地图四色问题

一个著名的数学难题

欧阳光中 编

人民教育出版社

地图四色问题
欧阳光中 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 1.5 字数 20,000
1981 年 10 月第 1 版 1982 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—19,000
书号 7012·0467 定价 0.14元

目　录

一、何谓地图四色问题

你画过彩色地图吗？不用问，当然画过。

在一张地图上我们画上了许多国家，这些国家之间有的相邻，有的不相邻。我们说两个国家相邻是指这两个国家之间有一条公共的国境线，这条线可长可短但总是一条线。为了用不同的颜色把任何两个相邻的国家区别开来，我们必须遵循的一个原则是：任何两个相邻的国家不允许涂同一种颜色，而必须用两种不同的颜色来涂这两个相邻的国家。例如下面一张假想的地图，画出了四个国家 A,B,C,D(图1)，你用不着去核对它们是地球上的那四个国家，因为这是随便画的，是假想的。根据"任何两个相邻的国家不允许涂同一种颜色"的原则，我们可以把这四个国家涂成下面的样子(图1)。

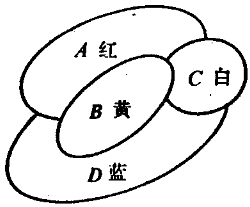


图 1

例如A国涂了红色之后，由于 B,C,D 三国都和 A 国相邻，那么这三个国家中的任何一个都不允许再涂红色。又如 B 涂上了黄色，而C既和 A 相邻又和B相邻，那么C既不准涂红色又不准涂黄色。等等。

象图1那样将 A,B,C,D 四国涂上了颜色之后，这张地图是不是已经画好了呢？我们说，没有！因为你只考虑到A,B,C,D四个国家的颜色，而忽视了一件相当重要的事，那就是

你画图用的那张纸的本来的颜色。如果你用的那张纸本来是白色的，那么C国将有一段国境线变得模糊不清，成为右面的地图了(图 2)。

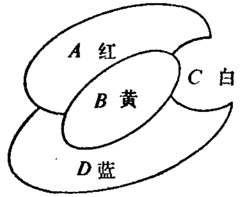


图 2

同样，如果衬纸的颜色是红的或者是蓝的，也将带来相仿的问题。可见，我们还必须考虑到衬纸的颜色。换句话说，在这四个国家的外面也应该涂上一种颜色，或者说，应该把最外面的那块地方也算作一个国家。这样一来，在我们的图上就出现了五个国家，四个是原先就有的，它们是A,B,C,D，还要加上外面的那一大块，我们不妨把这个“国家”叫做“外”。这时，一张彩色地图就可以画成下面的样子(图 3 或图 4)。

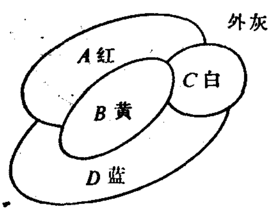


图 3

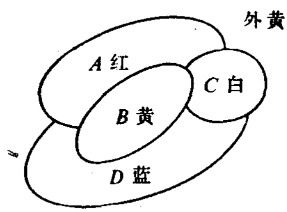


图 4

现在，我们要问：画一张彩色地图，不管有多少国家(当然要包括最外面的那个“外”)，也不管这些国家的地理位置如何，最少需要几种颜色？图 3 用了五种颜色，而图 4 比较节约，只用了四种。就颜色的种类来说，图 4 比图 3 少用了一种。是不是可以更少呢？不行。如果少于四种颜色这张彩色地图就没法画了，你如果不相信，可以画着试试看。它告诉我

们，存在这样的图，它不得少于四种颜色。

但一个更复杂的地图是不是需要更多的颜色呢？有趣的是，大量的事实表明，画任何一张彩色地图只要四种颜色就够了。这就是**地图四色问题**，也叫做**地图四色猜测**。但直观的现象不等于理论的证明。尽管大量的事实告诉我们，画一张彩色地图只要四种颜色就够了，也尽管这个问题的提法是那样的简单，甚至连小学一年级的学生也懂，但它的证明，至今只有电子计算机能做，不用计算机还无法证明。

地图四色猜测和哥德巴赫(Goldbach)猜测一样，是一个著名的数学难题，它曾经吸引了好几代优秀的数学家为解决这个问题而绞尽脑汁，并且获得一个又一个杰出的成就，为数学的发展增添了光辉。

二、历 史 概 述

正式提出地图的四色问题，至今已有一百三十年的历史了。

1852年10月23日，著名的数学家、伦敦大学数学教授奥古斯特·德·莫根(Augustus de Morgan)写信给他在三一学院的好友，著名的数学家和物理学家威廉·哈密顿(William Rowan Hamiltom)，在这封信中提出了地图的四色问题。他在信中写道：

"我的一个学生今天要我为他提供一个充分的理由，来说明一件我自己还无法判明究竟是对的还是错的事实。他说，如

果画一张图，图上任意分成许多部分，凡是有共同边界线的两个部分都要涂上不同的颜色，那么，大概需要四种颜色，而不需要更多的颜色就可以了。请问：难道不能够构造出一个需要五种或者更多种颜色的图吗？”

虽然德·莫根对四色猜测很有怀疑，但他却提出了这个问题，希望聪明的哈密顿能够给以解决，可惜的是哈密顿并没有重视它。

整整过了26年，到了1878年6月13日，在伦敦的数学会上，当时的著名数学家凯莱(Cayley)正式提出了四色问题，在第二年英国皇家地理学会所创办的第一卷会刊上，他再次提出这个问题。于是，这个问题开始吸引了一批有才华的人去研究它，从而引起了人们的重视。值得提出的是，在这群有才华的人物当中，有几位最初并非学数学的，只是由于迷上了四色猜测而改攻数学，并作出了出色的贡献。例如律师出身的坎泊(Kempe)和法国文学教授梅耶(Mayer)等。坎泊甚至声称自己已经解决了四色问题，但不久就被当时才二十多岁的年轻人赫渥特(Heawood)发现，他的证明有漏洞。赫渥特一生研究四色问题共六十年，发表过好几篇重要的论文，他虽然没有最后解决这一问题，然而却证明了任何地图只要五种颜色就够了，这就是地图的**五色定理**，或者叫做**赫渥特定理**。在这本小册子里，我们将证明这一定理。

1976年9月，《美国数学会通告》宣布了一件震撼全球数学界的消息：美国伊利诺斯大学的两位教授阿贝尔(Appel)和哈根(Haken)采用了坎泊(就是那个律师出身的人)在1879年建立的一种思想，利用电子计算机证明了地图的四色猜测

是正确的。他们将地图的四色问题化为两千个特殊的图的四色问题，然后在快速电子计算机上一共计算了1200个小时，逐个验证了这两千个特殊的图。不难想象其证明是多么复杂啊，如果不用电子计算机的帮助，一个人一辈子也做不完。

1977年12月9日，我国著名科学家钱学森教授在《人民日报》上发表了一篇题为《现代科学技术》的文章，其中有这样一段话：

"去年数学界哄动一时的一件事，是用电子计算机证明了数学上的四色定理。画地图要求相邻两国不用同一色，一幅地图最多只需要四种颜色。要证明这个定理很难，数学家经过上百年的努力，证明不了。去年美国数学家用电子计算机证明了。他们看到这个问题要证明并不是不可能，而是证明的步骤、程序很复杂，人一辈子的时间也证不完。他们就把程序编好，交给高速的电子计算机去干。高速电子计算机也用了一千多个小时才证出来。美国数学家认为，他们的主要贡献不在证明了四色定理，而在运用电子计算机完成了这件人没有能够完成的事。"

利用高速电子计算机终于解决了数学中的这一大难题。然而数学家们仍旧在问：证明能否简化？是否不用计算机也能证明？这些正等待有志者去攻关。

写到这里，作为四色猜测的一个历史概述本来就可以结束了，但读者心中或者还有一个疑问放不下，那就是1852年德·莫根写信给哈密顿时所提到的那个首先提出地图四色问题的大学生，他又是谁呢？当四色猜测开始引起大家的兴趣以后，1880年有一位名叫弗内德里·古特里(Frederick Guthrie)

的物理学家在爱丁堡皇家学会的刊物上发表了一篇短文，文中谈到大约在三十年前，当他还是德·莫根班级里的一个学生的时候，他的兄弟法朗西斯·古特里(Francis Guthrie)首先告诉他地图的四色问题，因为他无法解决，所以才写信向德·莫根教授请教。

以后，法朗西斯自己也成了一名数学教授，任教于开普敦的南非大学，他一直活到1899年，但他对自己所提出的问题并无建树。虽然如此，他却是第一个提出地图四色猜测的人。时间是1852年。

三、平面图的概念

为了把地图四色问题表示成一个明确的数学问题，我们必须引进平面图的概念。

专门研究图的一门学问叫做**图论**，它是数学的一个分支。近年来，随着电子计算机的发展和数学应用的日益广泛，图论的重要性正在日益增加，从事图论的研究和教学的人也逐渐增多。十年前，在我国的理工科大学中几乎没有涉及图论的课程，而今天，凡是设有计算机科学的系或类似专业的理工科大学，以及设有科学管理或经济管理、规划等专业的理工科大学和文科大学，都开设了含有图论的课程。仅从这一件事就可以看出图论的重要性了。

图论的研究对象是图，平面图是图论的一个组成部分。什么叫做图？何谓平面图？它们的直观定义是很简单的：给定若

干个点，并且又告诉你在某些点和点之间必须用一条线相连(连线的形状是直的还是弯曲的，那是无所谓的)，**这就构成了图**。例如，有三个小镇 A, B, C，我们把它们看作三个点，再有三个工厂 α, β, γ，它们是电厂，水厂和煤气厂，我们也把它们看作给定另三个点。这样，我们就有六个点，A, B, C 和 α, β, γ。此外，还告诉我们每个小镇都要分别和这三家工厂相连(用输电线和电厂相连，用水管和水厂相连，用煤气管和煤气厂相连)，这样我们又有了 9 条连线，它们连结着 $A\alpha, A\beta, A\gamma, B\alpha, B\beta, B\gamma$ 和 $C\alpha, C\beta, C\gamma$，这就构成了一个图。我们称图内的点是**顶点**，又称两顶点间的连线是**边**。因而又可以说，图是由顶点和边组成的。什么叫做平面图呢？**首先它是一个图，有若干顶点和一些边，其次，可以把这个图画在一个平面上**(例如画在一张纸上)，**使得边与边之间只可能在顶点上相交，而在顶点之外，边与边之间决不互相交叉，这样的图叫做平面图**。或者说，**平面图是可以摊在平面上的图，其中边与边之间在顶点外互不交叉**。例如，容易看出下面的三个图(图5, 6, 7)都是平面图，图上的边只在顶点上相交，而在顶点外任何两条边都不交叉。

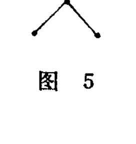


图 5

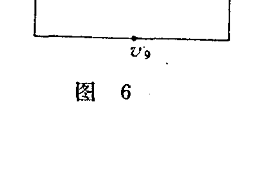


图 6

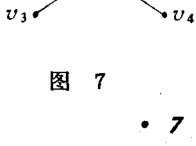


图 7

我们称图 5 是**树形图**,因为它象一棵树。

现在要问读者一个问题:图 6 和图 7 是不是同一个图?从图的外表看,它们的形象十分不同,似乎根本不是同一个图,然而,从图的定义来看,它们都是同一个图。为什么呢?因为这两个图中各自都有 9 个顶点,它们分别为$v_1, v_2, \cdots, v_9$,并且它们的 v_1 都和 v_2, v_5, v_6 相连,而不和其他的顶点相连,两个图的 v_2 也只和 v_1, v_3, v_4, v_5 相连,…,等等。换句话说,在这两个图中,顶点和边都是相同的,所不同的仅仅是顶点的位置以及边的形状罢了,而在图的定义中,对点的位置和边的形状并没有什么限制,所以这两个外表看来很有差异的图都是同一个图。

作为平面图的一个重要标志就是能够摊在平面上,边与边之间在顶点外互不交叉,那么,图 8 是不是一个平面图?你或许会说:“它是一个正方体的图,是一个立体图,不是平面图。”你甚至会进一步的解说:“把它画在一张纸上,不可避免的会出现互相交叉的边,而其交点并非顶点。”如果这样回答,

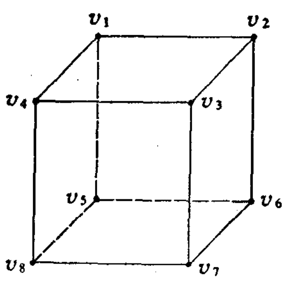


图 8

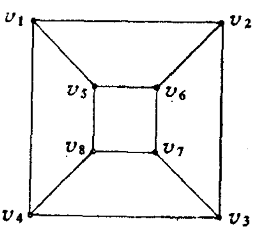


图 9

那就答错了。我们说它仍旧是一个平面图,只要把它和图 9

比较一下就知道了。这两个图的顶点和边是完全一样的，例如，它们都有 8 个顶点，各自的 v_1 都只和 v_2, v_4, v_5 相连，…，等等，所以它们是同一个图。图 8 完全可以摊在平面上成为图 9，而图 9 是一个平面图，于是图 8 也是一个平面图。

同样，图 10 和图 11 也是同一个图，它们都是平面图。举一反三，读者不难发现任何一个凸多面体都可以看成是一个平面图。

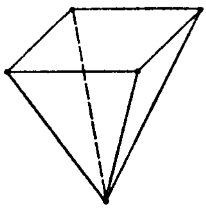


图　10

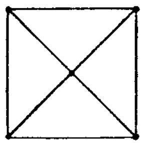


图　11

再问：图 12 是不是一个平面图？大概你也会说：“它不是一个平面图，因为 v_1、v_3 的连线和 v_2、v_4 的连线有交叉，其交点不是顶点。其实它也是一个平面图，只是我们没有把它画好而已。我们完全可以把它画成图 13 的那个样子，这就成为一个平面图了。这表明图中的边是一根如同橡皮筋似的绳子，可以随你拉来拉去。

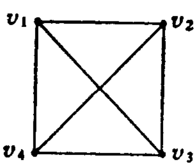


图　12

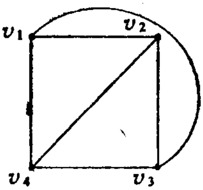


图　13

是不是所有的图都是平面图呢？这倒不见得。其实非平

面图多得很呢。例如图 14 就不是一个平面图，不管你把图上的边想象成是一根多么柔软和多么富有弹性的绳子，可以让

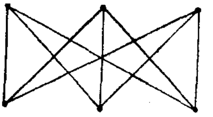


图 14

你拉来拉去，但总不可避免会出现在顶点外互相交叉的边。在这本小册子中，我们将证明这一点。

图论的应用是相当广泛的。例如架设电话线，就可以把电话机当作图的顶点，把电话线当作图的边。又如自来水管道路线的设计，印刷电路或集成电路的布线等问题都牵涉到图论的基本理论和它的应用。

在图论中，为了研究起来更方便一些，我们往往对图作以下几个约定：

(i) **如果两个顶点之间有边相连，那么它们只有一条边。**这个约定从图论的实际应用来看倒是合情合理的，譬如架电话线，如果电话机 a 和电话机 b 之间要用电话线相连，那么只要架一条线就可以了。又如你家厨房里要装一只水龙头，只要接上一根水管就足够了。

(ii) **任何顶点和它自己之间没有连线。**例如电话机 a 大可不必架设一条电话线返回到 a 本身。

根据 1,2 两个约定，图 15 中画出的两个图将不在我们所

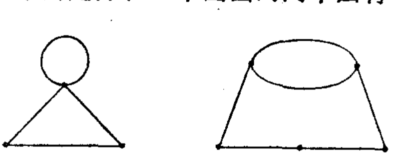


图 15

讨论的范围内。这当然不是说它们都不是图，也不是说在图

论中根本不研究这种类型的图，而是说在相当多的场合下将不考虑这种图，在这本小册子里，我们也是这样约定。

(iii) **除了上面两个约定，我们还要求我们讨论的图是连通图。**什么叫做连通图呢？如果图中任何两个顶点之间或者有一条边相连，或者总可以通过其他的边相通，这种图叫做**连通图**。例如市内的两个电话机 a 和 b，虽然它们不直接相连，但它们总可以通过一系列其他的连线彼此相通。因此，市内的电话机，中转交换台(把它们看成顶点)以及电话线(把它看成边）组成一个连通的图。这一约定也是十分自然的。对一个不连通的图，例如图 16 中所画的图，它由左右两个部分组成，这两个部分之间却互不相通，因此图 16 就不是一个连通的图，但它可以分解为两个连通的部分图来讨论。

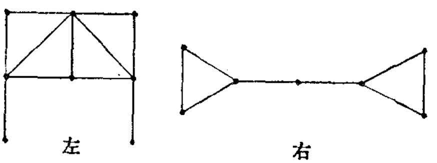


图 16

读者不难看出，图 5～图 14都是符合上述三条约定的图。其中图 14 不是平面图。

有了平面图的概念以后，我们就可以把地图的四色问题用平面图的四色问题来表达了。

四、四色问题的数学提法

给我们一个连通的平面图，如果两个顶点之间有一条边

相连，我们就称这两个顶点是**相邻的**。例如图 17 中，v_1 和 v_2 相邻，v_2 和 v_3 相邻，但 v_1 和 v_3 不相邻，v_1 和 v_4 也不相邻，…，等等。

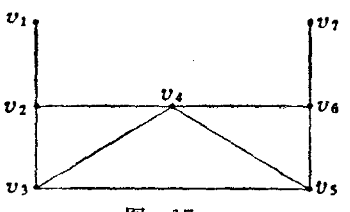


图 17

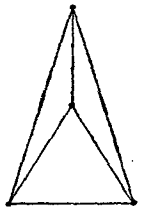


图 18

现在，我们将平面图上的每一个顶点涂上一种颜色，唯一要遵循的原则是：相邻的两个顶点不准涂同一种颜色。问：对任何一个平面图，需要多少种颜色就够了？猜测是：四种！是不是可以少于四种呢？不行，例如图 18，它是一个平面图，但它必须有四种颜色才行，少一种就没有办法来涂它了。

地图的四色问题可以化为平面图的四色问题。为什么这样说呢？让我们先来考察图 1 中所画出的那幅假想地图（见图 19）：它是由五个国家 A, B, C, D 以及“外”组成；我们设想每一个国家用它的首都来作代表，首都的颜色就是国家的颜色，

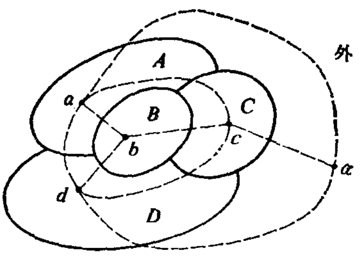


图 19

设 A,B,C,D 的首都分别是 a,b,c,d，“外”的首都记为 α；现在，我们把这些首都看作图上的顶点，凡是相邻的国家，我们用一条连线将它们的首都连结起来，例如 A,B 两国相邻，我们就在它们的首都 a,b 之间连一条线，这些线就组成图中的边。原先在图 19 中的那幅地图，这时变成图 20 中的一张平面图了。因此，每一幅地图都可以画出和它相当的一张平面图。读者不难看出，地图的四色问题也就转化为平面图的四色问题了。这就是地图四色问题的一种数学提法。

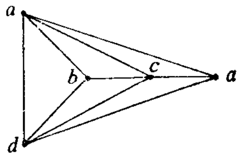


图 20

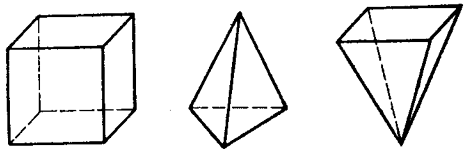
在这本小册子里，我们将利用欧拉(Euler)公式来证明平面图的五色定理。由于欧拉公式还有许多有趣而有意义的应用，因此，在这本小册子里，我们还打算向读者介绍欧拉公式的几个应用。最后还给出一些习题并附有题解，让有兴趣的读者去参考。

五、欧拉公式 $V-E+F=2$

打开高中的数学教材或者类似的自学丛书，都有一个关于凸多面体的欧拉公式。这个公式是十八世纪著名数学家、瑞士人、俄国彼得堡科学院院士欧拉在 1750 年写信给他的好友哥德巴赫时提出来的，并在 1752 年发表了一个证明。欧拉指出，任何一个凸多面体的顶点数 V，棱数 E 和面数 F 之间有着一个确定的关系：

$$V-E+F=2.$$

这就是非常漂亮的**欧拉公式**。在图 21 中我们画出了三个具体的凸多面体，读者不难验证欧拉公式的正确性。



$V=8$ $E=12$ $F=6$ ； $V=4$ $E=6$ $F=4$ ； $V=5$ $E=8$ $F=5$

图 21

欧拉公式是不是只局限于凸多面体呢？

在一个连通的平面图中，设顶点的数目是 V，边的数目是 E，以及由边所围成的面的数目是 F，那么，在 V,E,F 之间是不是也有一个如同凸多面体中的欧拉公式呢？我们先来观察下面两个连通的平面图(图 22, 23)。

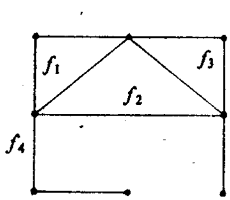


图 22

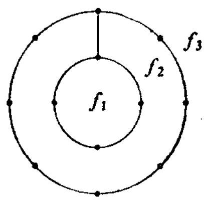


图 23

在图 22 中，顶点数 $V=8$，边数 $E=10$，面数 $F=4$。为什么说面数 $F=4$ 呢？看起来由边所围成的面只有三个，即图中的 f_1，f_2 和 f_3，其实，最外面的那个 f_4 也应该算作一个面，所以面数 $F=4$，这时，欧拉公式 $V-E+F=2$ 成立。在图23中，顶点数$V=12$，边数$E=13$，面数$F=3$，欧拉公式也成立。读者