SSMPF

杨 新 主编

图像偏微分方程的原理与应用

TUXIANG PIANWEIFEN FANGCHENG

上海交通大学出版社

图像偏微分方程的原理与应用

杨新　主编

杨新　李俊　杜啸晓　编著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书主要介绍图像偏微分方程的数值解法。介绍了轮廓线匹配算法、图像匹配算法和基于扩散方程的保边界降噪声算法。最后还介绍了近年发展较快的水平集法。本书解说精辟、推理严密、叙述简洁。

本书可供大专院校图像处理和模式识别专业师生作教材使用，也可供相关专业人士在科研中作参考。

图书在版编目(CIP)数据

图像偏微分方程的原理与应用/杨新主编. —上海：上海交通大学出版社，2003

ISBN 7－313－03312－5

Ⅰ. 图...　Ⅱ. 杨...　Ⅲ. 偏微分方程　Ⅳ. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 010773 号

本书出版由上海科技专著出版资金资助

图像偏微分方程的原理与应用

杨　新　主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂 印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：7.5　字数：179 千字

2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷

印数：1～2 050

ISBN7－313－03312－5/O・154　定价：12.00 元

出 版 说 明

科学技术是第一生产力。21 世纪，科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略，上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于 2000 年设立“上海科技专著出版资金”，资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

推动科技出版事业

提高學術研究水平

為「上海科技专著出版資金」題

徐匡迪

二〇〇〇年十二月十一日

前　　言

1. 图像中的偏微分方程

20 世纪 80 年代初，麻省理工学院(MIT)人工智能实验室的 Marr 提出了视觉的计算理论，这一理论把视觉过程看作是一个信息处理的过程，同时把这个过程分为了三个层次：计算理论、算法与数据结构以及硬件实验。Marr 的理论系统地揭示了用二维图像恢复三维物体形态的可能性和基本方法，具有划时代的意义，为计算机视觉成为一门学科奠定了重要的基础。Kass 等人向这种严格的各自独立的分层视觉模型提出了挑战，认为在许多图像理解的任务中，底层事件的正确理解依赖于高层知识。他们试图设计这样一个能量函数：其局部极值组成了可供高层视觉选择的方案。这样，在寻找显著的图像特征时，高层机制可能通过将图像特征引向一个适当的局部极值点而与底层模型进行交互。基于这样一种思想，Kass 等人在 1987 年提出了称为“Snake”的著名活动轮廓线模型(active contour model)。Snake 是能量极小化的样条，通过内力约束它的形状，而外力引导它的行为，将其导向期望的图像特征。

近年来，图像处理和计算机视觉中应用偏微分方程和依赖曲率的轮廓线演化受到国内外有关学者极大的关注。《IEEE Trans. on Image Processing》在 1998 年出了一期专刊。国内也非常重视，中科院自动化所等单位，为此召开了专题研讨会。尤其是水平集方法的出现使得曲率描述方法成为曲线演化模型研究的主流。水平集方法(Level Set Method)是用欧拉方法求解隐式偏微分方程的一种具体实现方式，最初由 Osher 和 Sethian 提出，用于解决基于描述火苗外形的热力学方程。其主要思想是将曲线、曲面和图像演化表示为更高维数的超平面水平集，其演化速度是该曲线或曲面当地曲率的函数。在计算过程中所有网格点上的函数值都有更新的计算。很明显，这种方式的计算复杂度较高。但正是通过这种方式，使得曲线的拓扑结构变化处于整个算法的控制之下。因为不论曲线如何变化，它始终处于平面或空间网格中，而演化后的轮廓跟踪步骤可以得到平面上任何位置的曲线。这也就是欧拉方法的特点：以计算的复杂度换取对拓扑变化的适应性，能处理比较困难的曲线或曲面演化过程中拓扑结构变化问题。

继承了数学物理方程大量的研究结果，在很多图像处理和计算机视觉的应用领域，图像偏微分方程的研究目前逐渐丰富和成熟，已迅速发展成为一种理论上严谨，实用上有效的方法。遗憾的是目前国内缺乏一本系统地介绍有关知识的专著。因此有必要将有关的研究资料汇集成书，供国内同行参考。也希望通过此书与数学、物理专家们沟通，使图像偏微分方程的理论与应用在我国得到更广泛的重视和推广，取得丰硕的成果。

设 $\Phi_0:\Re^2\rightarrow\Re$ 表示一幅灰度图像，而 $\Phi_0(x,y)$ 是灰度值。引入“人工”时间参数 t，图像的变化可以用偏微分演化方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\Im[\Phi(x,y,t)] \tag{1}$$

描述。其中，$\Phi(x,y,t):\Re^2\times[0,\tau)\rightarrow\Re$ 是随时间变化的图像，而 Φ_0 是初始条件，$\Im:\Re\rightarrow\Re$ 是

表示所使用算法的算子。偏微分方程的解 $\Phi(x,y,t)$ 给出了时间 t 图像的状态。对于矢量值图像，可以得到类似式(1)的偏微分方程组。

同样的方法也可用于曲线(轮廓线)或曲面的演化方程。对于曲线 Φ 是 $\Re\rightarrow\Re^2$ 的函数，对于曲面则是 $\Re^2\rightarrow\Re^3$ 的函数。构成这类演化方程，曲线或曲面必须对算子 $\Im$ 有所约束，所有曲线或曲面的演化可以视为在法线方向的变形，而变形速度与相应曲线或曲面的曲率有关。可以得到曲线或曲面的演化方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \Im(\kappa_i)\boldsymbol{N}。 \tag{2}$$

式中：κ_i 是曲率；$\boldsymbol{N}$ 是曲线或曲面 Φ 的法矢量。有时也加入切向速度，但它只是有助于分析，并不影响几何形状变化。

偏微分方程可以用变分法得到。假设对于一个图像处理问题的变分为

$$\arg\{\mathrm{Min}_{\Phi}U(\Phi)\}。 \tag{3}$$

其中：U 是给定的能量。设 $\Im(\Phi)$ 表示 Euler - Lagrange 一阶变分，由于 Φ 是能量函数 U 的极小解的必要条件是 $\Im(\Phi)=0$，局部最小可以通过计算方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \Im(\Phi)$$

的稳态解得到。在图像处理与计算机视觉中用这种方法得到偏微分方程已有很长历史了，也有大量文献。最经典的例子是 Dirichlet 积分

$$U(\Phi) = \int |\nabla \Phi(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

它与热传导方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(t,x) = \Delta\Phi(x)$$

有关。

最近，不采用变分法而直接导出图像中曲线或曲面的演化方程受到广泛重视。在图像分析中应用偏微分方程和曲线或曲面的演化能导出在连续域的图像模型。由于与离散的数字图像无关，使图像的数学模型得到简化。一个很好的例子是，利用连续模型和渐近展开法，将图像处理中一些离散局部非线性数字滤波器作为偏微分算子处理，使人们对这些滤波器有了更深入的了解。

同时，用连续信号描述图像，偏微分方程可以视为无穷小邻域内的局部迭代滤波器。用这种方法解释偏微分方程，可以将很多已知的迭代滤波器进行整合和分类，并能导出新的迭代滤波器。实际上，Alvarez 等根据偏微分方程是否满足图像处理的一些要求，例如因果性、定位性等，将这些方程进行了分类。

而且，偏微分方程很容易将不同的算法结合。如果两个不同的图像处理算法为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \Im_1[\Phi(x,y,t)], \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \Im_2[\Phi(x,y,t)],$$

那么可以结合为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \alpha\Im_1 + \Im_2, \quad \alpha \in \Re_+。$$

如果使两个能量函数 U_1 和 U_2 最小的 Euler - Lagrange 算子分别是 $\Im_1$ 和 $\Im_2$，则式(3)使

能量函数

$$\alpha U_1 + U_2$$

最小。

采用偏微分方程的一个重要优点是，由于数学界对于偏微分方程的数值逼近解有长期深入的研究，因此可以获得高度准确性和稳定性数值解。在考虑图像处理和数值解的时候，不可避免地会碰到非平滑信号的求导问题。计算数学中的粘性解提供了处理这类问题严密的数学理论。最后，在图像处理和计算机视觉中引入偏微分方程理论，不仅有很多现成的成熟算法，而且提供丰富的理论结果，例如解的存在性、稳定性和唯一性的证明。

2. 发展历史

本书只介绍图像偏微分方程最具影响的一些发展。

图像处理中采用偏微分方程的思想可以追溯到 Gabor 和其后 Jain 的工作。但是这个领域实质性的创始工作应该归功于 Koenderink 和 Witkin 各自独立的工作。他们在图像处理中引入了尺度空间的严格理论。尺度空间理论是今天图像处理中对偏微分方程研究的基础。他们的工作是将多尺度图像表示为 Gaussian 滤波器处理的结果。这等效于将原图像经过热传导方程使之变形，获得各向同性的扩散流。在 20 世纪 80 年代后期，Hummel 注意到热扩散流并不是产生尺度空间的唯一抛物线方程，并提出满足极大值原理的演化方程也能定义一类尺度空间。极大值原理可以视为因果性的数学解释。

Perona 和 Malik 引入的异向扩散方程是这个领域最有影响的工作。他们提出用保边界的具有方向性的(异性)热扩散方程来代替 Gaussian 平滑滤波器。他们的研究开辟了图像处理中偏微分方程理论和应用的很多新领域。在这个领域，Osher 和 Rudin 提出了冲击滤波器以及 Rudin 等提出了总变分下降法，在他们的论文中明确指出了图像处理中应用偏微分方程的必要性和重要性。必须指出，Price 等发表了很有启发的论文，他们将 Turing 的反应-扩散方程理论用于很多图像处理问题。

图像处理与计算机视觉中很多学者对基于曲线和曲面演化的偏微分方程相当重视。在这个领域，Osher 和 Sethian 提出的水平集数值方法具有重要影响。当然，将图像中的目标用水平集表示对于计算机视觉和图像处理界并不是全新的技术，因为它是数学形态学的基本方法。

Mumford 和 Shah 提出了用偏微分方程处理图像分割的方法，他们的工作统一了很多图像分割方法，并提出了很多理论和实际问题。

Kimia 等定义了一个“反应-扩散”尺度空间，将冲激理论与异向性平滑相结合。

最后，Terzopoulos 等在主动边界图像分割方面的工作也产生了重要影响。以后，很多学者将他的工作推广成测地偏微分方程。

必须指出，上述很多方法的产生得益于数学研究的进展，例如，粘性解理论和微分几何中关于曲线演化方法使图像偏微分方程理论不断丰富和完善。

3. 本书编排

由于大部分图像处理与计算机视觉的专著对于偏微分方程提及不多，为了使本书的内容较为系统，本书的第 1 章介绍了偏微分方程的基本知识。虽然偏微分方程解析解的研究历史悠久，硕果累累，但是绝大部分偏微分方程定解问题的解不能以实用的解析形式来表示，因此必须采用数值逼近的方法。而差分方程是计算图像偏微分方程定解的最常用方法，因此第 2 章介绍了偏微分方程的差分逼近方法和一致性、稳定性和收敛性，而数学图像方程中经过差分

后得到的代数方程一般比较复杂，需要有高效的解法。第 3 章讨论了线性代数方程的数值解法。第 4 章是轮廓线匹配法，它是图像偏微分方程最简单的问题。第 5 章图像匹配算法是轮廓线匹配问题的推广。第 6 章基于扩散方程的保边界降噪声算法，是图像偏微分方程相当成熟的应用领域。第 7 章介绍了近年来发展迅速，对图像处理与模式识别将产生深远影响的水平集法。

我们课题组的李俊博士、杜啸晓博士、郭丰俊博士和王峥博士等对图象偏微分方程方面做了许多研究和计算，尤其是李俊博士对水平集算法进行了深入研究并在应用上做了不少有益的探索，施鹏飞教授、吴立德教授和韩正之教授对于本书的出版提出很多宝贵建议，在此表示衷心感谢。

作者感谢国家自然科学基金会，科技部国际合作司，比利时科技教育部和上海市科委对图像偏微分方程的研究提供的资助和支持。

本书可供从事图像处理与计算机视觉和应用数学研究的教师、研究生、研究人员和工程技术人员参考。图像偏微分方程是新兴的、发展中的学科，与之有关的学科也很多，由于作者学识有限以及本书的篇幅限制，书中错误与片面之处在所难免，敬请读者不吝批评指正。

杨　新

2002 年 12 月

目　　录

第1章 偏微分方程

偏微分方程在现代科学中扮演了重要角色。偏微分方程是从基本自然规律、应用数学、数学物理以及工程技术中产生的。很多重要的物理问题可以用偏微分方程及相应的初始条件，边界条件或初始-边界混合条件描述。为了使读者能深入地研究偏微分方程及其在计算机视觉中的应用，本章首先引入偏微分方程一些基本概念。进而，给出了二阶线性偏微分方程分类的方法。简要介绍了非线性偏微分方程基本概念，经典的线性和非线性偏微分方程，以及变分原理和极值原理。

1.1 线性偏微分方程

函数 $u(x,y,\cdots)$ 的偏微分方程(Partial Differential Equation)是指函数 u 与其偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots$ 的一个数学关系式，并可以记为

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\cdots\right)=0。 \tag{1.1.1}$$

式中：F 是函数；$x,y,\cdots$ 是自变量；而 $u(x,y,\cdots)$ 是应变量。

偏微分方程的阶次(order)与常微分方程的定义相似。方程(1.1.1)中阶次最高的偏导数次数称该偏微分方程的阶次。有两个自变量 x,y 的一阶(first-order)偏微分方程可以写成

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0。 \tag{1.1.2}$$

同样，二阶(second-order)偏微分方程可以写成

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=0。 \tag{1.1.3}$$

以此类推，可得高阶偏微分方程。例如

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1.1.4}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2, \tag{1.1.5}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=u, \tag{1.1.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1 \tag{1.1.7}$$

是一阶方程，而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1.1.8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,y) \tag{1.1.10}$$

是二阶方程，最后

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{1.1.11}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \tag{1.1.12}$$

分别是三阶和四阶方程。

如果偏微分方程中的所有未知函数及其导数之间的关系是线性的，且其系数仅与自变量有关，则称该方程为线性的(linear)。例如，方程(1.1.4)、(1.1.5)，方程(1.1.8)～(1.1.10)和方程(1.1.12)是线性的。

为了方便，可以将偏微分方程写成算子形式：

$$L_x u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})。 \tag{1.1.13}$$

式中：L_x 是算子。如果，对于任意两个函数 u 和 v 以及任意两个常数 a 和 b，算子 L_x 满足

$$L_x(au+bv)=aL_x u+bL_x v, \tag{1.1.14}$$

则称为线性算子(linear operator)。

如果方程(1.1.13)中 L_x 是线性算子，则该方程是线性的。方程(1.1.13)是非齐次(inhomogeneous)线性偏微分方程。如果方程(1.1.13)中 $f(\boldsymbol{x})\equiv 0$，则称为齐次(homogeneous)方程。方程(1.1.4)，方程(1.1.8)、(1.1.9)和方程(1.1.12)是线性齐次方程，而(1.1.5)，(1.1.10)是线性非齐次方程。

同理，如果方程(1.1.13)中算子 L_x 是非线性的，则该方程是非线性方程。方程(1.1.6)、(1.1.7)和方程(1.1.11)是非线性方程。

方程(1.1.1)的解(solution)是使方程(1.1.1)成立，并且函数 $u=u(x,y,\cdots)$ 在区域 D 内连续可微(differentiable)，也就是函数 u 在区域 D 内偏导数都存在，且偏导数连续。

某些情况下，解在区域 D 内连续可微的条件可以放宽。如果函数 u 或它的偏导数在区域 D 内某些点或所有点上是不连续的，则称方程(1.1.1)的解 $u=u(x,y,\cdots)$ 为弱解(weak solution)或广义解(generalized solution)。

为了引入偏微分方程通解的定义，考察偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \tag{1.1.15}$$

的解 $u=u(x,y)$。

将方程(1.1.15)对 x 进行积分，得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=h(y),$$

其中：$h(y)$是 y 的任意函数。再将它对 y 积分，得到

$$u(x,y)=\int h(y)\mathrm{d}y+f(x),$$

其中：$f(x)$是任意函数。或等效为

$$u(x,y)=f(x)+g(y), \tag{1.1.16}$$

其中：$f(x)$和 $g(y)$是任意函数。解(1.1.16)称为二阶偏微分方程(1.1.15)的通解。

通常，偏微分方程的通解由任意函数的数学表达式组成。一个简单的方程(1.1.15)可以有无穷多解。例如

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), \tag{1.1.17}$$

其中：f 和 g 分别是$(x-ct)$和$(x+ct)$的任意函数，那么，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。$$

式中函数右上角的符号代表求导。这个二阶线性方程称为波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0。\tag{1.1.18}$$

式(1.1.17)定义的函数 $u(x,y)$满足方程(1.1.18)，与函数 $f(x-ct)$和 $f(x+ct)$的具体形式无关，仅要求函数 f 和 g 至少是二次可微的函数。因此，式(1.1.17)给出的方程(1.1.18)的通解包含任意函数。

仅有两个独立变量 x 和 y 的情况下，方程(1.1.1)的解 $u(x,y)$可看成是一个几何曲面，称为(x,y,u)空间中的一个积分面。

1.2 线性叠加原理

n 阶线性齐次常微分方程组的通解是 n 个线性独立解与 n 个任意常数的线性组合。换言之，如果 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$是 n 阶线性齐次常微分方程

$$Lu(x) = 0 \tag{1.2.1}$$

n 个线性独立的解，那么，对于任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 有

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)。\tag{1.2.2}$$

上式是方程(1.2.1)的通解，称为常微分方程的线性叠加原理(Superposition Principle)。注意到，通解(1.2.2)严格依赖于 n 个任意常数。

但对于线性齐次偏微分方程

$$L_x u(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1.2.3}$$

通解依赖于任意函数而不是任意常数。所以，方程(1.2.3)有无穷多个解。如将方程(1.2.3)无穷多个解的集用 $u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \cdots, u_n(\boldsymbol{x}), \cdots$表示，那么有无穷多个线性组合

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(\boldsymbol{x})。\tag{1.2.4}$$

式中：c_n 是任意常数。由于无穷级数常不收敛，式(1.2.4)通常不再是方程(1.2.3)的解。因此，对于偏微分方程，叠加原理可能不成立。但是，如果偏微分方程(1.2.3)仅存在有限数目的解 $u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \cdots, u_n(\boldsymbol{x})$，那么

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{n} c_n u_n(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.5}$$

仍是方程(1.2.3)的一个解。如果无穷级数(1.2.4)是收敛的，且级数可以逐项施加算子 L_x，

则叠加原理可用于线性齐次偏微分方程，而式 $u(\boldsymbol{x})$ 是方程(1.2.3)的解。

通常使用分离变量法导出解 $u(\boldsymbol{x})$。分离变量法与解的叠加原理一起，称为富氏法。

无穷线性组合的另一个应用是寻找给定偏微分方程的解。这涉及到一族依赖于连续实参数 k 和函数 $c(k)$ 的解 $u(\boldsymbol{x},k)$ 使

$$\int_a^b c(k)u(\boldsymbol{x},k)\mathrm{d}k \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{\infty} c(k)u(\boldsymbol{x},k)\mathrm{d}k \tag{1.2.6}$$

收敛。那么，在某些条件下，这个积分也是一个解。这也称为线性叠加原理。

线性叠加原理是求偏微分方程解析解的一个重要理论基础。关于这方面的知识，有兴趣的读者可阅读本章参考文献[1]或[5]。

1.3 初始条件与边界条件

大多数情况下，偏微分方程的通解含有任意函数，有一定的不确定性，因此意义不大。必须将通解与其他一些附加条件，如初始(initial)条件或边界(boundary)条件一起考虑才能得到感兴趣的特定解。

初始条件和边界条件是根据特定物理问题的要求而提出的。具有独立时间变量 t 的偏微分方程中，初始条件给出了应变量 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在特定时间 $t=t_0$ 或 $t=0$ 的物理状态。一般情况下，给出初始条件 $u(\boldsymbol{x},0)$ 或同时给出初始条件 $u(\boldsymbol{x},0)$ 和边界条件 $u_t(\boldsymbol{x},t)$ 就可以决定函数 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在以后时间的变化。这类条件称为 Cauchy 条件或初始条件。它常是唯一解存在的必要和充分条件。根据初始条件求偏微分方程解的问题称为 Cauchy 问题或初始值问题(initial-value problem)。

实际上很多物理问题，就是给定空间中区域 D 及其边界 ∂D 上的应变量 $u(\boldsymbol{x},t)$，在区域 D 中求偏微分方程的解。而且，边界并不一定要求是闭合的有限面积或体积的域。部分边界可以在无穷远处。当然，在这种情况下必须给定无穷远处的边界条件。这类问题称为边界值问题(boundary-value problem)，它是应用数学和物理学中最基本的问题。在物理问题中最常见的有三类边界条件：

(1) Dirichlet 条件：在区域 D 的边界 ∂D 上每个点给定 u 的值，求区域 D 中方程 $L_x u(\boldsymbol{x})=0$ 的解称 Dirichlet 边界值问题。

(2) Neumann 条件：在区域 D 的边界 ∂D 的每个点上给定法向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的值。对应的问题称为 Neumann 边界值问题。

(3) Robin 条件：边界 ∂D 的每个点上给定 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+au\right)$ 的值。对应的问题称 Robin 边界值问题。

由偏微分方程描述的问题，并在指定区域中给出初始条件和/或边界条件(或其他补充条件)，如能满足下列要求：

(1) 存在性(existence)：这个偏微分方程至少存在一个解。

(2) 唯一性(uniqueness)：偏微分方程最多存在一个解。

(3) 稳定性(stability)：解必须稳定，就是说，给定数据中发生微小变化，其相应解的变化必须保持在允许的范围内。

稳定性指标是求解物理问题的一个基本要求。一个数学方程只有求得其稳定的解，才能探讨该方程实际意义。

1.4 经典线性偏微分方程

介绍偏微分方程，有必要介绍一些重要的线性方程模型。因为对这些方程数学界和物理界已经有了长时期深入研究，形成了一系列成熟的数学处理方法。而且这些模型有助于读者对偏微分方程的物理意义有更深入的了解。本文首先介绍二阶偏微分方程，这是基于下列考虑：第一，二阶偏微分方程具有广泛的实用意义；第二，二阶偏微分方程在数学处理上比较简单，也容易理解。

[例 1.4.1]　下列方程称为波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0, \tag{1.4.1}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}。 \tag{1.4.2}$$

c 是常数。这个方程描述了波的扩散(或扰动)。它可以描述很多物理问题，例如，弦的振动，薄膜的振动，杆或梁的纵向弹性振动，水的浅表波动，声学以及电信号在电缆中的传输等问题。

[例 1.4.2]　下列方程称为热扩散方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0, \tag{1.4.3}$$

其中：κ 是导热系数。式(1.4.3)描述了某种量子的流动，例如，热或一团基本粒子的流动，它在生物学中也被用作描述生长和扩散的过程，特别是肿瘤的生长。这个热扩散方程还可描述在 Stoke 和 Rayleigh 问题中的非稳定附面层流动以及由旋涡面产生的旋涡扩散。

[例 1.4.3]　下列方程称为拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u = 0。 \tag{1.4.4}$$

此方程用来描述无源静电场的电位，引力场，弹性薄膜的平衡位移，不可压缩流体的速度场，稳态热传导问题的温度分布和其他诸多物理现象。

[例 1.4.4]　以下方程称为泊松方程：

$$\nabla^2 u = f(x,y,z), \tag{1.4.5}$$

其中：$f(x,y,z)$是一个描述场源或漏的给定函数。这是非齐次拉普拉斯方程。泊松方程表示有源或漏的情况下拉普拉斯方程描述的现象。

[例 1.4.5]　Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0, \tag{1.4.6}$$

其中：λ 是常数，此方程就是与时间独立的波动方程(1.4.1)加了一个参数 λ。在声学问题中，它的解代表了一种声音的辐射场。

[例 1.4.6]　电报方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + bu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.4.7}$$

其中：a 和 b 是常数。这个方程是由研究电信号在电缆中传输的规律而得出的。电流 I 和电压 U 都满足此式。同样，这个方程还适用于研究脉动血液在动脉中的压力波的传播。