代数教学指导

中学数学教学文摘

浙江人民出版社

中学数学教学文摘

代数教学指导

浙江师范学院数学系
《中学数学教学文摘》编辑组

浙江人民出版社

中学数学教学文摘
代数教学指导
*
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张9 字数200,000
1983年5月第一版
1983年5月第一次印刷
印数：1—17,500
统一书号：7103·1251
定价：0.78元

内 容 提 要

本书围绕提高中学代数教学质量这一中心，抓住基本知识教学、重点难点处理、习题安排等主要问题，按专题分类选编有关教学经验和体会；注意精编，重视拓宽学生思路和培养学生智力能力；是中学数学教师的教学参考书，也可供师范院校及高中学生学习使用。

前　言

“他山之石，可以攻玉.”努力参加社会实践，取得直接经验，固然重要，虚心学习他人经验也同样不可忽视. 编辑《中学数学教学文摘》，目的就是想为中学数学教师比较广泛地提供一点有益的资料.

这些年来的教育事业在发展的道路上经受过种种挫折，尤其是十年内乱，更横遭摧残. 可是无数忠诚党的教育事业的教师，仍然孜孜不倦地刻苦钻研业务，写下了许多理论联系实际和见地深刻的好文章. 它们散见在各种报刊杂志上，至今还很少有人去注意搜集整理，使它为当前的教育服务. 现今教师队伍中年轻教师和新教师大量增加，他们热情好学，进取心强，但又常常苦于资料匮乏，时间不足，对于大量过去和现在发表的好文章，难以一一遍读. 为了帮助解决这方面的问题，我们做了一些搜集、整理和浓缩的工作，以文摘的形式分类编辑成书，这样可以为他们节约很多时间和省却寻求资料的麻烦. 现在已编成的有《教师的基本功》、《复习指导》、《解题与证题指导》、《代数教学指导》、《几何三角教学指导》等五册，随后还将编辑高等数学初步知识教学的经验. 这些都是数学教学中经常要遇到的问题，解决得好，对提高教学质量将会有所帮助.

丛书在编辑方法上，强调精选精编的原则，一般不收录全文，采取节选、摘编或综合改写等方法，选取其精华部分，力求中心突出，言简意赅，尽量以有限的篇幅包含较丰富的内容．由于限于水平，挂一漏万是难免的．

探索教育规律，提高教学质量，这是大家共同关心的问题．假如我们今天所做的工作能对它起到一点点促进的作用，那是我们莫大的快慰．

参加本书编选的有刘焕岩、王岳庭、吴茹玉、商永建等同志，并经朱玉同志审定．编选过程中得到浙江师范学院图书馆和数学系资料室的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢．

编　者

——目 录——

小资料

因式分解教学

因式分解的两个基本公式

因式分解的教学，是中学数学教学中的一个重点和难点，如何在较短的时间内较有成效地教好这一内容，为以后的学习打下良好的基础，是广大中学数学教师非常关心的一个问题.

一、两个基本公式

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d); \qquad (1)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \qquad (2)$$

我们知道，(1)式就是通常的十字相乘法，(2)式通常不要求学生掌握，为了把它们作为基本公式，我们必须在讲授多项式乘法时预为安排，到了讲授因式分解时，把乘法公式倒过来，学生易于接受，可收到水到渠成之功.

因式分解的公式很多，为什么只选两个？

我认为要求学生掌握的基本公式，不在多，而要精. 公式(1)和(2)分别是许多二次式、三次式因式分解公式的概括. 例如，由公式(1)可见：

分解 $a^2+2ab+b^2$，就是要求找两个数使其积为 b^2，其和为 $2b$. 所以

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$

分解 a^2-b^2，就是找两个数，使其积为 $-b^2$，和为 0．所以

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

在公式(2)中，令 $c=0$，即得

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2);\end{aligned}$$

若令 $c=-(a+b)$，则

$$\begin{aligned}&a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)\\&=[a+b+(-a-b)][a^2+b^2+(-a-b)^2\\&\quad-ab-a(-a-b)-b(-a-b)]=0,\end{aligned}$$

因此 $$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3.$$

由上所述，我们挑选的公式虽少，但只要熟练地掌握，加以灵活运用，是确能解决问题的.

二、二次式的因式分解

例 1 分解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解 把它看作是关于 a 的“二次三项式”，即有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]\\&=(b-c)(a-b)(a-c).\end{aligned}$$

例 2 分解 $2x^2-xy-6y^2+2x+17y-12$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=2x^2-(y-2)x-(6y^2-17y+12)\\&=2x^2-(y-2)x-(3y-4)(2y-3)\\&=(2x+3y-4)(x-2y+3).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 2 & -3 \\ \hline & -17 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2 & (3y-4) \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 1 & -(2y-3) \\ \hline & -y+2 \end{array}$$

运用公式(1)于二元二次多项式$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$的分解，不仅简捷易行，而且可以与平面二次曲线的讨论联系起来，它还与二元二次方程组、四次方程的解法密切相关.

例 3 如果下述二元二次多项式能分解成实数体R上两个一次因式之积，试求m、n之值.

(1) $f(x,y)=2x^2-xy-6y^2+mx+17y-12$;

(2) $g(x,y)=2x^2-xy+ny^2+2x+17y-12$.

解 (1) 分解$2x^2-xy-6y^2$，得

$$2x^2-xy-6y^2=(2x+3y)(x-2y);$$

分解$-6y^2+17y-12$，得

$$-6y^2+17y-12=-(3y-4)(2y-3);$$

拼凑上述分解式得

$$f(x,y)=(2x+3y-4)(x-2y+3),$$

或 $$f(x, y)=\left(2x+\frac{3}{2}(2y-3)\right)\left(x-\frac{2}{3}(3y-4)\right).$$

从而得x的系数是

$$m_1=2 \text{ 或 } m_2=-\frac{9}{2}+2\left(-\frac{2}{3}\right)(-4)=\frac{5}{6}.$$

(2) 分解$2x^2+2x-12$得

$$2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3);$$

设 $$g(x,y)=2(x+\alpha y-2)(x+\beta y+3),$$

比较xy与y的系数得

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{1}{2}, \\ 3\alpha-2\beta=\dfrac{17}{2}, \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases}\alpha=\dfrac{3}{2},\\ \beta=-2.\end{cases}$

从而有 $n=2\alpha\beta=-6$.

例 3 告诉我们，当一个二元二次多项式

$$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f,$$

其中五个系数已知时，余下的一个系数只有取某些特殊值时它才能被分解.也就是说，任意给出一个二元二次多项式 $f(x, y)$，它并不总是可分解的. 因此，有必要来研究一下 $f(x, y)$ 可分解的必要条件、充分条件是什么？

例 4　如果 $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$（其中 $a\neq0$）能够分解成实数体 R 上的两个一次因式之积，问它的系数应满足什么条件？

解　由假设 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)$ 能分解成两个一次因式之积，则

$$\begin{aligned}\Delta&=B^2-4AC=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)\\&=(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af)\end{aligned}$$

是一个完全平方. 因此必有

$$\begin{aligned}&(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)\\&=4a^2e^2-4abcd+4ab^2f+4acd^2-16a^2cf\\&=-4a(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2)\\&=-2a\begin{vmatrix}2a&b&d\\b&2c&e\\d&e&2f\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

行列式 $\begin{vmatrix}2a&b&d\\b&2c&e\\d&e&2f\end{vmatrix}$ 通常记作 θ，由于 $a\neq0$，

这样就可推得 $\theta=0$ 是 $f(x, y)$ 在 R 上可分解为二个一次因式之积的必要条件.

但是，这个条件并不充分. 例如 $f(x,y)=x^2+y^2$ 即是一个反例. 如果扩展到复数体 C 上的多项式时，例 4 的证明是可逆的，因而条件也就成为充分的了.

我们还知道，所谓一个二次多项式 $f(x,y)$ 在实数体（复数体）上可分解成一次因式之积，是指二次曲线 $f(x,y)=0$ 退化成两条实的（虚的）直线的情形，根据平面解析几何知识，$\theta=0$ 是二次曲线

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

退化为两条（实或虚的）直线（相交线、平行线、重合线）的充分与必要条件.

运用这一性质，可以给出例 3 的另一解法如下.

例 3 解法 2：

(1) $4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2$

$$=4\cdot2(-6)(-12)+(-1)17m-2\cdot17^2+6m^2+12=0,$$

即 $$6m^2-17m+10=0,$$

解之，得 $$m=2, \text{ 或 } \frac{5}{6}.$$

(2) $$\theta=4\cdot2(-12)n+(-1)\cdot2\cdot17-2\cdot17^2$$
$$-4n-(-12)(-1)^2=0,$$

即 $$100n+600=0,$$

解之，得 $$n=-6.$$

把 m、n 的这些值代入原式检验，的确都可使原式分解.

容易看出，当未定系数 n 为 a、c、f 其中之一时，$\theta=0$ 为 n 的一次方程；只要它的余子式不为零，n 有一个确定的解；当未定系数 m 为 b、d、e 其中之一时，$\theta=0$ 一般为 m 的二次方

程，它至多不超过两个解.

上述讨论可以推广到三元的情况，研究三维空间中的二次曲面分类.

（节选自《数学教学》1979年第2期；
原作者：应制夷）

因式分解教学中难点的解决

在多项式的因式分解中，分组分解法比较复杂，是教学中的难点. 难就难在它变化多，综合性强，学生常容易在某个关口“卡壳”. 对此，应组织好教学内容，归纳整理好基本方法，精讲，并让学生做大量类题练习，加强基本技能的训练. 这样做，有利于分组分解法这个难点的解决. 在组织这一部分教学内容时，每一种类型都应讲有关基础知识、解题方法，同时精选有代表性的例题.

一、分组后各组之间有公因式

这种方法分组的目的，只要求分组后各组之间有公因式. 为此，要求每一组的项数相同，对应项的系数成比例，至于分组的办法则不止一种. 有时，还要通过裂项或添置项才能达到分组的目的.

例1 因式分解 $10a^2x+21xy^2-14ax^2-15ay^2$.

解 $10a^2x+21xy^2-14ax^2-15ay^2$

$=(10a^2x-15ay^2)-(14ax^2-21xy^2)$

$=5a(2ax-3y^2)-7x(2ax-3y^2)$

$=(2ax-3y^2)(5a-7x)$.

例 2 因式分解 $x^3+10x^2+31x+30$.

此题，必须将 $10x^2$ 和 $31x$ 裂项.

解 $x^3+10x^2+31x+30$

$=x^3+2x^2+8x^2+16x+15x+30$

$=x^2(x+2)+8x(x+2)+15(x+2)$

$=(x+2)(x^2+8x+15)$

$=(x+2)(x+3)(x+5)$.

以上是按系数 1 ： 2 分的组，也可按 1 ： 3 ， 1 ： 5 来分组.

例 3 因式分解 $x^3+2ax^2+6abx+3bx^2+10acx+15bcx+5cx^2+30abc$.

此题，可按系数 $1:2a$ 或 $1:3b$ 或 $1:5c$ 分组.

解 $x^3+2ax^2+6abx+3bx^2+10acx$

$+15bcx+5cx^2+30abc$

$=x^2(x+2a)+3bx(x+2a)+5cx(x+2a)$

$+15bc(x+2a)$

$=(x+2a)(x^2+3bx+5cx+15bc)$

$=(x+2a)[x(x+3b)+5c(x+3b)]$

$=(x+2a)(x+3b)(x+5c)$.

此外，本题还可按含有 a（或 b、c）的项为一组，不含 a（或 b、c）的项为一组，这也是一个重要的分组方法.

二、分组后能应用公式进行分解

这种方法分组的目的，是要求分组后能应用公式进行分解. 为此，要熟悉平方差、和（或差）的平方、立方公式，分别对应的是二项、三项、四项. 为了能应用公式，往往也要裂项或添置项.

例 4 因式分解 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$.

解 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$

$$=x^4+2x^2+1-a^2-2ax-x^2$$
$$=(x^2+1)^2-(a+x)^2$$
$$=(x^2+1+a+x)(x^2+1-a-x)$$
$$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1).$$

例 5 因式分解 $x^3-9ax^2+27a^2x-26a^3\quad(a\neq0)$.

解 $x^3-9ax^2+27a^2x-26a^3$
$$=x^3-3x^2(3a)+3x(3a)^2-(3a)^3+a^3$$
$$=(x-3a)^3+a^3$$
$$=(x-3a+a)[(x-3a)^2-(x-3a)\cdot a+a^2]$$
$$=(x-2a)(x^2-7ax+13a^2).$$

二次三项式 $x^2-7ax+13a^2$ 的判别式 $(-7a)^2-4\times13a^2=-3a^2<0$，所以它在实数范围不能再分解.

三、分组后能应用十字相乘法进行分解

这种方法分组的目的，是要求分组后能应用十字相乘法进行分解. 为此，往往要把一部分代数式看成是一个未知数，相对于这个未知数来讲，整个多项式是这未知数的二次三项式（可以进行因式分解的）.

例 6 因式分解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$
$$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120$$
$$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$$
$$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10).$$

似上例，$x^2+8x+10$ 在实数范围不能再分解.

四、二元二次多项式因式分解的待定系数法

只要是可以因式分解的二元二次多项式，都可以首先分解一部分多项式，然后假设分解为两个二元一次多项式因式的