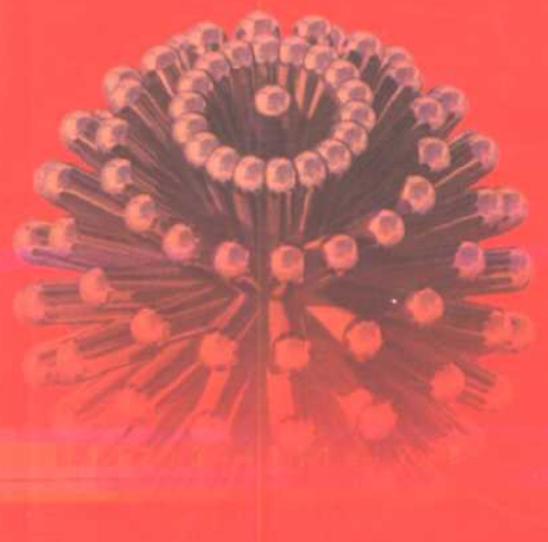
LINZHEN MOQIANG

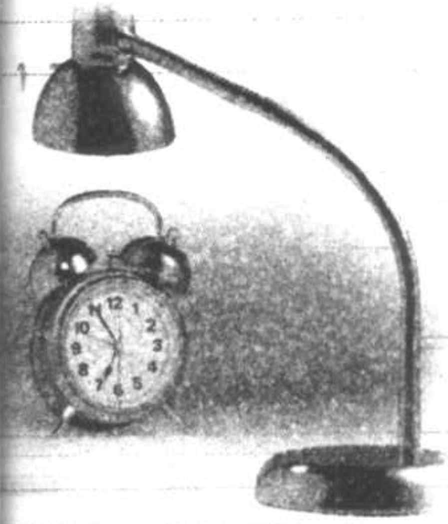
临阵磨枪

高考数学备忘

余晓敏　胡耀宇　编著
翁钟贵　主编



湖北教育出版社



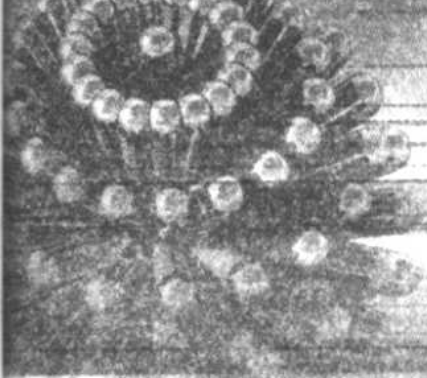
LINZHEN MOQIANG

临阵磨枪

高考数学备忘

余晓敏 胡耀宇 编著

翁钟贵 主编



湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

临阵磨枪.高考数学备忘/余晓敏,胡耀宇编著.—武汉:湖北教育出版社,2003
(临阵磨枪/翁钟贵主编)
ISBN 7-5351-3639-7

Ⅰ.临… Ⅱ.①余…②胡… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 097394 号

出版发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
邮编:430015 电话:83619605

经 销:新 华 书 店
印 刷:华中理工大学印刷厂
(430074·武汉市洪山区珞瑜路 1037 号)
开 本:787mm×1092mm 1/48 6.25 印张
版 次:2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
字 数:185 千字 印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3639-7/G·2947 定价:10.00 元

前　　言

《临阵磨枪》丛书，是依据部颁最新教材和最新高考改革方案，力邀重点中学知名教师撰写而成的精作，旨在使概念系统化，理论条理化，知识层次化，实验简明化，计算技巧化，记忆科学化。在学生考前起到"临阵磨枪，既快又光"的作用。

在编著的过程中，我们既突出各科的特点，又强调各类考试，特别是升学考试的实战性。具体说来，每册书大致由以下几部分组成：

一、"临考备忘"：将所学知识科学总结，巧妙归纳，把完整清晰的知识脉络交给学生，帮学生进行知识过滤和梳理，并教以高效的记忆方法。

二、"实战点拨"：题海无边，但仍有规律可循。我们选了一些巧而不偏的新颖典型例题，教学生如何举一反三和触类旁通。

三、"临考提示"：倾名家毕生的教学经验，通过研究高考的变化和发展，准确无误地展示亮点、热点，教你"临门一脚"的真功。

这套丛书相当于名师考前的一次串讲，使学生不致在考前迷失在茫茫题海之中，特别适合学生考前的第二、第三轮复习。

编著这套丛书，得到郑兴国先生的大力支持和真诚帮助，在此致以衷心地谢意。协助编写的人员还有苏贤禄、喻建炎、王华香等。

由于编写时间仓促，水平有限，错漏难免，敬请读者斧正。

主编　翁钟贵

2003.12 于武汉

目　　录

第一部分　数学基础知识

第二部分　数学思想方法

第三部分　数学解题策略

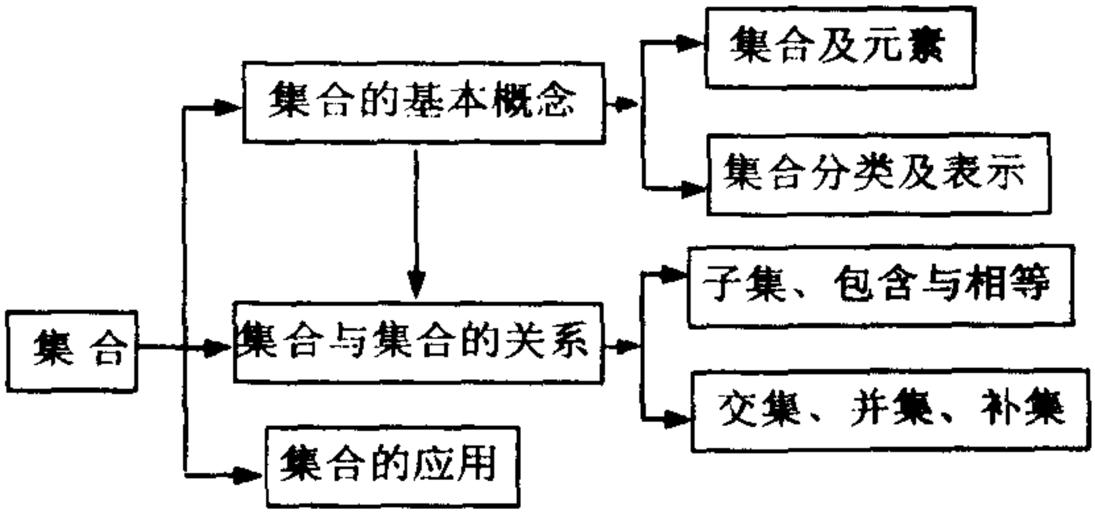
第四部分　数学应用

第一部分　数学基础知识

一、集合与简易逻辑

（一）集合

知识网络



【临考备忘】

1. 集合的有关概念及表示方法

（1）集合的概念及集合中元素的三个特征

一组对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象叫集合的元素，集合的元素具有三个特征：

① 确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的最基本特征.

② 互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的（即互不相同的），相同的对象归入任何一个集合

时，只能算作这个集合中的一个元素.

③ 无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序. 也就是说，由 a、b 两个元素组成的集合与由 b、a 两个元素组成的集合是相同的，即 $\{a,b\} = \{b,a\}$.

(2) 集合的常用表示方法

常用的有列举法，描述法，区间表示法和图示法.

有限集合常用列举法，无限集合常用描述法或区间法，如 $\{a,b,c,d\}$，$\{x \mid x^2-3x+2<0\}=(1,2)$.

(3) 元素与集合的关系

元素与集合的关系是从属关系，用符号"$\in$"或"$\notin$"表示. 如 $a\in\{a,b,c,d\}$，$\frac{1}{2}\notin\{x \mid x^2-3x+2<0\}$.

2. 集合与集合之间的关系

(1) 包含关系

① 子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$). 我们规定：空集是任何集合的子集，即对任何一个集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$. 根据定义易知，任何一个集合是它本身的子集，即对任何一个集合 A，有 $A\subseteq A$.

② 真子集：对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

显然，空集是任何非空集合的真子集.

③ 全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，全集通常用"U"表示.

(2) 相等关系

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

由定义可知，两个相等的集合所含的元素完全相同.

3. 运算关系

集合的运算关系是在全集上进行的.

① 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

② 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

③ 补集：一般地，设 U 是一个集合，A 是 U 的一个子集（即 $A\subseteq U$），由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在全集 U 中的补集（或余集），记为 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

4. 集合之间的逻辑关系

(1) 交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) 并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3) 补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.

(4) 分配律，结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=$

$(A\cap B)\cap C$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

（5）反演律（摩根法则）

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

（6）传递性

若集合 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则集合 $A\subseteq C$.

若集合 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则集合 $A\subsetneqq C$.

【临考提示】

【提示1】 解有关集合问题时，要正确理解集合的有关概念，正确使用有关符号.

【例】给定下面元素与集合或集合与集合之间的关系：①$0\subsetneqq\{0\}$；②$\mathrm{R}\in\{\mathrm{R}\}$；③$\varnothing\in\{\varnothing\}$；④$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$；⑤$\varnothing=\{0\}$；⑥$\{0\}\in\varnothing$；⑦$\varnothing\in\{0\}$；⑧$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，其中正确的序号是（　　）.

A. ②③④⑧　　B. ①②④⑤

C. ②③④⑥　　D. ②③④⑦

本题产生错误的原因有两个：一个是概念不清引起的，误认为 $\mathrm{R}=\{\mathrm{R}\}$，$\varnothing=\{\varnothing\}$；二是空集的性质“空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集”，这个重要性质没有把握，不区别 $\varnothing\in\{\varnothing\}$，$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

答案：A

【提示2】 集合的运算主要有两类问题，一是直接求两个以上集合的交、并、补集；二是已知其运算结果，求其中某些元素应具备的条件.

【例】（1）$P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathrm{R}\}$，$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathrm{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于（　　）.

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　　D. $[1,+\infty)$

(2) $A=\{x \mid 2x^2+x+m=0\}$, $B=\{x \mid 2x^2+nx+2=0\}$，且 $A \cap B=\{\frac{1}{2}\}$. 求 $A \cup B$.

【解】(1) 数集 P、Q 中的代表元素是 y，它表示函数的值域，由 $P=\{y \mid y \geqslant 1\}$, $Q=\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$，知 $P \cap Q=P$，故选 D.

(2) 集合 A、B 都是方程的解集，由 $A \cap B=\{\frac{1}{2}\}$ 知 $m=-1$, $n=-5$，由韦达定理可知方程 $2x^2+x+m=0$ 的另一解是 -1，方程 $2x^2+nx+2=0$ 的另一解是 2.

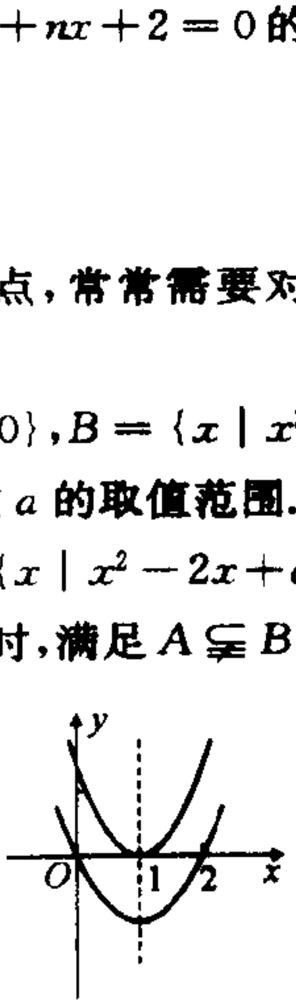
$\therefore A \cup B=\{\frac{1}{2},-1,2\}$.

集合中含参数的问题是一个难点，常常需要对集合中的元素进行分类讨论.

【例】集合 $A=\{x \mid x^2-2x+a \leqslant 0\}$, $B=\{x \mid x^2-3x+2 \leqslant 0\}$，且 $A \subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

【解】$\because B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, $A=\{x \mid x^2-2x+a \leqslant 0\}$，且 $A \subsetneqq B$，$\therefore$ ① 当 $A=\varnothing$ 时，满足 $A \subsetneqq B$，则 $\Delta=(-2)^2-4a<0 \Rightarrow a>1$；

② $A \neq \varnothing$ 时，由于不等式 $x^2-2x+a \leqslant 0$ 对应二次函数 $y=x^2-2x+a$ 的对称轴是 $x=1$，要保证 $A \subsetneqq B$，当且仅当 $A=\{1\}$. 此时 $a=1$（如图）.

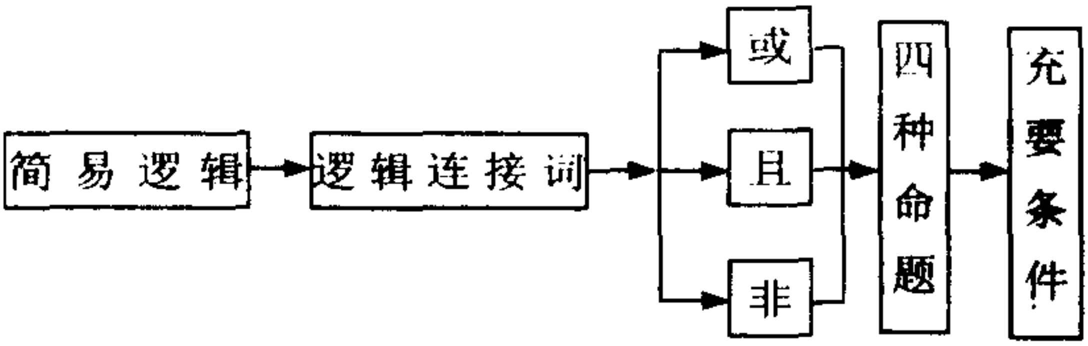


1－1－1

由 ①② 知，当 $a \geqslant 1$ 时，$A \subsetneqq B$.

（二）简易逻辑

知识网络



【临考备忘】

1. 命题的概念

（1）命题：初中数学中命题概念为“判断一件事情的语句”，高中教材中定义为“可以判断真假的语句”，其实质是一样的.

（2）逻辑连接词：“或”、“且”、“非”等词叫做逻辑连接词.

（3）简单命题：不含逻辑连接词的命题叫做简单命题. 简单命题常用小写拉丁字母 p、q、r、s… 表示.

（4）复合命题：由简单命题与逻辑连接词构成的命题叫做复合命题. 复合命题由“p 且 q”，“p 或 q”，“非 p”构成.

2. 四种命题及四种命题的关系

（1）四种命题

一般地，用 p 和 q 分别表示命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式为：

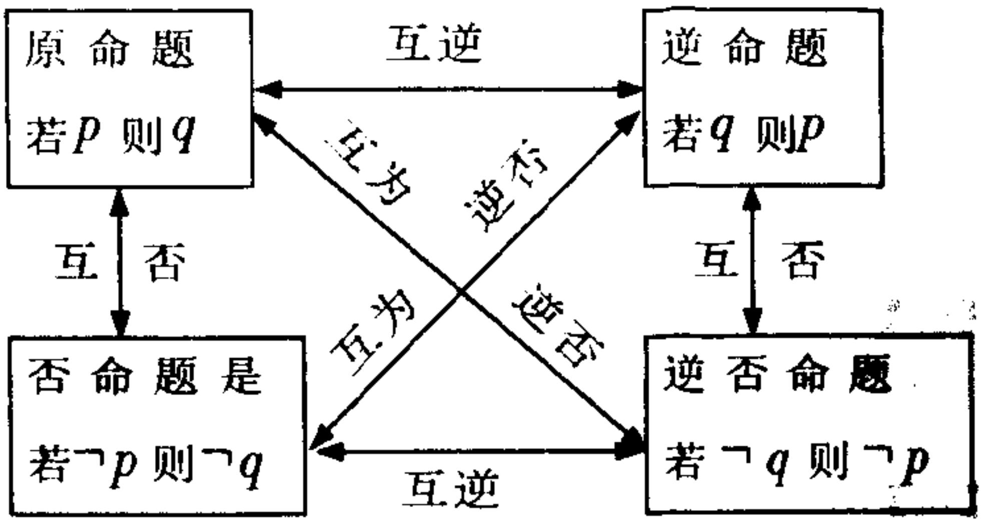
原命题：若 p 则 q（$p \Rightarrow q$）；

逆命题：若 q 则 p（$q \Rightarrow p$）；

否命题：若$\neg p$则$\neg q$（$\neg p \Rightarrow \neg q$）；

逆否命题：若$\neg q$则$\neg p$（$\neg q \Rightarrow \neg p$）.

（2）四种命题之间的关系



原命题与逆否命题等价，逆命题与否命题等价.

（3）反证法

用反证法证明命题的一般步骤为：

第一步：假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立.

第二步：从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾.

第三步：由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

3. 充分条件与必要条件

（1）充分条件：命题$A \Rightarrow B$成立，则A是B的充分条件，B是A的必要条件. 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，则A是B的充分且必要条件，简称充要条件.

（2）“A是B的充分条件”与“B是A的必要条件”是等价的，它们是同一个逻辑关于“$A \Rightarrow B$”的不同表达.

（3）“A是B的充分条件”，亦可说成是“B的充分条件是A”. A是B的充要条件，同时B也是A的充要条件.

充要条件的判断，首先要确定条件是什么，结论是什么；尝试从条件 $\Rightarrow$ 结论，结论 $\Rightarrow$ 条件；判断条件是结论的什么条件.

【例】已知命题 $p:x+y\neq-2$，命题 $q:x$、y 不都为 -1，则 p 是 q 的（　　）条件.

A. 充分非必要　　　　B. 必要非充分

C. 充要"$\neg q\Rightarrow\neg p$"　　　　D. 既非充分也非必要

【解】因为"$\neg q\Rightarrow\neg p$"为真，从而"$p\Rightarrow q$"为真，而"$q\Rightarrow p$"为假，所以 p 是 q 的充分非必要条件，选 A.

【例】p: $\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$　q: $\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}$

问 p 是 q 的什么条件，请说明理由.

【解】$\because \begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$

此命题为真.

又 $\because \begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}$

此命题为假命题，可举反例说明之. 事实上，取 $\alpha=1,\beta=5$，显然 $\alpha+\beta>4$，$\alpha\beta>4$，但不满足 $\alpha>2,\beta>2$.

故 p 是 q 的必要不充分条件.

也就是说，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B（或 B 是 A）的充要条件.

【临考提示】

【提示 1】　判断复合命题真假的方法是：

①"p 或 q"形式的复合命题，只要其中 p、q 中有一个为真，则该复合命题为真；当且仅当 p、q 都为假时，用"或"字连接的复合命题才为假.

② “p 且 q” 形式的复合命题，当且仅当 p、q 都为真时才为真，也就是说：只要 p、q 有一个为假时，它就为假.

③ “非 p” 形式的复合命题的真假情况恰好与 p 相反.

【提示 2】 写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论，然后按定义来写；在判断原命题及逆命题，否命题及逆否命题的真假时，要借助“原命题与其逆否命题同真或同假，逆命题与否命题同真或同假”.

【例】写出下列命题：若 $ab=0$ 则 $a=0$ 或 $b=0$ 的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

【解】逆命题：若 $a=0$ 或 $b=0$，则 $ab=0$，逆命题为真命题.

否命题：若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，否命题为真命题.

逆否命题：若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，则 $ab\neq 0$，逆否命题为真命题.

【提示 3】 能区分“否命题”和“命题的否定”的不同含义. 例如：写出命题“末位数字是0或5的整数，能被 5 整除”的否定及否命题，并判断它们的真假.

命题的否定即命题的“非 p”形式为：末位数字是0或 5 的整数，不能被 5 整除，它是假命题.

否命题为：末位数字不是 0 且不是 5 的整数，不能被 5 整除. 这是真命题.

【提示 4】 掌握反证法的证题方法及适用范围.

一般当待证命题的结论涉及“不可能”、“不是”、“至多”、“至少”、“唯一”字眼时，常常采用反证法.

【例】已知：$a\in \mathrm{R}$，$a+\sqrt{2}$ 是有理数，求证：a 是无理数.

【证法一】假设 a 是有理数，已知 $a+\sqrt{2}$ 是有理数，所

以$(a+\sqrt{2})-a$是有理数，即$\sqrt{2}$是有理数，这与有理数的定义相矛盾．所以假设不成立，故原命题正确．

【证法二】假设a是有理数，那么根据运算法则可知$a+\sqrt{2}$是无理数，这与已知矛盾，所以假设不成立，故原命题正确．

【证法三】假设a是有理数，由已知$a+\sqrt{2}$是有理数，不妨设$a+\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p、q为互质的整数），则$a=\frac{q}{p}-\sqrt{2}$是无理数，这与假设矛盾，所以假设不成立，故原命题正确．

【证法四】直接法．

因为$a+\sqrt{2}$是有理数，$-\sqrt{2}$是无理数，根据运算法则可知$(a+\sqrt{2})+(-\sqrt{2})=a$是无理数，所以$a$是无理数．

【实战点拨】

【例1】已知直线l、m，平面α、β，且$l\perp\alpha$，$m\subset\beta$，给出下列四个命题：①若$\alpha /\!/ \beta$，则$l\perp m$；②若$l\perp m$，则$\alpha /\!/ \beta$；③若$\alpha\perp\beta$，则$l /\!/ m$；④若$l /\!/ m$，则$\alpha\perp\beta$．其中正确命题的个数是（　　）．

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

【分析】依据线面平行和垂直的判定定理和性质定理进行判断．

【答案】B．①④是正确命题，对于①，$\because \alpha /\!/ \beta, l\perp\alpha$，$\therefore l\perp\beta$，又$m\subset\beta$，$\therefore l\perp m$．对于④，$\because l /\!/ m, l\perp\alpha$，$\therefore m\perp\alpha$，$\therefore \beta\perp\alpha$．

【例2】①若四点不共面，则无任何三点共线；②若两直线无公共点，则两直线是异面直线．则这两个命题的逆命题正确的是（　　）．