定理而得知：参见 Riesz-Sz. Nagy[1]. 沿$\mathscr{M}^{\perp}$到$\mathscr{M}$上的射影，简称之为到$\mathscr{M}$上的射影. 我们假定读者知道在 Halmos [2]，Berberian [1]和 Taylor[1]中讨论过的算子基本性质. 网$\{A_\alpha\}$按$\mathscr{B}(\mathscr{H})$上的一致算子拓朴，强算子拓朴，弱算子拓朴收敛到A，依次记作$\{A_\alpha\}\Rightarrow A$，$\{A_\alpha\}\rightarrow A$，$\{A_\alpha\}\rightharpoonup A$. 相应于$\mathscr{H}$的分解$\mathscr{H}=\sum\oplus\mathscr{H}_\alpha$，每个$A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$有通常的算子矩阵表示(参见 Halmos [3]).

一酉算子U是$\mathscr{H}$的一自同构，即：$U\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$是酉算子，当且仅当$U$可逆且对于所有的$x,y\in\mathscr{H}$都有$(Ux, Uy)=(x,y)$. 算子$A$和$B$说是酉等价的，如果存在一酉算子$U$使得$A=UBU^{-1}$. 一般地，我们对算子的酉不变性质有兴趣，而且往往无法把彼此酉等价的算子区别开. 算子A和B称为相似的，如果存在可逆算子S使得$A=SBS^{-1}$.

0.2 不变子空间

定义 子空间$\mathscr{M}$称为在算子A之下不变的，如果对于每

个 $x\in\mathscr{M}$ 都有 $Ax\in\mathscr{M}$. $\mathscr{H}$ 的所有在 A 之下不变的子空间的集合记作 $\mathrm{Lat}A$；如果 $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}(\mathscr{H})$，则 $\mathrm{Lat}\mathscr{S}=\bigcap\limits_{A\in\mathscr{S}}\mathrm{Lat}A$.

对于任何 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$\mathrm{Lat}A$ 在交与张开的运算之下显然是封闭的，由此得知，$\mathrm{Lat}A$ 是 $\mathscr{H}$ 的所有子空间组成的格的完全子格. 注意，对于每个 A，平凡子空间都在 $\mathrm{Lat}A$ 中.

研究不变子空间的基本原动力来自对于算子结构和逼近理论的兴趣. 有限维空间上的算子的 Jordan 标准形定理，可以看作是把算子表示成它在某些不变子空间上的限制的直接和(在相似的意义下). 有限维复向量空间上的每个矩阵都酉等价于
一个上三角矩阵这一事实，可以从有限维空间上的算子的非平 3
凡不变子空间的存在性立即得出(参见 Halmos[4]). 如果 $\mathscr{H}$ 是任一希氏空间，$A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$\mathscr{M}\in\mathrm{Lat}A$，则关于 $\mathscr{H}$ 的分解 $\mathscr{M}\oplus\mathscr{M}^{\perp}$的表示是上三角的：

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix},$$

其中 $A_1=A|\mathscr{M}$(A 在 $\mathscr{M}$ 上的限制)，而 A_2 和 A_3 依次是把 $\mathscr{M}^{\perp}$ 映入 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}^{\perp}$的算子. 于是在 A 的结构与 $\mathrm{Lat}A$ 之间存在着各种关系，就不足为奇了.

如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$x\in\mathscr{H}$，则易见 $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\{A^nx\}$在 A 之下不变. 于是关于 $\mathrm{Lat}A$ 的知识就提供了关于可用$\{A^nx\}$的线性组合来逼近的向量的消息.

向量 x 叫作 A 的*循环向量*，如果$\bigvee\{A^nx\}=\mathscr{H}$；$\mathscr{M}$ 叫作 A 的*循环子空间*，如果$\bigvee\{A^nx\}=\mathscr{M}$.

定义 子空间 $\mathscr{M}$ 称为 A 的*超不变子空间*，如果对于每个与 A 交换的 B 都有 $\mathscr{M}\in\mathrm{Lat}B$.

关于 A 的超不变子空间的知识能提供关于 A 的换位(即所有使 $AB=BA$ 的算子 B 组成的集合)的结构的消息.

关于不变子空间，已知的结果比未知的少得多；本书介绍

的结果，归根到底可能只是远为全面得多的理论的一些片断．最基本的未解决问题——不变子空间问题是：是否每个算子都有非平凡不变子空间？相关联的问题是超不变子空间问题：是否每个不是 1 的复倍数的算子都有非平凡超不变子空间？在第五章，第六章和第八章中得到了一些关于不变子空间和超不变子空间问题的部分结果．

我们从某些基本事实开始．

定理 0.1 如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$P$ 是任一到 $\mathscr{M}$ 上的射影，则 $\mathscr{M}\in\operatorname{Lat}A$ 当且仅当 $AP=PAP$．

证明 如果 $\mathscr{M}\in\operatorname{Lat}A$，$x\in\mathscr{H}$，则 APx 含于 $A\mathscr{M}$ 中，又因为 $A\mathscr{M}\subset\mathscr{M}$，得知 $P(APx)=APx$．反之，如果 $AP=PAP$，$x\in\mathscr{M}$，则 $Px=x$，$Ax=PAx$．因为 $P(Ax)=Ax$，$Ax\in\mathscr{M}$ 所以 $\mathscr{M}\in\operatorname{Lat}A$．证毕．

定理 0.2 如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$P$ 是沿 $\mathscr{N}$ 到 $\mathscr{M}$ 上的射影，则 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 全在 $\operatorname{Lat}A$ 中当且仅当 $AP=PA$．

4 **证明** 由定理 0.1，$\{\mathscr{M},\mathscr{N}\}\subset\operatorname{Lat}A$ 当且仅当 $AP=PAP$ 和 $A(1-P)=(1-P)A(1-P)$，（因为 $1-P$ 是到 $\mathscr{N}$ 上的射影）．第二个方程等价于 $A-AP=A-PA-AP+PAP$，或 $0=-PA+PAP$．第一个方程给出 $0=-PA+AP$．证毕．

定义 如果子空间 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}^\perp$ 都在 $\operatorname{Lat}A$ 中，就说 $\mathscr{M}$ 约化 A．

易见 $\mathscr{M}$ 约化 A 的充要条件是 $\mathscr{M}\in(\operatorname{Lat}A)\cap(\operatorname{Lat}A^*)$，（命题 0.1）．由定理 0.2 而知：$\mathscr{M}$ 约化 A 的充要条件是到 $\mathscr{M}$ 上的射影与 A 可交换．一般地，约化子空间比任意不变子空间易于讨论（参见第七章）．

0.3 算子的谱

我们需要关于算子的谱的一批事实．考虑巴氏代数的元素

的谱这一更为一般的情况，是方便的.

定义 如果 $\mathfrak{A}$ 是具有单位元素 1 的复巴氏代数，并且 $x\in\mathfrak{A}$，则 x 的谱 $\sigma(x)$ 指的是所有使 $x-\lambda$ 在 $\mathfrak{A}$ 中无逆的复数 λ 组成的集合；($x-\lambda$)是 $x-\lambda\cdot 1$ 的简写). 预解集 $\rho(x)$ 是 $\sigma(x)$ 在 $\mathbb{C}$ (所有复数组成的集合)中的余集，而谱半径 $r(x)$ 是 $\sup\{|x|:\lambda\in\sigma(x)\}$. 对于每个 x，$\sigma(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空紧致子集，而 $r(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$ (参见 Rudin[1]，Rickart [1]). 元素 x 称为拟幂零的，如果 $\sigma(x)=\{0\}$. 在 $\mathfrak{A}$ 是交换的情形，Gelfand 理论给出了 $\sigma(x)$ 的有用的刻划.

定理 0.3 如果 $\mathfrak{A}$ 是具有单位元素的，复的，交换的巴氏代数，$x\in\mathfrak{A}$，则

$$\sigma(x)=\{\varphi(x):\varphi\text{ 是从 }\mathfrak{A}\text{ 到 }\mathbb{C}\text{ 上的同态}\}.$$

证明 这个证明可在任何一本论述巴氏代数的书中找到(例如 Rudin [1]，Rickart [1])，证毕.

对于 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$\sigma(A)$ 表示 A 关于巴氏代数 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的谱. 考虑算子关于 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的交换子代数的谱，Gelfand 理论就可以用上了；下述定理使这成为可能.

定理 0.4 如果 $\mathfrak{B}$ 是复巴氏代数 $\mathfrak{A}$ 的极大交换子代数，$x\in\mathfrak{B}$，$\sigma_{\mathfrak{A}}(x)$ 和 $\sigma_{\mathfrak{B}}(x)$ 依次表示 x 关于 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的谱，则 $\sigma_{\mathfrak{A}}(x)=\sigma_{\mathfrak{B}}(x)$.

证明 显然，如果 $x-\lambda$ 在 $\mathfrak{B}$ 中有逆，则它在 $\mathfrak{A}$ 中有逆； 5
所以 $\sigma_{\mathfrak{A}}(x)\subset\sigma_{\mathfrak{B}}(x)$. 假设对于某个 $y\in\mathfrak{A}$ 有 $(x-\lambda)y=y(x-\lambda)=1$. 这时对于每个 $z\in\mathfrak{B}$ 都有 $yz(x-\lambda)y=(x-\lambda)zy$，于是 $yz=zy$，所以 y 可与 $\mathfrak{B}$ 的每个元素交换，于是由极大性，$y\in\mathfrak{B}$. 所以 $\sigma_{\mathfrak{B}}(x)\subset\sigma_{\mathfrak{A}}(x)$. 证毕.

定理 0.5(谱映射定理) 如果 $x\in\mathfrak{A}$，p 是任一多项式，则 $\sigma(p(x))=\{p(\lambda):\lambda\in\sigma(x)\}$.

证明 设 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的任一包含 x 的极大交换子代数. 这时，由定理 0.3 和定理 0.4，

$$
\begin{aligned}
\sigma(p(x)) &= \sigma_{\mathfrak{B}}(p(x)) \\
&= \{\varphi(p(x)):\ \varphi \text{ 是从 } \mathfrak{B} \text{ 到}\mathbb{C}\text{上的同态}\} \\
&= \{p(\psi(x)):\ \varphi \text{ 是 } \mathfrak{B} \text{ 的到}\mathbb{C}\text{上的同态}\} \\
&= \{p(\lambda):\ \lambda \in \sigma(x)\}.
\end{aligned}
$$

证毕.

如果 A 是一算子，则有几种可能的原因使得 $A-\lambda$ 不是可逆的.

定义 A 的点谱 $\Pi_0(A)$是所有使 $A-\lambda$ 不一对一的 $\lambda\in\mathbb{C}$组成的集合. 如果 $\lambda\in\Pi_0(A)$，则 λ 叫作 A 的特征值，并且存在非零向量 x(叫作 A 的特征向量)使得 $Ax=\lambda x$.

注意，一可逆算子 A 一定是按下述意义为下方有界的：存在常数 $k>0$ 使得 $\|Ax\|\geqslant k\|x\|$ 对所有向量 x 都成立.

定义 A 的近似点谱 $\Pi(A)$是所有使 $A-\lambda$ 不下方有界的 $\lambda\in\mathbb{C}$组成的集合. A 的压缩谱 $\Gamma(A)$是所有使 $A-\lambda$ 的值域不稠密的 λ 组成的集合.

显然，$\Pi_0(A)\subset\Pi(A)$，$\Pi(A)\cup\Gamma(A)\subset\sigma(A)$.

定理 0.6 如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，则 $\sigma(A)=\Pi(A)\cup\Gamma(A)$.

证明 我们只须证明 $\lambda\notin\Pi(A)$和 $\lambda\notin\Gamma(A)$蕴涵 $\lambda\notin\sigma(A)$. 考虑序列极限点就容易证明，$\lambda\notin\Pi(A)$蕴涵 $A-\lambda$ 的值域是闭的. 由于 $\lambda\notin\Gamma(A)$，$A-\lambda$ 的值域还是稠密的，由此得知 $A-\lambda$ 是一对一的，而且是映满整个空间的，从而是可逆的. 证毕.

下述结果对于研究不变子空间是有用的. 对于$\mathbb{C}$的子集 S，我们用 ∂S 表示 S 的点集边界，即 $\partial S=\overline{S}\cap\overline{\mathbb{C}\setminus S}$.

定理 0.7 如果 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，则 $\partial\sigma(A)\subset\Pi(A)$.

证明 首先，$\partial\sigma(A)=\sigma(A)\cap\overline{\rho(A)}$. 假设 $\lambda\in\partial\sigma(A)$，$\lambda\notin\Pi(A)$. 选取收敛到 λ 的叙列$\{\lambda_n\}\subset\rho(A)$. 我们断定：存在 $k>0$
6 和正整数 N 使得 $n\geqslant N$ 蕴涵 $\|(A-\lambda_n)x\|\geqslant k\|x\|$ 对所有 x 都成立. 否则，对于所有的正整数 m 和 N，都应存在$n\geqslant N$ 和范数为 1 的向量 x_m 使得 $\|(A-\lambda_n)x_m\|<1/m$. 但是

$$\| (A-\lambda)x_m \| \leqslant \| (A-\lambda_n)x_m \| + \| (\lambda-\lambda_n)x_m \|$$
$$\leqslant \frac{1}{m} + |\lambda - \lambda_n|,$$

而这蕴涵 $\lambda \in \Pi(A)$. 从而那样的 k 和 N 是存在的.

现在我们可以证明 $\lambda \notin \Gamma(A)$. 如果 $x \in \mathscr{H}$, 则对于每个 n 都有一 $y_n \in \mathscr{H}$ 使 $(A-\lambda_n)y_n = x$. 因为 $\| (A-\lambda_n)y_n \| \geqslant k \| y_n \|$, 所以 $\| y_n \| \leqslant (1/k) \| x \|$ 当 $n \geqslant N$. 于是

$$\begin{aligned} & \| (A-\lambda)y_n - x \| \\ & \leqslant \| (A-\lambda_n)y_n - x \| + \| \lambda_n - \lambda)y_n \| \\ & = 0 + |\lambda_n - \lambda| \, \| y_n \| \\ & \leqslant \frac{1}{k} \| x \| \, |\lambda_n - \lambda|. \end{aligned}$$

如果 n 充分大, 则 $(1/k) \| x \| \, |\lambda_n - \lambda|$ 任意小, 由此导出 $\lambda \notin \Gamma(A)$.

于是 $\lambda \in \partial\sigma(A)$ 和 $\lambda \notin \Pi(A)$ 蕴涵 $\lambda \notin \partial(A)$ (定理 0.6), 而这是矛盾的. 证毕.

这条定理提供了关于算子在其不变子空间上的限制的谱的消息.

定义 如果 $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, 则定义 A 的满谱 $\eta(\sigma(A))$ 为 $\sigma(A)$ 和 $\rho(A)$ 的所有有界分支的并集, 即: $\eta(\sigma(A))$ 是 $\sigma(A)$ 连同 $\sigma(A)$ 中的全部"空洞".

定理 0.8 如果 $\mathscr{M} \in \mathrm{Lat}A$, 则 $\sigma(A|\mathscr{M}) \subset \eta(\sigma(A))$.

证明 首先注意, $\lambda \in \Pi(A|\mathscr{M})$ 蕴涵着: 有单位向量组成的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\| (A-\lambda)x_n \|$ 收敛到 0. 于是 $\Pi(A|\mathscr{M}) \subset \Pi(A)$. 所以由定理 0.7,

$$\partial\sigma(A|\mathscr{M}) \subset \Pi(A|\mathscr{M} \subset \sigma(A).$$

如果 $\sigma(A|\mathscr{M})$ 包含 $\rho(A)$ 的无界分支的点, 则 $\partial\sigma(A|\mathscr{M})$ 也一定与 $\rho(A)$ 的无界分支相交, 而上面的推导已证明这是不可能的. 证毕.

容易选出例子说明$\sigma(A|\mathscr{M})$不一定包含在$\sigma(A)$中；例如，令A是双侧移位，$\mathscr{M}=\mathscr{H}^2$(见第三章).

7 **定义** 算子A称为有限秩的，如果$\{Ax: x\in\mathscr{H}\}$的维数是有限的.

显然，有限秩算子可用有限维线性代数的技巧来加以研究(参见命题 0.5)，从而我们能得到大量关于有限秩算子的消息. 能把某些推广的有限维技巧应用上去的更广的算子类，是紧致算子类.

定义 算子A称为紧致的(或完全连续的)，如果对于$\mathscr{H}$的任何有界子集$\mathscr{S}$，$A\mathscr{S}$的闭包都是$\mathscr{H}$的紧致子集；等价地，A是紧致的，当且仅当$\{x_n\}\rightharpoonup x$($\{x_n\}$弱收敛到x)时

$$\{\|Ax_n-Ax\|\}\to 0.$$

紧致算子类是$\mathscr{B}(\mathscr{H})$中的双边理想，(命题 0.6). 我们不加证明地陈述紧致算子的熟知的谱性质.

定理 0.9 如果A是紧致的，则

(i)(Fredholm 择一定理) $\sigma(A)=\{0\}\cup\Pi_0(A)$.

(ii) $\Pi_0(A)$或者是有限的，或者是由一收敛到 0 的序列所组成.

(iii)如果$\lambda\neq 0$，则特征空间$\{x: Ax=\lambda x\}$是有限维的.

证明 这个证明可以在 Dunford-Schwartz [1]，Halmos [3] 和很多其它标准的书中找到. 证毕.

我们需要一个关于算子的谱与它被一紧致算子所扰动之后的谱之间的关系的结果.

定理 0.10(Weyl 定理) 如果$A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，$K$是紧致算子，则$\sigma(A+K)\subset\sigma(A)\subset\Pi_0(A+K)$.

证明 假设$\lambda\in\sigma(A+K)$，$\lambda\notin\sigma(A)$. 这时$A+K-\lambda=(A-\lambda)(1+(A-\lambda)^{-1}K$. 因为$A-\lambda$是可逆的，所以$(1+(A-\lambda)^{-1}K)$不是可逆的，于是由 Fredholm 择一定理而得知：-1是紧致算子$(A-\lambda)^{-1}K$的特征值. 从而$A+K-\lambda$有非平凡的零空