最新版21世纪高等学校导学与导考教材

大学物理学习与指导

王亚民 主编

Daxue wuli xuexi yu zhidao

陕西科学技术出版社

21 世纪高等学校导学与导考教材

大学物理学习与指导

主　编　王亚民
副主编　孟泉水　郭长立

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习与指导/王亚民主编 .—西安:陕西科学技术出版社,2003.3
ISBN 7-5369-3623-0

Ⅰ.大... Ⅱ.王... Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 014637 号

出版者 陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号 邮编 710003
电话(029)7211894 传真(029)7218236
http://www.snstp.com
发行者 陕西科学技术出版社
电话(029)7212206 7260001
印 刷 西安建筑科技大学印刷厂
规 格 880mm×1230mm 32 开本
印 张 10
字 数 310 千字
版 次 2003 年 3 月第 1 版
2003 年 3 月第 1 次印刷
定 价 13.50 元

前　　言

本书是为配合《大学物理》课的学习所编写的辅导教材。全书共分10章。每章包括四个部分:基本要求、内容提要、解题示例与自我测验。为了帮助学生进行综合练习并与教材进度相适应,在本书教材中间和最后各配有20套模拟试题,供两学期使用。各类题目在教材后都给出了参考答案。

它是学习《大学物理》必不可少的一本指导书。在选材与讲法上力求简明扼要、内容准确、选题典型、覆盖面广。通过本书的学习,对于了解各章基本要求、掌握重点和理解难点将有所裨益,特别在解题技能上将会得到较好的训练。本次编写是以国家教委颁发的《高等工业学校大学物理课程教学基本要求》为指导,为了提高学生的科学素质,适应培养21世纪高科技人才的需要,适当增加了近代物理部分的内容。

参加本书编写工作的有:田玉仙(第1章),渊小春(第2章),王亚民(第3、10章及模拟试题11~20套),孟泉水(第4、5、6章及模拟试题1~5套),郭长立(第7、8、9章及模拟试题6~10套),由王亚民教授负责全书主审与统稿工作,王树林教授对全稿进行了仔细复审工作。

在编写过程中得到了西安科技学院物理教研室各位教师的大力支持和帮助,并提出了宝贵的意见,袁恒志副教授和海彦合教授等同志在书的编写中作了大量的工作,董丽红为本书的出版给予了极大的帮助,在此编者向他们一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免有疏漏和错误之处,衷心希望读者提出宝贵意见。

编者

2003年2月

目　录

第 1 章　质点力学

1.1　质点运动学

一、基本要求

(1) 掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量．

(2) 明确运动方程的意义．了解在已知速度(或加速度)和初始条件的情况下建立运动方程的方法．

(3) 根据用直角坐标表示的运动方程，能熟练地计算质点在平面内运动的位移、速度和加速度．根据用平面极坐标表示的运动方程，能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度．能运用相对速度和相对加速度的概念解题．

二、内容提要

1. 基本概念

(1)位置矢量(矢径)$\boldsymbol{r}$：从坐标原点到某时刻质点位置所引的矢量．

在直角坐标系中，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$．

(2)位移 $\Delta\boldsymbol{r}$：自运动始点指向终点的有向直线线段．用 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 表示．它描述质点在 Δt 时间内位置的变化．

(3)速度 $\boldsymbol{v}$：描述质点运动快慢的物理量，其中：

平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，瞬时速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$.

(4)加速度 $\boldsymbol{a}$：描述质点速度变化快慢的物理量，其中：

平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$，　瞬时加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

在平面运动情况下：

$$a = \frac{dv_x}{dt}i + \frac{dv_y}{dt}j = a_x i + a_y j.$$

在自然坐标系中：

$$a = a_n n + a_\tau \tau = \frac{v^2}{\rho}n + \frac{dv}{dt}\tau.$$

式中 n 为法线方向的单位矢量，τ 为切线方向的单位矢量，a_τ 为切向加速度，a_n 为法向加速度，ρ 为质点所在点的曲率半径．

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \tan\theta = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

θ 为 a 与切线方向的夹角．

2．运动方程

质点的位置随时间变化的关系，即位置矢量 r 与时间 t 的函数关系式，称为质点的运动方程．在平面运动的情况下，为

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j, \text{或} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

匀速直线运动的方程为　$x = x_0 + vt$.

匀变速直线运动的方程为　$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

从质点的运动方程，可以求得任一时刻质点的位置、速度和加速度．反之，若已知 $a(t)$ 或 $v(t)$ 以及初始条件，通过积分可以求得质点的运动方程．

3．运动叠加原理

一个运动可以看成由几个同时进行的各自独立的运动叠加而成，称为运动的叠加原理．像抛体运动（$a = -g$）可以看成水平方向匀速直线运动和竖直方向匀变速直线运动的叠加．

4．相对运动

在两个参照系（“静”系 K 和“动”系 K'）中观测同一质点 A 的运动：

相对速度为 $v_{AK} = v_{AK'} + v_{K'K}$.

相对加速度为 $a_{AK} = a_{AK'} + a_{K'K}$.

三、解题示例

例 1－1　有一物体作直线运动，其运动方程为 $x = 6t^2 - 2t^3$(SI)，试求：(1)第 2s 内的平均速度；(2)第 3s 末的速度；(3)第 1s 末的加速度；(4)这物体做什么类型的运动？

解　$$\because x=6t^2-2t^3, \quad ①$$

$$\therefore v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-6t^2, \quad ②$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=12-12t. \quad ③$$

(1)利用式①,第 2s 内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{(6t^2-2t^3)\mid_{t=2}-(6t^2-2t^3)\mid_{t=1}}{2-1}=4\mathrm{m/s}$$

(2)第 3s 末的速度:将 $t=3$s 代入式②得

$$\bar{v}_3=(12t-6t^2)\mid_{t=3}=-18\mathrm{m/s}.$$

速度为负值表示物体此时的运动方向与 x 轴正向相反 .

(3)第 1s 末的加速度:将 $t=1$s 代入式③得

$$a_1=(12-12t)\mid_{t=1}=0.$$

(4)从式①~③知,物体的速度与加速度都是时间 t 的函数,所以这个运动是一般的变速直线运动 .

从此例看出运动方程的重要性,有了它,可求出质点在任何时刻的位置、速度和加速度,这是运动学的第一类问题 .

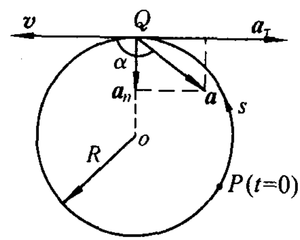

图 1-1

例 1-2　一质点沿半径为 R 的圆做圆周运动,设当质点运动到 P 点时开始计时,其路程从 P 点开始用圆弧 PQ 表示,令 $PQ=s$,它随时间的变化规律为 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$,v_0、b 都是正的常量如图 1-1 所示 . 求:(1)t 时刻质点的加速度;(2)t 为何值时加速度的大小等于 b? (3)加速度大小达到 b 时,质点已沿圆周运行了几圈?

解　(1)先求出质点的速率

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0t-\frac{1}{2}bt^2\right)=v_0-bt, \quad ①$$

可见,v 随时间 t 变化,即质点作匀变速圆周运动,欲求质点的加速度,需先求切向加速度和法向加速度 .

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}, \quad ②$$

a_n 随 t 变化,切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_0-bt)=-b, \qquad ③$$

负号表示 a_τ 的方向与该处速度 v 方向相反.

质点在 t 时刻加速度的大小为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}. \qquad ④$$

加速度与速度间的夹角为

$$\alpha=\arctan\left[\frac{(v_0-bt)^2}{-Rb}\right].$$

(2)按照题意及式④有

$$\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}=b,$$

由此解出 $t=\frac{v_0}{b}$时,加速度的大小等于 b.

(3)从式①可知:当 $t=\frac{v_0}{b}$时,$v=0$. 因此从 $t=0$ 到 $t=\frac{v_0}{b}$这段时间内,v 恒为正值,质点已转过的圈数 n 为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{1}{2\pi R}\left[v_0\left(\frac{v_0}{b}\right)-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2\right]=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}.$$

讨论:在 $t=\frac{v_0}{b}$时,$v=0$,$a_n=0$,这意味着什么? 又当 $t>\frac{v_0}{b}$时,v 将如何变化? 由此说明质点沿圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动的全过程.

例 1-3 一个正在行驶的快艇在发动机关闭后,有一个与它速度方向相反的加速度,其大小与它的速度平方成正比,即$\frac{dv}{dt}=-kv^2$,式中 k 为常数. 试证明快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$. 其中 v_0 是发动机关闭时的速度.

证明 已知$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$,分离变量再积分得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^t-kdt,\therefore\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt. \qquad ①$$

从式①知 t 时刻的速度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=\frac{v_0}{1+kv_0t}$,$\mathrm{d}x=\frac{v_0dt}{1+kv_0t}$,令 $t=$

$0, x=0$,两边积分得

$$x=\int_0^t \frac{v_0}{1+kv_0t}\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t), \qquad ②$$

联立式①和②消去 t,得　$x=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{v_0}{v}$.

$\therefore\quad v=v_0e^{-kx}$,　　　得证 .

已知速度或加速度,经过积分,利用起始条件,便可得到运动方程,这是运动学的第二类问题 .

例 1－4　河水自西向东流,速度为 10km/h. 船在水中行,相对河水的航向为北偏西 30°,相对水的航速为 20km/h. 此时风向为正西,风速为 10km/h. 求在船上看到地面上烟囱冒出烟的飘向 .

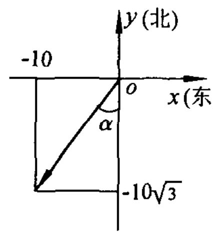

图 1－2

解　烟的飘向是指混有烟尘的空气的船的速度方向,即 $\boldsymbol{v}_{气船}$,按照相对速度脚标法 $\boldsymbol{v}_{气船}=\boldsymbol{v}_{气地}$(即风速)$+\boldsymbol{v}_{地水}$(即水速的负值)$+\boldsymbol{v}_{水船}$(船速的负值).

以向东为 x 轴正方向,向北为 y 轴正方向,取坐标如图 1－2 所示,代入题给数值(以 km/h 为单位),有

$$\boldsymbol{v}_{气船}=-10\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{i}-(-20\sin30°\boldsymbol{i}+20\cos30°\boldsymbol{j})=-10\boldsymbol{i}-10\sqrt{3}\boldsymbol{j},$$

$$v_{气船}=\sqrt{(-10)^2+(-10\sqrt{3})^2}=19.9\text{km/h},$$

$$\alpha=\arctan\frac{-10}{-10\sqrt{3}}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=30°.$$

即烟对船的速度大小为 19.9km/h,飘向为南偏西 30°.

1.2　质点动力学

一、基本要求

(1) 掌握牛顿第二定律及其适用条件 . 能用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点动力学问题 .

(2) 掌握功的概念,能计算直线运动情况下变力的功 . 理解保守力作功的特点及势能的概念,会计算重力、弹性力和万有引力势能 .

(3) 掌握质点的动能定理和动量定理,能用它们分析、解决质点在平

面内运动时的简单力学问题．

(4) 掌握机械能守恒定律、动量守恒定律及其适用条件．掌握运用守恒定律分析问题的思路和方法，能分析简单系统在平面内运动的力学问题．

二、内容提要

1．力的瞬时作用

物体受到外力作用的瞬间产生加速度，改变其速度．

(1)牛顿运动定律，数学表达式为 $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$.

在直角坐标系中，　$\sum \boldsymbol{F}_x = ma_x$，　$\sum \boldsymbol{F}_y = ma_y$.

在自然坐标系中，
$$\begin{cases} \sum \boldsymbol{F}_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho}, \\ \sum \boldsymbol{F}_\tau = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

(2)隔离体法：碰到几个有联系的物体构成的系统时，要把研究对象从系统的整体中隔离出来，正确画出其他物体对研究对象的作用力，这一方法称为隔离体法．运用此法解题的步骤是：

1)确定研究对象．

2)分别画出每个研究对象的示力图，画示力图时，先画出重力，再画接触力(弹力和摩擦力)及外力，这一步特别重要，不能遗漏所受的力，也不能重复(坐标系的选取应使分解的力越大越好，且待求量最好在一个坐标轴上)．

3)建立适当的坐标系并列出方程．

4)找出几个物体相互联系的关联方程，正确求解方程组．

这一解题法可归纳成：**定→画→列→解**．

2．力的空间积累作用

作功改变物体的动能．

(1)功：恒力的功 $A = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$．功是标量，有正、负，单位是 J(焦耳)．

变力的功 $A = \int \mathrm{d}A = \int_b^a \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，$\mathrm{d}A$ 是元功，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是位移元．

(2)动能定理：研究对象受到的外力与内力所作的功之和等于研究对象动能的增量，即

$$\sum (A_{外力} + A_{内力}) = E_k - E_{k0}.$$

如果研究对象是质点,则没有内力作功问题．该定理描述了力的空间积累作用的效果,把功和能两个重要物理量联系起来．

(3)功能原理:系统中外力和非保守内力作功之和,等于系统机械能的增量,即

$$\sum(A_{外力}+A_{非保守内力})=E-E_0.$$

1)保守力作功的特点:保守力作功与路径无关,只与始末两个状态有关．

$$\oint_l \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=0.$$

2)势能:物体间因保守力作用而具有的与位置(或形状变化)有关的能量．势能为系统所共有,其值取决于零势能点的选取．

重力势能为　$E_P=mgh$(以 $h=0$ 处为零势能点);

弹性势能为　$E_P=\frac{1}{2}kx^2$,(k 为倔强系数,以弹簧原长处为零势能点);

引力势能为　$E_P=-G\frac{Mm}{r}$,(G 为引力常数,以 m、M 相距 $\gamma=\infty$ 处为零势能点).

势能定理:$A_{保守内力}=E_{P_0}-E_P=-\Delta E_P$.

3)动能和势能的总和称为机械能,即 $E=E_k+E_P$.

(4)机械能守恒定律:若只有保守内力对系统作功,则系统的机械能保持不变,即

$$E=E_k+E_P=恒量.$$

3．力的时间积累作用

产生冲量,改变物体的动量．

(1)冲量:恒力的冲量 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}\Delta t$．冲量是矢量,方向为 $\boldsymbol{F}$,单位是 N·s.

变力的冲量为　$\boldsymbol{I}=\int_0^t \boldsymbol{F}dt$.

(2)动量定理:研究对象所受合外力的冲量等于该对象动量的增量,即 $\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_t-m\boldsymbol{v}_0$．该定理描述了力的时间积累作用的效果．冲量的方向是物体末动量和初动量的矢量差的方向,利用动量定理可求出平均作用力:

$$\boldsymbol{F}=\frac{\Delta(m\boldsymbol{v})}{\Delta t}.$$

(3)动量守恒定律:若系统中所受合外力 $\sum \boldsymbol{F}_{外}=0$,则系统的动量

保持不变,即 $\sum m_i\boldsymbol{v}_i =$ 恒矢量.

实际应用该定律时,有两个重要情况:

1) $\sum \boldsymbol{F}_{外} \ll \boldsymbol{F}_{内}$,且作用时间极短时,尽管有外力作用,但系统动量仍近似守恒.

2)系统的合外力虽不等于零,但合外力在某一方向上的分量为零,则系统总动量不守恒,但在该方向上的分量仍然守恒.

碰撞过程由于作用时间极短,冲力(属于系统的内力)极大,因而参与碰撞的几个物体在碰撞前后的总动量保持不变,这是动量守恒定律的重要应用.

三、解题示例

例 1-5　水平面上有一质量 M 为 51kg 的小车 D,其上有一定滑轮 C,通过绳在滑轮两侧分别连有质量为 $m_1 = 5$kg 和 $m_2 = 4$kg 的物体 A 和 B,其中物体 A 在小车的水平台面上,物体 B 被绳悬挂.系统处于静止瞬间,如图 1-3 所示,各接触面和滑轮轴均光滑.求以多大力 F 作用于小车上,才能使物体 A 与小车 D 之间无相对滑动.(滑轮和绳的质量均不计,绳与滑轮间无滑动)

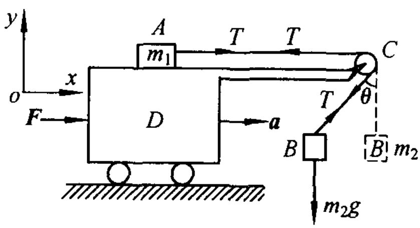

图 1-3

解　按隔离体法的步骤求解.研究对象为物体 A、B 和小车 D,设小车受的水平作用力为 $\boldsymbol{F}$,系统获得向右加速度为 $\boldsymbol{a}$,选坐标如图 1-3 所示,当 A 和 D 之间无相对滑动时,B 在 y 方向应平衡,由于 B 在 x 方向也具有加速度 a,故绳应向左偏离 θ 角,使绳中张力 T 有水平向右的分力.分别画出 A、D、B 的示力图,对 A、D 只需画出 x 方向受的力.

分别列出 A、B、D 的牛顿运动方程:

对 A:　$T = m_1 a,$　①

对 B:　$T\sin\theta = m_2 a,$　②

　　　$T\cos\theta = m_2 g,$　③

对 D:　$F - T(1+\sin\theta) = Ma.$　④

联解式①~④,得 $F = (m_1 + m_2 + M)\dfrac{m_2 g}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}$,代入数值,求得 F

$= 784\text{N}.$

例 1－6 用跨过滑轮的细绳，以大小不变的拉力 $F = 60\text{N}$ 牵引一质量 $m = 2.0\text{kg}$ 的物体，使之沿倾角 $\theta = 30°$ 的光滑斜面运动．已知物体在 A 与 B 处的绳子与斜面分别成 $\alpha_1 = 45°$、$\alpha_2 = 60°$ 角，滑轮离物体的垂直距离 $h = 6\text{m}$，求物体从静止开始自 A 移到 B 的过程中重力与拉力所作的功．

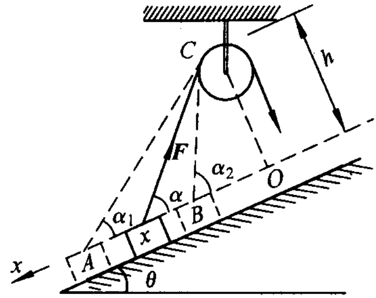

图 1－4

解 研究对象是物体 m，自 A 移到 B 的过程中，重力是恒力（大小、方向均不变），而拉力 F 是变力，F 的大小虽不变，但方向不断变化，重力作的功

$$
\begin{aligned}
A_p &= mg \cdot AB\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
&= -mg(oA - oB)\sin\theta \\
&= -mgh(\cot\alpha_1 - \cot\alpha_2)\sin\theta.
\end{aligned}
$$

代入具体数值可求得 $A_p = -24.9\text{J}$.

拉力作的功是变力功．取坐标如图 1－4 所示，即原点为 o，沿斜面向下为 x 轴正向，当物体移动位移元 $\mathrm{d}x$ 时，拉力作的元功 $\mathrm{d}A = -F\cos\alpha\mathrm{d}x$（负号的引入，是因为当位移方向与 x 轴正向相反时，增量 dx 本身为负值）. 因此拉力 F 作的功为

$$A_F = \int_A^B \mathrm{d}A = -\int_A^B F\cos\alpha\mathrm{d}x \qquad ①$$

这里有两个变量 α、x，为统一积分变量，应找出物体在任意位置 x 处 α 和 x 之间的关系，即

$$x = h\cot\alpha, \quad \mathrm{d}x = h\mathrm{d}(\cot\alpha) = -h\csc^2\alpha\mathrm{d}\alpha. \qquad ②$$

将式②代入式①

$$A_F = Fh\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\csc^2\alpha\mathrm{d}x = Fh\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mathrm{d}(\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} = Fh\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\sin\alpha_2}\right).$$

代入具体数值，可求得 $A_F = 93.5\text{J}$.

运用动能定理，还能求出物体到达 B 点时的速率．

例 1－7 质量为 m_1 的物体 A，在离平板 B 的距离为 h 处自由下落，并与平板 B 作完全非弹性碰撞．已知平板 B 的质量为 m_2，且 $m_2 = m_1 = M$. 开始时，平板 B 置于倔强系数为 k 的轻质弹簧上，并处于平衡，如图

1－5所示．试求 A 与 B 碰撞后，弹簧被压缩的最大长度．

解 这是涉及碰撞的综合题，最好采用分段法，即把整个运动过程分成三段：m_1 的自由下落，m_1 与 m_2 的碰撞，m_1 和 m_2 共同压缩弹簧．

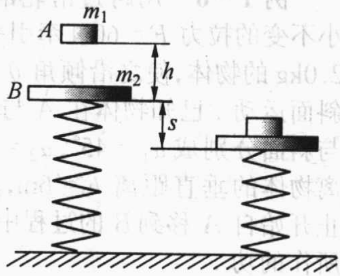

图 1－5

(1) m_1 自由下落：设 m_1 在相碰之前，速度的大小为 v_0，由机械能守恒得

$$v_0=\sqrt{2gh}. \qquad ①$$

(2) m_1 与 m_2 的碰撞：将 m_1，m_2 视为一系统，由于是完全非弹性碰撞，系统的机械能不守恒，但动量守恒，设相碰后 m_1 和 m_2 共同以速度 v 运动．

由动量守恒定律得

$$(m_1+m_2)v=m_1v_0. \qquad ②$$

因 $m_1=m_2$，并计入①式的结果得

$$v=\frac{v_0}{2}=\sqrt{\frac{gh}{2}}. \qquad ③$$

(3) 压缩弹簧：碰撞后弹簧被压缩，直至压缩到某一最大长度（设为 s）时 m_1 和 m_2 的瞬时速度为 0．该过程中，研究的系统是 m_1、m_2、弹簧和地球，因为只有重力和弹性力作功，系统的机械能定恒．

由于涉及势能，必须选取零势能的位置，通常选弹簧原长处为弹性势能的零点；在 m_2 与弹簧处于平衡位置处为重力势能零点，此处弹簧被 m_2 压缩的长度 x_0 可由下式求出．

$$m_2g = kx_0. \qquad ④$$

因此系统从 x_0 到 x_0+s 的机械能守恒式为

$$\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=\frac{1}{2}k(x_0+s)^2-(m_1+m_2)gs. \qquad ⑤$$

联立式③、④和⑤，解得

$$s = \frac{Mg}{k}+\sqrt{\left(\frac{Mg}{k}\right)^2+\left(\frac{Mg}{k}\right)h}.$$

选取其他的零势能位置，机械能守恒的表述式不同，但结果是一样的．

例 1－8 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$ (SI)，式中 a、b、ω 是正值常数，且 $a>b$，求：

(1)质点在 A 点$(a,0)$时和 B 点$(0,b)$时的动能；

(2)质点所受的作用力 $\boldsymbol{F}$ 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 $\boldsymbol{F}$ 的分力 F_x 和 F_y 分别作的功．

解　从矢径 $\boldsymbol{r}$ 表达式，知 $x=a\cos\omega t$，$y=b\sin\omega t$，

$$\therefore v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t,\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b\omega\cos\omega t.$$

(1)A 点$(a,0)$，$\cos\omega t=1$，$\sin\omega t=0$，

$$\therefore E_{KA}=\frac{1}{2}mv_{xA}^2+\frac{1}{2}mv_{yA}^2=\frac{1}{2}mb^2\omega^2.$$

B 点$(0,b)$，$\cos\omega t=0$，$\sin\omega t=1$，

$$\therefore E_{KB}=\frac{1}{2}mv_{xB}^2+\frac{1}{2}mv_{yB}^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

(2)从 v_x、v_y 的表示式得加速度的分量为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{dt}=-a\omega^2\cos\omega t,\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{dt}=-b\omega^2\sin\omega t,$$

$$\therefore \boldsymbol{F}=ma_x\boldsymbol{i}+ma_y\boldsymbol{j}=-ma\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-mb\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j},$$

$$\because F_x=-ma\omega^2\cos\omega t=-m\omega^2x,$$

$$F_y=-mb\omega^2\sin\omega t=-m\omega^2y.$$

质点从 A 运动到 B 的过程中，分力为 F_x、F_y 所作的功分别为(变力功)

$$A_x=\int_a^0F_x\mathrm{d}x=-m\omega^2\int_a^0x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ma^2\omega^2,$$

$$A_y=\int_0^bF_y\mathrm{d}y=-m\omega^2\int_0^by\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}mb^2\omega^2.$$

自测题

一、选择题

1. 质量为 0.125kg 的质点受到合力 $\boldsymbol{F}=t\boldsymbol{i}$N($t$ 的单位是 s)的作用，当 $t=0$s 时，该质点以 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{j}$m/s 的速度通过坐标原点，该质点的运动学方程是(　　).

(A)$2t^2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$　　(B)$4t^3\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$

(C)$\frac{4}{3}t^3\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$　　(D)$\frac{4}{3}t^3\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}t\boldsymbol{j}$