工科课程解题题典丛书

高等数学

解题题典

崔荣泉 杨泮池 编

西北工业大学出版社

内容简介

本书精选了近千道工科高等数学典型题目，每道题给出了解答，多数题作了分析或注解，力图通过本书使读者学会从分析题意入手，启发读者掌握解高等数学各类题目的方法和技巧，以提高分析问题解决问题的能力，本书还收入了部分历年考研的数学题目，使本书不仅可作为工科高校大学生学习高等数学的参考书，也可供报考硕士研究生的考生复习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题题典/崔荣泉，杨泮池编．西安：西北工业大学出版社，2002.8

(工科课程解题题典丛书)

ISBN 7-5612-1452-9

Ⅰ．高… Ⅱ．崔… Ⅲ．杨… Ⅳ．高等数学—高等学校—解题 Ⅴ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009908 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电话：(029)8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司印装
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：27.75
字　　数：502 千字
版　　次：2002 年 9 月第 1 版　　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～6 000 册
定　　价：35.00 元

前　言

高等数学是工科学校最主要的基础课之一，解证一定数量的习题是学好高等数学必需的，也是重要的环节。这不仅是为了巩固和掌握课内所学内容，而且是对课内知识的加深和拓广，这将有助于学生能力与创新精神的培养。为此，我们编写了这本书。书中精选了近千道典型题目，除给出详尽的解答外，对许多题目都作了分析与注解，主要是点出解题的关键、思路和技巧。希望读者在使用本书时，能边阅读、边动手推导，边动脑筋思考以达到学以致用的目的。

本书紧扣高等数学课程的基本要求，可作为高等数学的教学参考书。另外，书中还含有部分考研题目（见 * 号标记），以期对考研的学生有所裨益。

限于作者水平，疏漏及不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 3 月

目　　录

第一章

函数与极限

Ⅰ. 客观题

一、填空题

1.1　已知函数 $f(x-1)=x^2+1$，则 $f(x)=$ ________.

解　令 $x-1=u$，即 $x=u+1$，那么

$$f(u)=(u+1)^2+1=u^2+2u+2$$

将变量 u 换为 x，得

$$f(x)=x^2+2x+2$$

$f(x)=x^2+2x+2$

注　填空题是一种重要的客观题题型，正确的填写答案来自严格的推证与细致的计算.

1.2　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x^2)$ 的定义域是 ________，$f(\sin x)$ 的定义域是 ________.

解　由于 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$，那么 $f(x^2)$ 的定义域可由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 确定，即 $|x|\leqslant 1$ 或 $D=[-1,1]$. 同理，对于 $f(\sin x)$，$0\leqslant \sin x\leqslant 1$，由此，它的定义域是 $D=[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n\in \mathbf{Z}$.

$D=[-1,1]$

$D=[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n\in \mathbf{Z}$

注　函数的定义域与对应关系是确定函数的两要素.

1.3 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)=$ ________,其定义域 $D_1=$ ________,$f\left(\dfrac{2}{x}\right)=$ ________,其定义域 $D_2=$ ________,$f\left(\dfrac{x}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域 $D=$ ________.

解 将$\dfrac{x}{3}$与$\dfrac{2}{x}$分别代入 $f(x)$ 即得

$$f\left(\frac{x}{3}\right)=\ln\frac{3+x}{3-x},\text{与 } f\left(\frac{2}{x}\right)=\ln\frac{x+2}{x-2}$$

根据对数函数的定义知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $|x|<1$,因而 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)$的定义域为$\left|\dfrac{x}{3}\right|<1$,即 $D_1=(-3,3)$. $f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域为$\left|\dfrac{2}{x}\right|<1$,即 $|x|>2$ 或 $D_2=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域是 $D=D_1\cap D_2=(-3,-2)\cup(2,3)$.

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\ln\dfrac{3+x}{3-x}$

$D_1=(-3,3)$

$f\left(\dfrac{2}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

$D_2=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

$D=(-3,-2)\cup(2,3)$

注 本题求解的关键是熟悉对数函数的定义.

1.4 函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数是 $y=$ ________.

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x=y^3-1$,调换变量 x,y 得 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数是 $y=x^3-1$.

$y=x^3-1$

注 这虽是求反函数的一个很简单的题目,但它体现了求反函数的基本步骤.

1.5 初等函数 $y=|x|$ 是由基本初等函数 $y=$ ________与基本初等函数 $u=$ ________复合而成.

解 由幂函数 $y=\sqrt{u}$ 与幂函数 $u=x^2$ 复合成

$$y=\sqrt{x^2}=|x|$$

$y=\sqrt{u}$

$u=x^2$

注 $\sqrt{x^2}$ 与 $|x|$ 是同一个函数,因为它们有相同的定义域和相同的对应关系.

1.6 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

则 $f[f(x)]=$ ________.

解 因为

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$$

$f[f(x)]=1$

又由于对任何 x 都有 $|f(x)| \leqslant 1$，则 $f[f(x)] = 1$.

1.7　$\arctan(-\sqrt{3}) + \arctan(-1) =$ ________.　$-\frac{7}{12}\pi$

解　因为 $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

所以　$\arctan(-\sqrt{3}) + \arctan(-1) = -\frac{7}{12}\pi$

1.8　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} =$ ________.　$\frac{1}{4}$

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{2x^2(1+\sqrt{1-x^2})} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{4}$$

1.9　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2-x} =$ ________.　0

解　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2-x} = 0$.

注　有界量与无穷小量的积为无穷小量.

1.10　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^4$，则 $a =$ ________.　$a = 4$

注　这里应用了著名极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = e^a$

则 $a = 4$.

1.11　设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x = 2$ 连续，则 $a =$ ________.　$a = 4$

解　$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

$$f(2) = a$$

$f(x)$ 在 $x = 2$ 连续，应有 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$，即 $a = 4$.

1.12　函数 $y = \frac{1}{\sin\pi x}$ 的间断点是 $x =$ ________，它们是第________类间断点.　$x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$　二

解　函数 $y = \frac{1}{\sin\pi x}$ 在 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 处没有

定义,所以它们是这个函数的间断点,而且 $x \to k(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,$y \to \infty$. 这些间断点都是无穷型间断点,因而是第二类间断点.

1.13 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5}{5x+2} \sin \dfrac{2}{x} =$ ________.

$\dfrac{6}{5}$

解 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5}{5x+2} \sin \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+5}{5x+2} \cdot \dfrac{2}{x} =$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+10}{5x^2+2x} = \frac{6}{5}$$

注 这里应用了等价无穷小代换 $\sin \dfrac{2}{x} \sim \dfrac{2}{x}$.

二、单项选择题

1.14 函数 $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ 的反函数是(　　).

(A) $y = \log_2 \dfrac{1-x}{1+x}$; (B) $y = \log_2 \dfrac{1+x}{1-x}$;

(C) $y = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$; (D) $y = \log_2 \dfrac{x}{1+x}$.

C

解 直接由原式解出 $x = \log_2 \dfrac{y}{1-y}$,调换 x 与 y 得

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x}$$

故选(C).

注 这种选择题有一个且仅有一个选择是正确的,故可以利用某些特殊点对应的函数值加以判断. 本题可对直接函数设 $x=0$ 求出 $y=\dfrac{1}{2}$,然后以 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入(A),(B),(C),(D),恰好(C)的 $y=0$. 即可断定选(C). 这种方法适用于单值函数.

1.15 设函数 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,则复合函数(　　)是奇函数.

(A) $f[f(x)]$; (B) $g[f(x)]$;

(C) $f[g(x)]$; (D) $g[g(x)]$.

A

解 令 $\varphi(x) = f[f(x)]$,

$$\varphi(-x) = f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)] = -\varphi(x)$$

故选(A).

1.16 设

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ x\leqslant 0\\ x+2,\ x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\ -x,\ x\geqslant 0\end{cases}$$

则 $f[g(x)]=($　　$)$.

(A) $\begin{cases}x^2+2,\ x<0\\ 1-x,\ x\geqslant 0\end{cases}$;　(B) $\begin{cases}1-x^2,\ x<0\\ 2+x,\ x\geqslant 0\end{cases}$;

(C) $\begin{cases}1-x^2,\ x<0\\ 2-x,\ x\geqslant 0\end{cases}$;　(D) $\begin{cases}x^2+2,\ x<0\\ 1+x,\ x\geqslant 0\end{cases}$.

解　由 $f(x)=\begin{cases}1-x,\ x\leqslant 0\\ x+2,\ x>0\end{cases}$ 知

$f[g(x)]=\begin{cases}1-g(x),\ g(x)\leqslant 0\\ g(x)+2,\ g(x)>0\end{cases}$,又由内层函数 $g(x)$ 知,$x\geqslant 0$ 时 $g(x)=-x\leqslant 0$,$x<0$ 时　$g(x)=x^2>0$,因此

$$f[g(x)]=\begin{cases}1+x,\ x\geqslant 0\\ x^2+2,\ x<0\end{cases}$$

故选(D).

D

注　这是一个很典型的题目,它考查读者对复合函数的理解.求解的关键是搞清楚内层函数的值域含在外层函数的定义域内.

1.17　已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,那么 $f[f[f(x)]]=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{1-x}$;　(B) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$;

(C) x;　(D) $1-x$.

解　$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$$

$$f[f[f(x)]]=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x$$

故选(C).

C

注　这类题目由内层向外层作,比较简便.

1.18　若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=4$,则 $a=($　　$)$

(A) 1;　(B) -1;　(C) ln3;　(D) ln2.

D

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{2a}}\right]^{2a}=e^{2a}$$

$$e^{2a} = 4$$

$$a = \ln 2$$

故选(D).

1.19 (1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________条件；数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的________条件. B A

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的________条件；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的________条件. B A

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的________条件；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内无界的________条件. B A

(4) 左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的________条件. C

(5) 函数 $f(x)$ 在闭区间上连续是函数 $f(x)$ 在该区间上有界的________条件。 A

(A) 充分；　(B) 必要；

(C) 充分且必要；　(D) 不充分也不必要.

1.20 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ a, & x \geqslant 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} b, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

若 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则(　　). C

(A) $a = 1,\ b = 2$；　(B) $a = 2,\ b = 1$；

(C) $a = b = 1$；　(D) $a = b = 2$.

解 选 $a = 1$ 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，选 $b = 1$ 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，因此选(C)，即 $a = 1,\ b = 1$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

1.21 设 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是(　　). D

注 排除法是选择题的常用解法.

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散；

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必无界；

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小；

(D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

解　应用排除法.设 $x_n=1,0,2,0,\cdots,n,0,\cdots,y_n=0$,那么 $x_ny_n\to 0$,但 x_n 发散而 y_n 收敛,则排除(A),这时 x_n 无界但 y_n 有界,则排除(B).

又设 $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=n$, 那么 $x_ny_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$.这时 x_n 有界但 y_n 无界,排除(C).

排除了(A),(B),(C),只能选(D).

三、多项选择题

1.22　下列函数中,奇函数是(　　),偶函数是(　　),非奇非偶函数是(　　).

C,D,E

B,F

A

注　牢记奇函数与偶函数的定义.

(A) $f(x)=\sin x-\cos x$;

(B) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

(C) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$;

(D) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$;

(E) $f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$;

(F) $f(x)=x\frac{a^x+1}{a^x-1}$.

解　对于(C),(D),(E)中的函数都满足

$$f(-x)=-f(x)$$

因而都是奇函数,对于(B),(F)中的函数都满足

$$f(-x)=f(x)$$

因而都是偶函数,对于(A)中的函数

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$$

$$f(-x)\neq f(x)\quad 且\quad f(-x)\neq -f(x)$$

则(A)中的函数是非奇非偶函数.

1.23　下列函数中周期函数是(　　)

A,C,E

(A) $|\sin x|$;　　(B) $x\sin x$;

(C) $\sin^2 x$;　　(D) $\sin x^2$;

(E) C(常数);　　(F) $\sin\sqrt{x}$.

解　(A)中函数 $|\sin x|$ 以 π 为周期,(C)中函数

$\sin^2 x = \sin x \sin x$ 以 2π 为周期.(E) 中常数 C 是以任意正数 l 为周期,它没有最小正周期.

(B) 中函数 $x\sin x$ 是周期函数 $\sin x$ 与非周期函数 x 的积,故不是周期函数.(D) 中函数 $\sin x^2$ 是非周期函数 $y = u^2$ 与周期函数 $y = \sin u$ 的复合函数,故不是周期函数.(F) 中的函数 $\sin\sqrt{x}$ 的定义域 $x \geqslant 0$,有下界,故不是周期函数.

1.24　函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同的是(　　). A,C,D,E

(A) $f(x) = \tan x$, $g(x) = \dfrac{1}{\cot x}$;

(B) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$,

$g(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$;

(C) $f(x) = \lg(x^2 - 1)$,

$g(x) = \lg(x - 1) + \lg(x + 1)$;

(D) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

(E) $f(x) = \sin(\arcsin x)$, $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

解　(A),(C),(D),(E) 中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数,这是因为它们的定义域不同.

1.25　下列命题成立的是(　　). B,C,E

(A) 有界数列一定收敛;

(B) 无界数列一定发散;

(C) 收敛数列一定有界;

(D) 单调数列一定发散;

(E) 单调有界数列一定收敛.

解　(A) 显然不成立,例如 $1,0,1,0,\cdots$ 为有界数列,但不收敛.(B) 是成立的.(C) 也成立.(D) 不成立,如数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$ 是单调数列,它收敛于零.(E) 成立,这是一条收敛准则.

1.26　若 x_n, y_n 均为无穷小量,那么必有(　　). A,D

(A) $x_n y_n$ 为无穷小量;

(B) $x_n y_n$ 未必为无穷小量;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$;

(D) $x_n + y_n$ 为有界量.

解　无穷小量的积仍为无穷小量,则(A) 成立,(B) 不成立. 只在 x_n 与 y_n 为等价无穷小时才有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$, 则(C) 不成立. 两个无穷小量的和仍为无穷小量,则(D) 成立.

1.27　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续的有(　　).

(A) $f(x)=|x|$;

(B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

(D) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

解　(A) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0, f(0)=0$, 则 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 连续.

(B)
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,而 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 而 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

A, D

注　熟练掌握函数在一点连续性的判定方法,判定分段函数分段点的连续性往往要注意左、右极限.

1.28　下列各题中答案正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}=\mathrm{e}$;

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\mathrm{e}^{-1}$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}=1$;

A,C

注　这类题目要应用著名极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

因此必须将题目中形式转化为这个著名极

(D) $\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}.$

限的形式.

解 (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \mathrm{e}.$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-2} = \mathrm{e}^{-2}.$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right]^{-\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$

由以上计算知答案正确的是(A),(C).

1.29 当 $x\to\infty$ 时,为无穷小量的函数是(　　).

A,B,D

(A) $y = \frac{x\sin(1-x^2)}{1-x^2}$;

(B) $y = \frac{(1-x^2)\sin\frac{1}{1-x^2}}{x}$;

(C) $y = (1-x^2)\sin\frac{x}{1-x^2}$;

(D) $y = \frac{1}{1-x^2}\sin\frac{1-x^2}{x}$.

解 (A) $x\to\infty$ 时 $\frac{x}{1-x^2}\to 0$,而 $\sin(1-x^2)$ 为有界量,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin(1-x^2)}{1-x^2} = 0$

(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-x^2)\sin\frac{1}{1-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{1-x^2}}{x\frac{1}{1-x^2}} = 0.$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^2)\sin\frac{x}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin\frac{x}{1-x^2}}{\frac{x}{1-x^2}} = \infty.$

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}\sin\frac{1-x^2}{x} = 0$. 这是无穷小量与有界量的积,仍为无穷小量.