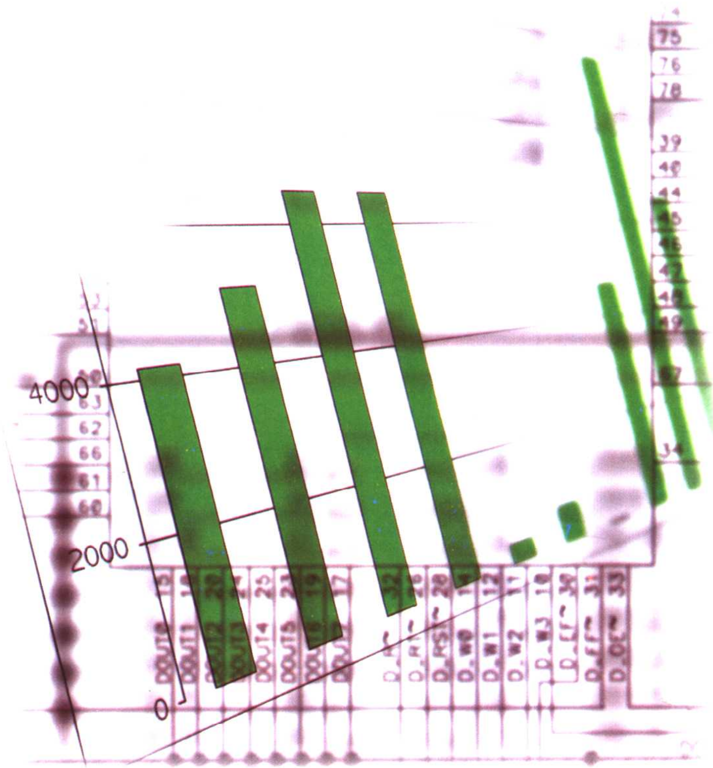
面向21世纪高等学校教材

概率统计教程

主编　刘国华　徐明德　邓阳春　李汝全

主审　江兆林



中国矿业大学出版社

面向21世纪高等学校教材

概率统计教程

主　编　刘国华　徐明德
　　　　邓阳春　李汝全
副主编　陆宜清　杨德章
　　　　陈振龙
编　委　张云伟　王　婕
　　　　任录顺
主　审　江兆林

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程/刘国华等主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2002.8

面向21世纪高等学校教材

ISBN 7-81070-546-6

Ⅰ.概… Ⅱ.刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第036197号

书　　名　概率统计教程

主　　编　刘国华　徐明德　邓阳春　李汝全

责任编辑　姜　华

出版发行　中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008)

印　　刷　临沂市第二印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168 1/32　印张 15.5　字数 430千字

版次印次　2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷

印　　数　1—4100册

定　　价　24.80元

前　言

本教材按照原国家教委制订的教学大纲的要求，除作为高师数学系的教材外，还可作为高等学校计算机专业、经济类各专业和其他有关专业相应课程的教材或教学参考书，亦可作为函授、电大、职大、自学考试等相应课程的教材或教学参考书。

我们在本书编写过程中，密切结合教学实际，根据多年的教学经验精选内容，努力使教材的观点正确稳妥，材料充实可靠，文字通俗易懂，内容深入浅出，并且尽可能地从内容上和方法上反映近年来概率统计这门课程在教学和科研中的最新成果。另外，书中带“*”号的内容，各专业可根据自己的教学实际适当取舍。

与同类教材相比，本教材体现了三大特点：第一，淡化某些繁杂形式，注重核心内容，但简而不略；第二，加强了理论与实际的联系，注重了该学科知识在社会生活，特别是在社会经济与工程技术方面的具体应用；第三，尽量避免使用较深的数学知识，只要具备了数学分析和线性代数的基本知识即可，书中的所有推理论证都是在这一范围内进行的。为了帮助读者进一步学好该课程，同时给出了教材中所配习题和复习参考题的解答。

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一本比较成熟的教材，不是一件容易的事情，它应该是一个长期努力的过程。为此，在本教材的编写中我们参考了大量的有关著作和文章，恕不一一列出，在此谨向这些作者表示衷心的感谢！

本书由主编整体设计，提出选题，作者分工执笔。编写任务分工如下：陆宜清（第 6 章），张云伟（第 8 章及附表 1-8），另外六章由其他作者撰稿。初稿完成后，由编委会对其进行了认真的修正、统

稿，在此期间听取了各方面的意见和建议，最后由主编定稿。因此，本书是大家分工合作，共同努力的成果。

由于我们水平有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正，以使本教材不断完善。

编　者

2002 年 4 月

目　录

第1章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律的一门数学学科.随机事件与概率是概率论的两个基本概念.本章从随机现象出发,引入了随机事件的关系与运算,讨论了它们的性质,给出了概率的统计定义、古典定义和几何定义,以及三个重要的概率公式——乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式,建立了公理化结构.

本章重点是古典概型、伯努利概型的概率计算及三大公式的运用,难点是古典概型的概率计算.

1.1　随机事件与样本空间

一、随机现象与随机试验

观察自然现象、社会经济现象以及在工程技术中,不外乎有两类现象:一类称决定性现象(或称必然现象).如带电小球有"同性相斥,异性相吸"的特性,又如"密闭容器内的气体随着温度升高其压力增大"等,这些现象实际上是事前可以预言结果的现象,在一定条件下,结果完全肯定或完全否定,没有其他结果.另一类现象称非决定性现象(或称偶然现象).如一个孕妇在分娩之前不知她孕育的是男孩还是女孩,又如向桌上任意抛掷一枚均匀硬币,落下后是"正面朝上"还是"正面朝下",在抛之前完全不能决定,可能是"正面朝上",也可能"正面朝下",这种只有在事后才能知道它所发生的结果的现象在概率论里称为随机现象.

随机现象并不是杂乱无章、无序可循的,有其自身的规律性.研究随机现象是通过随机试验来进行的.

(1) 抛掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况.

(2) 抛掷一颗骰子，观察出现的点数.

(3) 记录某电话交换台一分钟内接到呼唤的次数.

(4) 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

在上述各例中，我们发现它们具有共同的特点：

(1) 在相同的条件下，试验可重复地进行；

(2) 每次试验前，试验的所有可能结果是明确的，且不止一个；

(3) 每次试验出现什么结果事前不能确定.

定义 1 具有上述(1) ~ (3) 三个特点的试验称为**随机试验**(简称试验)，一般用 E 表示.

二、样本空间

对于一个试验，我们关心的是它可能出现的各种结果. 比如抛一颗骰子，它出现“1”、“2”、“3”、“4”、“5”、“6”点都是可能的；又如抛两枚均匀硬币的试验，则可能出现的结果有(正，正)、(正，反)、(反，正)、(反，反)四种. 因此，对于不同的试验，结果不相同.

定义 2 随机试验的每一个可能的基本结果称为**样本点**(或**基本事件**)，一般用 ω 及带有下标的 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots$ 表示.

定义 3 随机试验的样本点的全体称为**样本空间**，用 Ω 表示. 由于随机试验的所有结果在试验前是明确的，所以基本事件(或样本点)也是明确的，故样本空间也是确定的.

例如上面所举的各种例子的样本空间为

例 1 $\omega_1=\{$出现正面$\}$，$\omega_2=\{$出现反面$\}$，

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 $\omega_i=\{$出现 i 点$\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

例 3 $\omega_i=\{$一分钟接到 i 次呼唤$\}$，$i=0,1,\cdots$

$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots\}$.

例 4 设灯泡的寿命为 t，

$$\Omega = \{t : t \geqslant 0\}.$$

可见，样本空间中的元素是由试验的内容确定的. 对于同一试验，样本空间有不同的表示方法. 如例 1 中，若用“0”表示“出现正面”，“1”表示“出现反面”，则 $\Omega = \{0,1\}$；又“0”和“1”可描述射击中“击中”与“没击中”. 所以同一个样本空间可以描述不同的随机试验.

三、随机事件

由基本事件定义知，试验的每一个可能结果是基本事件. 为更明确随机事件的概念，下面再举一例说明.

例 5 设 E 为掷骰子试验，其样本空间 $\Omega = \{$出现 1,2,3,4,5,6 点$\}$，共有 6 个样本点. 令 $A =$ “出现 6 点”，$B =$ “出现偶数点”，$C =$ “出现的点数小于 4”，则 A,B,C 均为 E 的结果，A 是 E 的一个样本点，所以 A 也是一个基本事件. 而 B 却含有三个样本点“2”、“4”、“6”，是由“出现 2 点”、“出现 4 点”、“出现 6 点”三个基本事件结合而成的. 同理，C 也是由“出现 1 点”、“出现 2 点”、“出现 3 点”三个基本事件组成的. 故称 B,C 为复杂事件，即由若干个基本事件（样本点）组成的事件.

定义 4 不管是基本事件，还是复杂事件，在一次试验中出现与否都带有随机性，都称为随机事件（简称事件），常用大写字母 A,B,C 等.

所谓试验中某个事件发生，是指该事件所含的样本点之一在试验时发生. 如例 5 中，若做一次试验，掷出的是 2 点，则称 B 发生；若掷出的是 5 点，则 A,B,C 均不发生. 如果某事件在一次试验中一定发生，则称这事件为必然事件，如样本空间 Ω 为必然事件. 如果某事件在一次试验中一定不发生，则称这件事情为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示. 实际上，必然事件、不可能事件都不是随机事件，但为方便讨论问题，我们也把它们算作随机事件.

四、随机事件的运算和性质

由于样本空间是一个以样本点为元素的集合，所以，从集合论

的观点来看，事件可定义为集合 Ω 的某些子集. 因此，事件之间的关系及运算与集合间的关系及运算相似. 下面就在给定的同一样本空间中讨论事件的种种性质，有助于将复杂事件分解成简单事件，对以后复杂事件的概率计算是非常有益的.

1. 事件的关系

包含 如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如例 5，若 A 发生，则 B 也发生，所以，$B \supset A$. 用韦恩(Venn)图给以直观的解释：如图 1-1，用方框代表必然事件 Ω，A，B 是两个事件，有 $A \subset \Omega$，$B \subset \Omega$. 对于"A 发生必然导致 B 发生"，其含义就是"属于 A 的 ω 必属于 B"，A 中的每一个样本点全包含在 B 内，所以事件 $A \subset B$ 的含义与集合论中的集合 $A \subset B$ 的含义是一致的. 显然，不可能事件 $\varnothing$ 对于任何事件 A 均有 $\varnothing \subset A$.

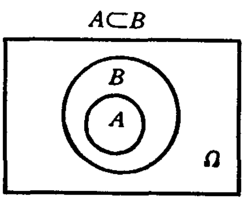


图 1-1

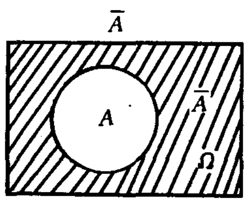


图 1-2

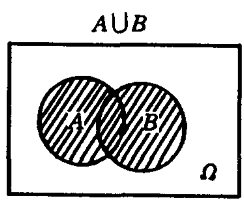


图 1-3

相等 如果事件 $A \subset B$，$B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$. 这表示若 A 发生 B 必然发生；反之，B 发生必然 A 发生. 如例 5 中，令 $A =$ "出现 2，4，6 点"，$B =$ "出现偶数点"，显然，$A = B$.

对立(逆) 如果 A 是一事件，令 $\overline{A} = \Omega - A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的逆，或称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，即 A 发生，则 $\overline{A}$ 不发生；反之，若 $\overline{A}$ 不发生，则 A 发生. 如例 5 中，$A =$ "出现奇数点"，$\overline{A} =$ "出现偶数点"，如图 1-2 所示.

2. 事件的运算

和(并)　如果事件 A 与 B 中至少有一个发生导致另一个事件 C 发生，则称 C 为事件 A 与 B 的和，记作 $C = A \cup B$. 如例 5 中，$A \cup B =$ "出现偶数点"，如图 1-3 所示.

积(交)　如果事件 A 与 B 同时发生才能导致事件 C 发生，则称 C 为 A 与 B 的积(或交)，记作 $C = A \cap B$ 或 $C = AB$. 如例 5 中，$A \cap B =$ "出现 6 点"，$B \cap C =$ "出现 2 点"，如图 1-4 所示.

差　如果事件 A 发生而 B 不发生才导致事件 C 发生，则称事件 C 为 A 与 B 的差，记作 $C = A - B$. 如例 5 中，$B - C =$ "出现 4 点，6 点"，如图 1-5 所示.

互不相容(互斥)　如果事件 A 与 B 不能同时发生，称 A 与 B 互不相容，记 $A \cap B = \varnothing$ 是不可能事件. 如例 5 中，$A \cap C = \varnothing$，$A \cup \overline{A} = \Omega$，如图 1-6 所示.

注：以上定义和与积关系可推广到有限多个事件的场合，事件与集合之间对应关系(略).

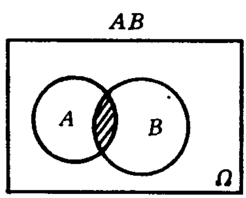


图 1-4

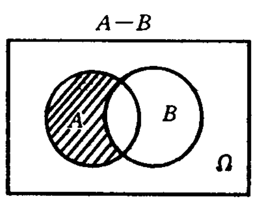


图 1-5

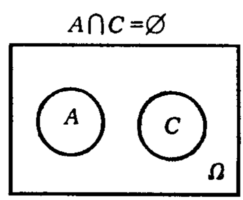


图 1-6

3. 事件运算法则

再举一例帮助我们理解事件间的关系.

例 6　设 A,B,C 是 Ω 中的随机事件，则

(1) 事件"A 与 B 发生，C 不发生"可表示成 $AB\overline{C}$ 或 $AB - C$.

(2) 事件"三个事件中至少有一个发生"可表示成 $A \cup B \cup C$.

(3) 事件"三个事件中恰有一个发生"可表示成 $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

(4) 事件“三个事件 A,B,C 中有不多于一个事件发生”可表示为$\overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(5) 事件“三事件 A,B,C 都发生”可表示为 $A \cap B \cap C$ 或 ABC.

事件运算满足下列规则：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 德莫根(Demorgan)定理

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2},\ \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2},$$

更一般地有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

证明从略.

顺便指出，事件是由样本空间 Ω 中的某些样本点构成的，所以它是 Ω 的子集. 若把 Ω 中所有事件的子集归结在一起组成一个集合，这个集合称为**事件域**，记为 $\mathscr{F}$，即 $\mathscr{F} = \{A \mid A \subset \Omega, A$ 是事件$\}$.

习 题 1.1

1. 填空

(1) 随机事件是样本空间的________;

(2) 样本空间是随机试验的________;

(3) 掷两枚均匀硬币，设 A = “两个都出现正面”，B = “出现一正一反”，则 $A \cup B$ = ________，AB = ________.

2. 判断是非

(1) 两事件对立就一定不相容； ( )

(2) 两事件互不相容一定能推出对立； ( )

(3) 两事件相容就一定不对立；　　　　　　　　　　　　( )

(4) 若 $A \subset B$,那么 $A = AB$.　　　　　　　　　　　　( )

3. 箱中装有编号为1,2,3,4,5的5本书,现从中任取2本书.请写出试验的样本空间.若令 A = "2本书中有一本编号为1",则 A 包含几个样本点,怎样表示?

4. 在数学系的学生中任意选取一名学生,令事件 A 表示被选学生是男生,事件 B 表示该生是二年级的学生,事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下,$ABC = C$ 成立；

(3) 在什么时候,关系式 $C \subset B$ 是正确的；

(4) 在什么时候,$\overline{A} = B$ 成立.

5. 设 A,B,C,D 是四个事件,试用这四个事件表示下列各事件.

(1) 这四个事件至少发生一个；

(2) 这四个事件恰好发生两个；

(3) A,B 都发生而 C,D 都不发生；

(4) 这四个事件都不发生；

(5) 这四个事件中至多发生一个.

6. 试问 $(A \cup B) - B = A$ 是否一定成立?

7. 袋中有红、黄、白色球各一个,每次任取一个,有放回地取三次,A = "全红",B = "颜色全同",C = "颜色全不同",D = "颜色不全同".分析 A,B,C,D 是否相容,是否对立.

8. A、B、C 三事件互不相容与 $ABC = \varnothing$ 是不是一回事?

1.2　随机事件与概率

一、频率与概率

我们在研究随机现象时最关心的是所有可能发生的结果在试验中发生的可能性的大小,这个大小是客观存在的,能否用一个数学模型去描述随机事件发生的大小和规律呢?例如,在抛掷一枚均匀硬币时,"正面朝上"还是"反面朝上"预先不能作出正确的判

断，但是如果在条件不变的情况下做大量重复试验，发现“正面朝上”的次数与“反面朝上”的次数几乎相等. 历史上有不少人做过这个试验，其结果见表 1-1.

表 1-1

试验者	掷硬币次数 n	出现正面次数 μ_n	频率 μ_n/n
Demongan	2 048	1 061	0.518
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

设试验的次数为 n，事件 A 出现的次数为 μ_n，则称 $f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率. 从上面掷硬币的试验中发现“正面出现”的频率稳定在 0.5 左右，频率的这种性质叫做频率的稳定性. 大量的随机试验表明随机事件具有频率稳定性 —— 这也就是统计规律性.

频率的稳定性说明事件在一次试验中发生的可能性大小是事件本身所固有的，可以用数 $P(A)$ 来表示. 为此引进概率的统计定义.

定义 1 设 $f_n(A)$ 为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率. 当试验的次数 n 无限增加时，$f_n(A)$ 充分接近于某一常数 $P(A)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

在抛掷硬币试验中，可以肯定 P(正面朝上) $= P$(反面朝上) $= 0.5$.

以上只是定性地描述了事件的频率与概率的关系，当试验的次数很大时，常用事件的频率作为事件的概率的近似值. 这在第五章中将会进一步解释.

频率具有下列性质：

(1) 非负性　对任何事件 A，$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性　若 Ω 为必然事件，则 $f_n(\Omega)=1$；

(3) 可加性　若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

一般地，对于任意有限个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，有 $f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$，称之为有限可加性.

由概率和频率的关系易得统计概率具有频率的性质：

(1) 非负性　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$；

(3) 可加性　若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

一般地，对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，成立有限可加性，即 $P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$.

二、古典概型

由概率的统计定义可知，要确定随机事件的概率，必须做大量试验来估计概率，这样做在数学上不够严格且耗费大量的人力、物力. 但对一类特殊的随机现象可不必做大量的试验，就能直接求出事件的概率，这就是古典概型. 它是概率论发展史上最早被研究和应用的一种概率模型.

古典概型的特点：

(1) 有限性　每次试验只有有限个可能的结果；

(2) 等可能性　每次试验中各基本事件发生的可能性都相同.

利用古典概型的等可能性和有限性的特点能方便地求出概率.

古典概型概率的求法：设古典概型的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，事件域 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 的所有子集的全体构成的，共有 2^n 个事件. 若 $A\in\mathscr{F}$，含有 m 个样本点，即 $A=\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}\}$，则由等可能性 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，有 $P(\omega_{i_1})=P(\omega_{i_2})=\cdots$