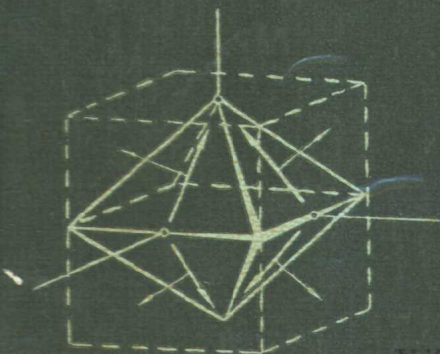


俞茂铨 等著
西安交通大学出版社

双剪应力强度理论研究

Researches on the Twin
Shear Stress Strength Theory



Yu Maohong etc.,
Xi'an Jiaotong University Press

双剪应力强度理论研究

Researches on the Twin Shear
Stress Strength Theory

俞茂铨 等著

Yu Maohong et al.

西安交通大学出版社

Xi'an Jiaotong University Press

1988

内 容 简 介

材料在复杂应力状态下产生塑性屈服和断裂的规律及破坏准则,对力学分析和工程结构及机器零件的强度计算都十分重要。本书在现有强度理论的基础上,发展了一个新的强度理论。它与某些材料的实验结果较为符合,并且比第三强度理论和第四强度理论具有更大的弹性范围,因而对材料强度的利用率也较高,有较高的经济意义。

这一理论由一系列准则所组成,它们分别适用于金属、晶体、岩石、土壤、混凝土等材料,可供材料力学、塑性力学、岩石力学、土力学、材料科学和土建、机械、航空等工程技术人员以及工科大学生、研究生、教师等阅读参考。

双剪应力强度理论研究

俞茂铨 等著

责任编辑 吴寿镗

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路 28 号)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数: 190 千字

1988 年 1 月第 1 版 1988 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1——800 册

ISBN7-5605-0002-1/O-2

定价: 3.10 元

序 言

强度理论研究材料在复杂应力状态下产生塑性变形和破坏的规律和准则,具有重要的理论意义和实用价值。力学、材料科学和工程结构设计等学科都与它有密切的关系。

俞茂宏教授自50年代末期开始研究塑性理论和强度理论,在校内外同行专家的支持下,逐步形成了比较系统的双剪应力强度理论。有关论文已在《中国科学》、《科学通报》、《IJMS》等国内外著名学术刊物上发表,受到普遍的重视。1985年国家科委确认这一理论的有关论文为国家级重大科研成果,1986年中国金属学会《金属学报》将有关论文评为首届李薰奖壹等奖。在国外,1984年国际机械科学学报(International Journal of Mechanical Science)将俞茂宏教授在该刊发表的论文列为优秀论文。有关领导部门也分别授予这项工作各种奖励。这些奖励对于俞茂宏教授和他的同事们是鼓励,也是鞭策,期待他们今后再接再厉,为社会主义现代化建设作出更多更大的贡献。

现在,双剪应力强度理论所取得的新进展,已受到很多学者的重视和高度评价。有关这项理论的内容已被写入多种专著和教材。西安交通大学出版社将这一研究工作的论文选编出版,希望得到学者们从各方面的指正,并希望能进一步推动这项研究工作的开展,我想这是很有意义的。

国务院学位评定委员会机械工程学科评审组召集人
西安交通大学学术委员会主任

教授 史维祥

1987年10月

Researches on the Twin Shear Stress Failure Theory

Contents:

The researches of yield and failure of materials under the complex stress are very important both in the theory of mechanics and engineering application. It is independent of the maximum shear stress theory of Tresca-Mohr-Coulomb-Schmid and the octahedral shear stress theory of Mises-Nadai-Drucker-Prager, a new series of twin shear stress failure theory is formalized. This is the selected papers on the research of twin shear stress theory in 1961-1988.

This theory include twin shear stress yield criterion and twin shear strain yield criterion defined by two principal shear stresses or two pure shear stresses, generalized twin shear stress criterion defined by dodecahedral shear and normal stresses and its smooth ridge model, cap model of generalized twin shear stress, three and five parameter twin shear stress criterion defined by dodecahedral stresses and hydrostatic stress and its smooth ridge model, critical twin shear stress condition for multiple slip systems of crystal, visco-plastic constitutive equation of genera-

lized twin shear stress criterion and its finite element representation etc. . The contents contains the research results up to date.

This book can be used by the teachers, graduated students, students, research workers and engineers in the fields of mechanics of materials, mechanics of rock, soil and concrete, plasticity, civil engineering, mechanical engineering and materials science et al.

About the author:

Yu Maohong was born in Jiangsu Province, China in 1934. He is the professor of Xi'an Jiaotong University, vice-director and chairman of the department of civil engineering, member of Committee of courses on mechanics under State Education Commission. He worked long years at the teaching and research on the mechanics of materials, mechanics of rock, soil and concrete, strength and vibration of structures.

His works include "Macroscopic strength theory", "Mechanics of materials" and other two books. The papers entitled 'Twin shear stress yield criterion', 'Twin shear stress theory and its generalization', 'Magnetic vibration of large turbo-generator stator and its suppression' and other thirty papers were presented in *Scientia Sinica (Science in China, Series A)*, *Int. J. Mech. Sci.*, *Acta Metallurgica Sinica*, *Acta Mechanica Solid Sinica*, *J. Rock and Soil Engineering*, *J. of Xian Jiaotong University* etc. and the

international conference of CIGRE (Paris), ICTAM (Copenhagen), TEPCON(Tehran) etc. He have been awarded the First Prize four times in the Prize of Li Xun Foundation of China Society of Metal and Xian Jiaotong University for scientific research, the Excellent Award of China State Education Commission for scientific research and the Second Prize for Advancing in Science and Technology of Shaanxi Province.

目 录

Contents

序言. Preface (in Chinese)

史维祥 (Shi Weixiang)

塑性理论、岩土力学和混凝土力学中的三大系列屈服函数.....俞茂宏 (1)

Three Main Series of Yield Function in
Plasticity, Rock, Soil and Concrete
Mechanics (Yu Maohong) Abstract (35)

各向同性屈服函数的一般性质(双切应力屈服准则
及其流动法则).....俞茂宏 (37)

古典强度理论及其发展.....俞茂宏 (39)

双剪应力屈服准则.....
国家科委科学技术研究成果公报 (52)

晶体和多晶体金属塑性变形的非 Schmid 效应和双
剪应力准则.....俞茂宏、何丽南 (53)

Non-Schmid Effects and Twin Shear Stress
Criterion of Plastic Deformation in
Crystals and Polycrystalline Metals
(Yu Maohong, He Li nan) Abstract (62)

双剪应力准则的一个推广.....
俞茂宏、宋凌宇、陈萍 (65)

A Generalization of Twin Shear Stress Criterion

(Yu Maohong, Song Linyu, Cheng Ping) Abstract	(71)
双剪应力强度理论及其推广	
俞茂宏、何丽南、宋凌宇	(72)
从纯剪切状态推导双剪应力屈服准则和双剪应变	
屈服准则	俞茂宏、何丽南 (87)
一个新的岩石强度准则	王振山、李跃明、俞茂宏 (92)
广义剪应力双椭圆帽子模型	俞茂宏、李跃明 (101)
Dual Elliptical Cap Model of Generalized Shear Stress	
(Yu Maohong, Li Yaoming) in Chinese	
广义双剪应力准则角隅模型	俞茂宏、刘凤羽 (114)
Smooth Ridge Model of Generalized Twin Shear Stress Criterion	
(Yu Maohong, Liu Fengyu) Abstract	(122)
双剪应力三参数准则及其角隅模型	
俞茂宏、刘凤羽	(123)
Three Parameter Criterion of Twin Shear Stress and its Smooth Ridge Yield Surface	
(Yu Maohong, Liu Fengyu) Abstract	(132)
土的各向同性及各向异性强度准则讨论	
李跃明、俞茂宏	(133)
Discussion on the Strength Criteria for Isotropic and Anisotropic Soils	
(Li Yaoming, Yu Maohong) Abstract	(141)
土体介质的弹-粘塑性本构方程及其有限元化	
李跃明、俞茂宏	(142)
General Behavior of Isotropic Yield Function	

	Yu Maohong	(155)
Twin Shear Stress Yield Criterion		
	Yu Maohong	(174)
Twin Shear Stress Criterion of Plastic Deformation in Metals.....		
	Yu Maohong, He Linan,	(183)
Twin shear stress Theory and its Generalization		
Yu Maohong, He Linan, Song Lingyu		(186)
A New Definition of Twin Shear Stress Yield Criterion and Twin Shear Strain Yield Criterion		
	Yu Maohong, He Linan	(204)
A New Strength Theory for Rock		
	Wang Zhengshan, Li Yaoming	
	Yu Maohong,	(211)
附录: 双剪强度理论的解析证明.....		(223)
后记		(229)
中文名词索引.....		(231)

塑性理论、岩土力学和混凝土力学中的 三大系列屈服函数*

俞 茂 宏

关键词：屈服准则、广义准则、帽子模型、角隅模型；单剪应力理论、八面体剪应力理论、双剪应力理论

摘 要

本文用剪切滑移的概念统一论述了材料在复杂应力状态下的屈服问题，将目前多达几十种的、用各种方式阐述的屈服准则，首次系统地整理为三大系列屈服准则，即单剪应力系列、八面体剪应力系列和双剪应力系列屈服准则。每一系列中都包括应力空间的剪应力屈服准则、应变空间的剪应变准则、广义剪应力准则、广义剪应力帽子模型、角隅屈服面和晶体滑移的临界剪应力准则等六个方面，内容包括至 80 年代的最新研究成果。其中前

* 本文根据作者在第一届全国塑性力学学术交流会、全国材料力学课程建设研讨会和国家自然科学基金会材料与工程学部召开的结构工程新理论研讨会上的报告，以及在清华大学、香港大学、西安交通大学强度研究所等地讲学的部分内容以及最近的研究成果写成。

两个系列由各国学者数十人在 200 余年内完成, 后一系列的六个方面, 即双剪应力屈服准则(应力空间)、双剪应变屈服准则(应变空间)、广义双剪应力准则、广义双剪应力帽子模型、双剪应力准则角隅屈服面和晶体多滑移的临界双剪应力准则, 由作者和西安交通大学的一些研究者从 1961 年至今所完成。

文中最后给出了这三大系列屈服准则的对比表。

一、前 言

屈服准则是关于材料在复杂应力状态下发生屈服的规律的学说和计算条件。它是材料力学、塑性力学、岩土力学等固体力学的一个重要基础理论, 也是各种工程结构设计所必须的强度条件。因此, 它既有基础理论性, 又有很大的实用性, 历来为各国学者所重视。如果从法国著名科学家和工程师库仑 1773 年关于材料剪切破坏的研究开始, 已有 200 余年的历史, 但至今仍在不断完善和发展。近来, 它又深入到岩石力学和土壤力学, 成为岩土工程和有关力学研究中的一个重要而活跃的研究领域。

目前, 各种屈服准则已达几十种之多, 提法繁多, 在各种书刊上的阐述也不尽相同。一般说, 要作为一个具有实际意义的屈服准则, 它们应该:

1. 具有清晰而正确的物理概念;
2. 具有简单的数学表达式;
3. 屈服准则所要求的材料性能的实验要少而简单(如果理论所要求的实验难以实现, 则这个理论就无法应用);
4. 理论符合于实验结果, 或者理论本身是以实验结果为基础的;
5. 经过多年考验。

本文用剪切屈服的概念，统一论述材料在复杂应力状态下的屈服问题。将各种屈服准则分别看作为各种剪应力的函数，即

1. 单剪应力函数 $f(\tau_{\max})$;
2. 八面体剪应力函数 $f(\tau_8)$;
3. 双剪应力函数，双剪应力函数可用两个主剪应力表示为 $f(\tau_{13}, \tau_{12})$ 或 $f(\tau_{13}, \tau_{23})$ ，也可用两个纯剪切应力表示为 $f(\tau + \tau')$ 。

因而可将现有的各种屈服准则分别用单剪应力、八面体剪应力和双剪应力系统地整理为下述的三大系列屈服准则。

二、单剪应力系列屈服准则

这一系列屈服准则的基本理论认为：受力单元体中的一个最大剪应力引起材料的屈服，它的力学单元体模型为正交六面体。

单剪应力准则的研究可以上溯到 1773 年库仑首先提出土壤的抗剪强度开始，他提出的无粘性土(砂土)和粘性土的抗剪强度可分别用下述剪切函数表述：

$$f(\tau) = \tau - \sigma \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (1)$$

$$f(\tau) = \tau - \tau_0 - \sigma \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (2)$$

式中： τ ——作用在剪切面上的剪应力

σ ——作用在剪切面上的正应力

φ ——土壤力学特性参数

τ_0 ——土的抗剪强度

此后 Tresca 于 1868 年向法国科学院提出金属流动的报告；Guest 于 1900 年提出软钢的剪应力理论；俄国切尔诺夫于 1905 年发现滑移线；德国 Mohr(1900)、Sandel(1919)、Prandtl(1920)等提出广义单剪应力理论；Schmid 于 1924 年提出晶体滑移的临界剪应力定律；到 60 年代 Илюшин 关于应变空间屈服面的概念

逐步发展;库仑-摩尔理论在三向压缩区域附加上体积塑性屈服条件而形成带帽广义单剪应力理论,等等。在一、二百年间,经过各国科学家在各方面的共同努力,至今,可以把它们整理归纳为下面五个方面的单剪应力理论。

1. 最大剪应力屈服准则,即单一主剪应力屈服准则

$$f_1 = \tau_{\max} - c = 0 \quad (3)$$

用主应力表示为

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma^0 = 0 \quad (3')$$

2. 单剪应变屈服准则

$$f_1 = \gamma_{\max} - c = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - c = 0 \quad (4)$$

用主应变和拉压屈服极限应变 ε^0 表示,则上式可写为

$$f_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon^0(1 + \mu) = 0 \quad (4')$$

3. 广义单剪应力准则

以剪应力屈服准则为基础,可以从两条途径得出不同的广义准则。一条从考虑剪应力作用面上的正应力得出广义准则;另一条则以剪应力为基础,再考虑静水应力或平均应力 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ 得出广义准则。因此,以单一剪应力为基础的广义准则也有两类。前者即为著名的库仑-摩尔定律

$$F_1(\tau_{\max}, \sigma) = \tau_{\max} - f(\sigma) = 0 \quad (5)$$

用主应力表示为

$$F_1 = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 - c = 0 \quad (5')$$

式中 α 为材料的拉、压强度比, $\alpha = \sigma_+^0 / \sigma_-^0$ 。

后者则有 Sandel、Paul 等提出的修正的库仑-摩尔理论

$$F_1'(\tau_{\max}, \sigma_m) = \sigma_1 - \sigma_3 - f(\sigma_m) - c = 0 \quad (6)$$

在这方面,斯图加特大学的 Sandel (1919)、苏联的达维靖可夫 (1941)、Гасреб (1959) 等都提出过有关的广义理论^[2]。陈惠发 (Chen W. F.) 和方 (Fang H. Y.) 等 (1970) 则在拉伸区对库仑-

摩尔理论进行修正, 用一个连接抗拉强度 σ_+ 和抗剪强度 τ_0 的圆作为补充准则。因此他们的修正的库仑-摩尔理论用拉伸区和压缩区两个条件来表示。^[3]

近年来, 国内外进行了很多试验并提出了相应的广义单剪应力准则。朱端庚、吴绵拔的花岗岩静载破坏试验结果为^[4]

$$\tau = \tau_0 + \sigma \frac{\sigma_+^2 - 4\tau_0^2}{4\sigma_+ \sigma_+} \quad (\text{压缩区})$$

$$\tau^2 = \tau_0^2 + \sigma \frac{\tau_0^2 - \sigma_+^2}{\sigma_+} - \sigma^2 \quad (\text{拉伸区})$$

张克昌、汪友平对含泥砾石的试验结果得出式(5)的具体表达式为一指数方程

$$\tau = A p \left(\frac{\sigma}{p} \right)^n$$

或

$$\tau = A \sigma^n \quad (7)$$

式中 τ 和 σ 分别为破坏面上的剪应力和正应力。A、n 为材料的强度参数。n=0.67-0.79(含泥砾石)。他们用式(5)与清华大学和日本的实验资料(未给出方程式)相比较, 也与张启岳、司洪洋关于粗颗粒土的三轴压缩试验资料^[5]进行了比较^[6], 得出的剪切强度与正应力的对数关系为线性关系。

高渠清、郑鸿泰、周德培得出红砂岩的式(2)的具体数值为

$$\tau_{13} = a\sigma_{13} + b = 0.54\sigma_{13} + 5.89 \quad (\text{MN/m}^2)$$

式中 σ_{13} 为最大剪应力 τ_{13} 作用面上的法向应力。他们还研究了刚性接触(聚四氟乙烯薄片)压缩试验改为柔性接触(乳胶袋)后的影响。类似的结果可写为 $\tau_{13} = 0.74\sigma_{13} + 3.14$ 。

对于不同的应力状态的应力应变关系, 他们得出在双向压缩和三向压缩时, 中间主应力 σ_2 对红砂岩的强度和应力应变关系都有较大的影响^[7]。许东俊的软弱砂岩的一般三轴试验也得出类似的结果^[8]。

东京大学茂木清夫教授经过多年研究认为^[9]：“中间主应力 σ_2 的影响不仅在各向异性岩石里是显著的，而且在各向同性岩石里也同样是显著的，”(1979)。因此，单一剪应力理论和广义单剪应力准则没有考虑中间主应力 σ_2 的影响，感到有不足之处。或许这是由于它只考虑了一个剪应力的作用。

4. 广义单剪应力帽子模型

帽子模型是在广义准则一端无限扩大的模型的基础上加上不同的帽子，形成一个封闭的有帽广义准则。帽子模型可以适合于在静水压力下能产生塑性体积应变的一类材料。70年代以来，它在土力学中得到迅速的发展。第一个帽子模型是剑桥大学Roscoe等人在1963年和我国魏汝龙于1964年建立的剑桥模型^[10-13]。到80年代已出现大量的各种帽子模型。

有帽广义单剪应力理论是在库仑-摩尔理论的基础上附加一个考虑塑性体积应变的屈服条件

$$\phi_1 = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_m} - M \ln \frac{p_0}{\sigma_m} = 0 \quad (8)$$

式中 M 和 p_0 均为试验常数。

如将式(8)的指数方程用椭圆方程来代替，则可写成修正形式的方程^[10-12]

$$\phi_1 = \left(\frac{2\sigma_m - p_0}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{2\tau}{M p_0} \right)^2 - 1 = 0 \quad (9)$$

我国魏汝龙曾在1964年提出并于1981年发展了一个帽子模型，其屈服函数为^[13]

$$\phi_1 = \left(\frac{\sigma_m - \gamma p_0}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\beta} \right)^2 - F^2 = 0 \quad (10)$$

式(10)可以包含式(9)的结果。

Mayak、Zienkiewicz提出了以库仑-摩尔理论为基础的带帽广义理论的普遍形式^[14]。此外Prevost (1975)、Lade (1977)、

Ohmaki(1979)、沈珠江等都提出过有关的理论^[15]。

5. 晶体滑移的临界剪应力定律

晶体的屈服强度与晶体的取向有很大关系,但是当它滑移时,在滑移面上沿滑移方向的剪应力 τ_0 几乎为一常数。因此, Schmid 于 1924 年得出结论: 剪应力达到某一临界值时,晶体开始滑移,即 $\tau = \tau_0$ 。在晶体塑性理论中,这称为 Schmid 剪应力定律^[16]。

三、八面体剪应力系列屈服准则

这一系列屈服准则的基本理论认为受力单元体中的八面体剪应力引起材料的屈服。它的力学单元体模型为等倾八面体。

八面体剪应力屈服准则有多种解释^{[17]*}。Maxwell、Huber、Mises、Ильюшин、Новожилов、Паномарев、Eichinger、Nadai、Paul 等都在这方面作出过贡献。到 20 世纪 50 年代, Drucker、Prager、胡令闻等和苏联很多学者在广义准则方面进行过不少工作^[1]。到 70—80 年代,国内外很多研究者把广义准则推广应用到土壤等材料,提出了各种带帽模型,使这方面的研究工作成为固体力学和岩土工程的一个重要而活跃的研究领域。国外很多著名学者如 Desai、Clough、Chen W.F、Mroz、Naghdi 和 Dafalias 等人都在这方面做了不少工作。

下面,我们用统一的八面体剪应力理论把大量的各种不同表述,系统地归结为五个方面的八面体剪应力理论:

1. 八面体剪应力屈服准则,用八面体剪应力 τ_8 表示为

$$f_2 = \tau_8 - c = 0 \quad (11)$$

用主应力表示为

* 此文已收集于本书。