Shuzi Luoji De Tuxing Fangfa

数字逻辑的图形方法

陈偕雄 余党军 著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

数字逻辑的图形方法

陈偕雄　余党军 著

机械工业出版社

本书系统地介绍了数字逻辑的图形方法：逻辑函数的各种图形表示、相互间的转换以及在逻辑分析与逻辑设计中的应用。全书共5章分别介绍逻辑函数的K图及其应用，逻辑函数的b_j图表示及其应用，对称函数的图形表示及其应用，逻辑函数的分解图与RM分解图表示及其应用，逻辑函数的谱系数图及其应用。

本书可作为近代数字理论领域研究生的教学参考书，从事数字电路与逻辑设计教学与科研的教师用书，也可以供从事数字逻辑及近代数字理论研究工作的科技人员阅读。

图书在版编目（C I P）数据

数字逻辑的图形方法 / 陈偕雄，余党军著. —北京：
机械工业出版社，2003.12
ISBN 7-111-13710-8

Ⅰ.数... Ⅱ.①陈... ②余... Ⅲ.数字逻辑
Ⅳ.TP302.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第120724号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037）
策划编辑：余茂祚 责任编辑：余茂祚
封面设计：张 静 责任印制：闫 焱
北京中加印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2004年2月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm1/16·9.25印张·228千字
定价：17.00元

前　言

数字逻辑的图形方法是逻辑分析与逻辑设计的一种有效工具。与其它图形方法一样，它具有直观、简便、易于理解与掌握等优点。在通常的数字电路逻辑设计本科教材中仅介绍 K 图，对于其它的图形方法未作介绍。在近代数字理论研究生教材中对图形方法缺乏系统、深入的介绍。为了弥补教材在广度与深度方面的不足，以及培养学生的创新能力，作者在多年教学与科研积累的基础上撰写了这本专著。

本书共分 5 章，分别介绍 K 图及其应用、b_j 图及其应用、对称函数的图形表示及其应用、分解图与 RM 分解图及其应用以及谱系数图及其应用。

第 1 章和第 2 章由余党军撰写。第 1 章介绍逻辑函数的 K 图的特点和性质，单输出和多输出函数的 K 图化简，降维 K 图与互斥变量 K 图及其化简，多值函数的 K 图及其化简，K 图在设计无冒险组合逻辑电路、计算逻辑函数的布尔差分以及在基于函数分解的逻辑设计中的应用。第 2 章介绍逻辑函数的 b_j 图的特点和性质，K 图与 b_j 图的转换，基于 b_j 图的逻辑函数在固定极性下的化简，基于 b_j 图的单输出与多输出函数在混合极性下的化简，降维 b_j 图与互斥变量 b_j 图及其化简，多值函数的 b_j 图及其化简，b_j 图在计算逻辑函数的布尔差分、布尔偏导数以及在验证通用逻辑门中的应用。

第 3 章至第 5 章由陈偕雄撰写。第 3 章介绍部分对称函数与全对称函数的定义与性质，部分对称函数与全对称函数的 K 图与 b_j 图表示，K 图与 b_j 图在检测函数对称性中的应用，对称函数在基本对称函数完备集及基本 RM 型对称函数完备集中展开系数的图形表示及相互转换，基于函数对称性及对称函数的逻辑设计中的图形方法。第 4 章介绍逻辑函数的分解图与 RM 分解图的特点、性质和化简，降维分解图与降维 RM 分解图及其化简，互斥变量分解图与多值函数的分解图及其化简，分解图在将任意逻辑函数变换成对称函数中的应用，分解图与 RM 分解图在检测函数对称性及基于通用逻辑门的逻辑设计中的应用。第 5 章介绍谱系数图的特点和性质，谱系数图与 K 图、b_j 图的转换，谱系数图在检测函数对称性、基于一次谱系数最大化的逻辑设计、基于阈值门的逻辑设计中的应用，函数值取值 {0, 1} 的谱变换及其性质以及与 K 图的转换，函数在 Hadamard 与 Haar 变换中的图形表示以及有关图形转换。

作者衷心感谢国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、浙江省教育厅对研究工作的多项资助；衷心感谢机械工业出版社对出版本书的支持；衷心感谢金华学院在本书出版工作中给予的支持和科研出版基金的资助。

作　者

目　录

第 1 章　逻辑函数的 K 图表示及其应用

1.1 K 图的引入、特点和性质

1.1.1　K 图的引入

由于人类主要以视觉形式接受外界信息，因此在研究各类问题中具有直观、形象和方便等优点的图形方法受到重视，数字逻辑中的图形方法同样也具有直观、形象和方便等优点。早在 1847 年英国数学家 George Boole[1]在研究逻辑问题时企图用数学予以描述，后来在此基础上建立了“布尔代数”，又称“逻辑代数”。在布尔代数中，逻辑函数被表示成代数式或表格形式，以三变量函数 $f(x,y,z)$ 为例，它可以表示成如式（1-1）所示的最小项展开式：

$$f(x,y,z)=c_0\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}+c_1\bar{x}\ \bar{y}\ z+c_2\bar{x}\ y\ \bar{z}+c_3\bar{x}\ y\ z+ \\ c_4x\ \bar{y}\ \bar{z}+c_5x\ \bar{y}\ z+c_6x\ y\ \bar{z}+c_7x\ y\ z \tag{1-1}$$

式中 c_i 为逻辑函数的最小项展开系数。$f(x,y,z)$ 还可用表 1-1 所示的真值表予以表示，表中 $c_i\in\{0,1\}$，同时也是函数在相应输入条件下的函数值。在普通代数中，函数除了可用上述两种形式表示以外，还可以用几何形式予以表示。在布尔代数中，由于变量 x,y,z 均只能取 0，1 两个值，因此三变量的 8 种变量组合可以表示成边长为 1 的立方体的 8 个顶点，相应的函数值 c_i 填入各顶点，如图 1-1a 所示。为了在二维平面上表示函数图形，可以在图中标×处剪断后展开，从而使立方体的 8 个顶点在同一平面上，如图 1-1b 所示，图中用括号把坐标变量标在相应的位置上。如果把图 1-1b 变

表 1-1　三变量函数真值

xyz	$f(x,y,z)$
000	c_0
001	c_1
010	c_2
011	c_3
100	c_4
101	c_5
110	c_6
111	c_7

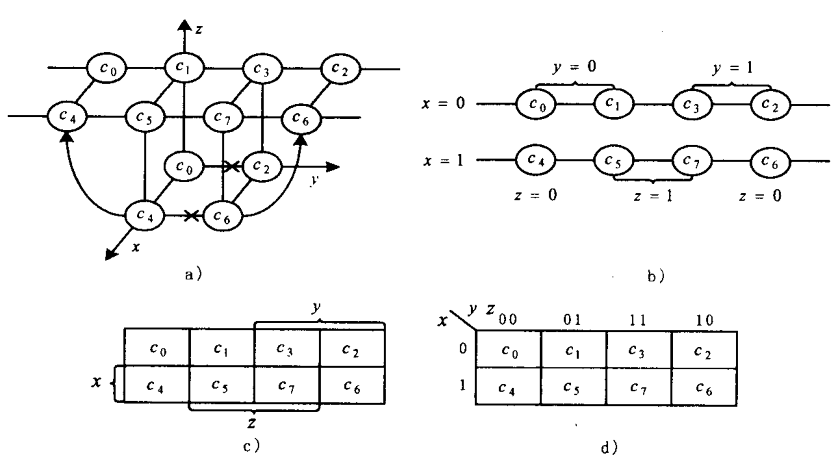


图 1-1　三变量K图的引入

化一下，并用变量括入区表示变量为 1 的区域，则可得到图 1-1c，这就是三变量函数的 K 图表示，图 1-1d 则是 K 图表示的另一种形式[2]。四变量与五变量函数的 K 图表示如图 1-2 所示。在四变量 K 图中最上面和最下面的格子（如 c_1 与 c_9）是相邻的，最左面和最右面的格子（如 c_0 和 c_2）也是相邻的。对于五变量 K 图而言，除了以上相邻外，还存在着对称相邻（如 c_{19} 与 c_{23}）。当变量数大于 6 时，相邻的辨别就更困难了，因此 K 图通常不适用于变量数大于 6 的情况。

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	c_0	c_1	c_3	c_2
01	c_4	c_5	c_7	c_6
11	c_{12}	c_{13}	c_{15}	c_{14}
10	c_8	c_9	c_{11}	c_{10}

a） 四变量K图

x_1x_2 \ $x_3x_4x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	c_0	c_1	c_3	c_2	c_6	c_7	c_5	c_4
01	c_8	c_9	c_{11}	c_{10}	c_{14}	c_{15}	c_{13}	c_{12}
11	c_{24}	c_{25}	c_{27}	c_{26}	c_{30}	c_{31}	c_{29}	c_{28}
10	c_{16}	c_{17}	c_{19}	c_{18}	c_{22}	c_{23}	c_{21}	c_{20}

b） 五变量K图

图 1-2　四变量与五变量 K 图

1.1.2　K 图的特点[3、4]

K 图是逻辑函数在与、或、非代数系统中的图形表示，它具有如下特点：

(1) K 图中每个格子对应一个最小项，格内填入量为该最小项的系数 c_i，它表示函数在该输入条件下的函数值。以图 1-3a 所示的三变量 K 图为例，图中各格的下方给出了各格相应的最小项，它可以按以下规则读得：如某格在 x_i 为 1 区，则 x_i 为原变量；反之，x_i 为反变量。例如 c_3 格对应 $x_1=0, x_2=x_3=1$，故 c_3 格对应的最小项为 $\bar{x}_1x_2x_3$。

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	c_0 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	c_1 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	c_3 $\bar{x}_1x_2x_3$	c_2 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
1	c_4 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	c_5 $x_1\bar{x}_2x_3$	c_7 $x_1x_2x_3$	c_6 $x_1x_2\bar{x}_3$

a） K图

0	1	2	1
1	2	3	2

b） 海明距离图

图 1-3　三变量 K 图及海明距离图

(2) 相邻格对应的最小项只有一个变量相反。如图 1-3a 中的 c_0 与 c_2 格相应的最小项 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 与 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ 只有变量 x_2 相反；c_5 与 c_7 格相应的最小项 $x_1\bar{x}_2x_3$ 与 $x_1x_2x_3$ 只有变量 x_2 相反。图 1-2a 中的 c_1 与 c_9 格相应的最小项 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ 与 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ 只有变量 x_1 相反，图 1-2b 中的 c_0 与 c_4 格相应的最小项 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ 与 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ 只有变量 x_3 相反，c_{19} 格与 c_{23} 格相应的最小项 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5$ 与 $x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5$ 只有变量 x_3 相反。

(3) K 图中 2^k 个相邻 1 值格可以聚合，即 2^k 个相邻 1 值最小项可以合并，合并后的乘积项（与项）按以下规则组成：如该聚合圈全部在变量 x_i 为 1 区，则该积项中含变量 x_i；如该圈全部在变量 x_i 为 0 区，则该积项中含变量 $\bar{x}_i$；如该聚合圈的一半在 x_i 为 1 区，另一半在 x_i 为 0 区，则积项中不含变量 x_i。应该注意，在变量数大于 4 的 K 图中有可能出现 2^k 个几何上相邻的 1 值格却不能合并的情况。例如，在图 1-2b 所示的五变量 K 图中，由 $c_1c_3c_2c_6$ 四格组成的聚合圈因有 3 格 $(c_1c_3c_2)$ 在 x_3 为 0 区，有 1 格 c_6 在 x_3 为 1 区，因此它们不能合并。在变

量数小于或等于 4 的 K 图中不会发生这种情况。

在 K 图中任意两格对应的两个最小项之间变量相反数称为两格之间的海明距离。例如，在图 1-3a 中 c_1 与 c_3 格海明距离为 1，c_1 与 c_4 格海明距离为 2，c_1 与 c_6 格海明距离为 3。显而易见，相邻格的海明距离必定为 1；反之亦然。图 1-3b 给出了三变量 K 图中各格与全零格（各变量均取反变量相应的格）c_0 之间的海明距离，因此它们实际上表示该格对应的最小项中变量为原变量的数目。例如，c_5 的海明距离为 2，表示 c_5 对应的最小项中有 2 个变量为原变量。

1.1.3 K 图的性质

为了讨论 K 图的性质，需要引入 K 图的原点与重心的概念。

定义 1-1 在 K 图中与最小项 m_0（各变量均取反的最小项）相对应的 c_0 格定义为 K 图的原点。

由于原点对应的最小项中各变量均为反变量，在 K 图中 c_0 格位于各变量为 0 区，因此又称它为全零格。

定义 1-2 在 K 图中与最小项 m_{2^n-1}（各变量均为原变量的最小项）相对应的 c_{2^n-1} 格定义为 K 图的重心。

由于重心对应的最小项中各变量均为原变量，在 K 图中重心位于各变量为 1 区，因此又称它为全 1 格。根据上述定义，在三变量、四变量及五变量 K 图中的原点与重心分别是 c_0、c_7；c_0、c_{15}；c_0、c_{31}，相应的海明距离分别为 0、3；0、4；0、5。

逻辑函数的 K 图具有如下性质：

性质 1 在 K 图中所有过某格的聚合圈相应的乘积项中所含各变量具有相同的极性。

证明 因为过某格的聚合圈相应的乘积项是该格对应的最小项与相邻最小项合并的结果。根据聚合圈相应乘积项的组成规则，合并后的乘积项部分变量因合并而消失，其余变量的极性必定与该格对应的最小项中变量的极性相同，于是定理得证。

性质 1 在数学上可表示为：在 K 图中所有过某格（设对应的最小项为 $\dot{x}_1\dot{x}_2\cdots\dot{x}_n$）的聚合圈相应的乘积项可用矩阵的 Kronecker 矩阵表示为

$$(1\quad \dot{x}_1)\otimes(1\quad \dot{x}_2)\cdots\otimes(1\quad \dot{x}_n)=\bigotimes_{i=1}^{n}(1\quad \dot{x}_i)$$

式中⊗表示 Kronecker 矩阵中所含各变量具有相同的极性。以三变量 K 图中的 c_1 格为例，与 c_1 格对应的最小项为 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$。由于 $(1\quad \bar{x}_1)\otimes(1\quad \bar{x}_2)\otimes(1\quad x_3)=(1\quad x_3\quad \bar{x}_2\quad \bar{x}_2x_3\quad \bar{x}_1\quad \bar{x}_1x_3\quad \bar{x}_1\bar{x}_2\quad \bar{x}_1\bar{x}_2x_3)$，因此过 c_1 格的所有 8 个聚合圈对应的乘积项分别是：1，x_3，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_2x_3$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_1x_3$，$\bar{x}_1x_2$，$\bar{x}_1x_2x_3$。显然，各乘积项中所含各变量与最小项 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ 中各变量具有相同的极性。由于 K 图的原点与重心分别对应变量全部取反的最小项与变量全部为原变量的最小项，因此根据性质 1 不难得到以下两个推论。

推论 1 在 K 图中所有过原点的聚合圈相应的乘积项中各变量均为反变量。

推论 2 在 K 图中所有过重心的聚合圈相应的乘积项中各变量均为原变量。

性质 2 在 K 图中任一聚合圈相应的乘积项中，原变量数等于聚合圈中最小海明距离，2^k 个 1 值格组成的聚合圈消失 k 个变量，并且消失变量数 k 等于聚合圈中最大、最小海明距离之差。

由于在 K 图中任意两个相邻 1 值格组成的聚合圈中海明距离之差必定为 1，因此它们相应的乘积项（称为二格项）消失 1 个变量。不难发现，任意四个相邻 1 值格组成的聚合圈中最大海明距离与最小海明距离之差为 2，因此四格项必定消失 2 个变量。例如，图 1-2a 中的 c_6、c_7、c_{15}、c_{14} 组成的四格项，最大海明距离（c_{15} 格）为 4，最小海明距离（c_6 格）为 2，它们分别对应最小项 $x_1x_2x_3x_4$ 与 $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$，合并后消失两个变量 x_1、x_4。依次类推，2^k 个相邻 1 值格组成的 2^k 格项将消失 k 个变量。设 2^k 个相邻 1 值格组成的聚合圈中最小海明距离为 i，它表示该相应最小项中原变量数为 i，则与它相邻的最小项中原变量数为 $i+1$，其中 i 个原变量与最小海明距离格含有 i 个原变量相同。依此类推，2^k 个相邻 1 值格中均含该 i 个原变量。根据合并规则，合并后的乘积项中将仍含 i 个原变量，而最小海明距离含有的反变量中将有 k 个变量消失。

性质 3 两个相同变量的逻辑函数的逻辑运算的 K 图即为两 K 图各对应格的逻辑运算所得结果组成的 K 图。

证明 设 $f_1 = c_0\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}x_1\cdots x_n$，

$f_2 = c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n$

则有

$$\begin{aligned} f_1\cdot f_2 &= c_0c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n + c_0c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}\bar{x}_nx_n + \\ &\quad \cdots + c_{2^n-2}c_{2^n-1}'x_1\cdots x_{n-1}\bar{x}_nx_n \\ &= c_0c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n \end{aligned}$$

上式在相乘过程中由于任意两个不同的最小项之积必为 0，故所有的交叉项都消失了[4]。上式表示 $f_1\cdot f_2$ 的 K 图即为 f_1 的 K 图跟 f_2 的 K 图中各相应格的填入量之与运算结果所组成的 K 图。

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= c_0\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}x_1\cdots x_n + c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \\ &\quad \cdots + c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n \\ &= (c_0 + c_0')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + (c_1 + c_1')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + (c_{2^n-1} + c_{2^n-1}')x_1\cdots x_n \end{aligned}$$

上式表示 $f_1 + f_2$ 的 K 图即为 f_1 的 K 图跟 f_2 的 K 图中各相应格的填入量之或运算结果所组成的 K 图。

$$\begin{aligned} f_1 \oplus f_2 &= (c_0\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + c_{2^n-1}x_1\cdots x_n) \oplus (c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \\ &\quad \cdots + c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n) \end{aligned}$$

利用或运算及异或运算的关系，考虑到任意二个不同的最小项之积为 0，因此最小项之或可以写成最小项之异或；反之亦然。故有

$$\begin{aligned} f_1 \oplus f_2 &= c_0\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n \oplus c_1\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n \oplus\cdots\oplus c_{2^n-1}x_1\cdots x_n \oplus c_0'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n \oplus c_1'\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n \\ &\quad \oplus\cdots\oplus c_{2^n-1}'x_1\cdots x_n \\ &= (c_0 \oplus c_0')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n \oplus (c_1 \oplus c_1')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n \oplus\cdots\oplus (c_{2^n-1} \oplus c_{2^n-1}')x_1\cdots x_n \\ &= (c_0 \oplus c_0')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_n + (c_1 \oplus c_1')\bar{x}_1\cdots\bar{x}_{n-1}x_n + \cdots + (c_{2^n-1} \oplus c_{2^n-1}')x_1\cdots x_n \end{aligned}$$

上式表示 $f_1 \oplus f_2$ 的 K 图即为 f_1 的 K 图跟 f_2 的 K 图中各相应格的填入量之异或运算结果所组成的 K 图。由于 $\bar{f}$ 为 f 之反，因此在任一输入条件下 $\bar{f}$ 的函数值与 f 的函数值应该相反，而 $\bar{f}$ 与 f 的函数值分别为 $\bar{f}$ 与 f 的 K 图中相应格的填入量，因此 $\bar{f}$ 的 K 图与 f 的 K 图各格的填入量均相反。于是性质 3 证毕。

例 1-1 设 $f_1(x_1 \sim x_3)$ 与 $f_2(x_1 \sim x_3)$ 的 K 图分别如图 1-4a、b 所示，试画出 $f_1 \cdot f_2$，$f_1 + f_2$，$f_1 \oplus f_2$ 及 $\overline{f}_1$ 的 K 图。

由于 f_1 和 f_2 的 K 图中仅含常量 0 和 1，因此可根据常量逻辑运算的规则计算各相应格的运算结果，然后填入 K 图，可以得到如图 1-4c～f 所示的 $f_1 \cdot f_2$，$f_1 + f_2$，$f_1 \oplus f_2$ 及 $\overline{f_1}$ 的 K 图。显然，$\overline{f_1}$ 与 f_1 的 K 图中各格填入量均相反。

f_1　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

a） f_1 的K图

f_2　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

b） f_2 的K图

$f_1 \cdot f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0

c） $f_1 \cdot f_2$ 的K图

$f_1 + f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	1

d） $f_1 + f_2$ 的K图

$f_1 \oplus f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	0	1

e） $f_1 \oplus f_2$ 的K图

$\bar{f}_1$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0

f） $\bar{f}_1$ 的K图

图1-4　K图的逻辑运算

当 K 图中填入量除常量 0、1 外，还有任意项×时，可按以下运算规则予以确定：

$0 \cdot \times = 0$，　$0 + \times = \times$，　$0 \oplus \times = \times$；

$1 \cdot \times = \times$，　$1 + \times = 1$，　$1 \oplus \times = \times$；

$\times \cdot \times = \times$，　$\times + \times = \times$，　$\times \oplus \times = \times$；　$\overline{\times} = \times$.

例 1-2 设 $f_1(x_1 \sim x_3)$ 与 $f_2(x_1 \sim x_3)$ 的 K 图分别如图 1-5a、b 所示，试画出 $f_1 \cdot f_2$，$f_1 + f_2$，$f_1 \oplus f_2$ 及 $\overline{f}_1$ 的 K 图。

由于 f_1 和 f_2 的 K 图中均含任意项，因此应根据常量运算规则，常量与任意项以及任意项与任意项的运算规则对 f_1 和 f_2 的 K 图中各对应格填入量进行逻辑运算，然后将运算结果填入 K 图得到如图 1-5c～f 所示的 K 图。

f_1　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	X	X	1
1	0	1	1	0

a） f_1 的 K 图

f_2　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	X	1
1	1	X	1	0

b） f_2 的 K 图

$f_1 \cdot f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	0	X	1
1	0	X	1	0

c） $f_1 \cdot f_2$ 的 K 图

$f_1 + f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	X	X	1
1	1	1	1	0

d） $f_1 + f_2$ 的 K 图

$f_1 \oplus f_2$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	0	X	X	0
1	1	X	0	0

e） $f_1 \oplus f_2$ 的 K 图

$\bar{f}_1$　x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	X	X	0
1	1	0	0	1

f） $\bar{f}_1$ 的 K 图

图 1-5　含任意项的 K 图的逻辑运算

1.2 逻辑函数的K图化简

1.2.1 单输出逻辑函数的K图化简

在使用门电路设计组合电路时，由于门电路与逻辑函数式中的逻辑运算相对应，因此逻辑函数的形式越简单，相应的门电路实现也就越简单。所以我们在使用门电路设计组合电路时，首先应该对待实现的逻辑函数进行化简，以求得逻辑函数的最小化的表示式。由于与非运算及或非运算均单独构成完备集，因此只要使用一种门电路（与非门或者或非门）可实现任意逻辑函数。注意到逻辑函数的与／或式跟与非／与非二级门电路实现相对应，逻辑函数的或／与式则跟或非/或非二级门电路实现相对应，因此我们一旦选定了设计组合电路使用的门电路类型后，相应逻辑函数的最简的代数形式也就随之确定。如果使用与非门，则应将逻辑函数化简成最简与／或式；如果选用或非门，则应将它化简成最简或／与式。

1. 逻辑函数与／或式的K图化简[5,8]。在讨论逻辑函数的K图化简之前先给出一些定义：

定义 1-3 K图中2^k个相邻1值格组成的聚合圈相应的乘积项称为逻辑函数的蕴涵项。

定义 1-4 不能和其它蕴涵项合并的蕴涵项称为素蕴涵项。

例如，图1-6所示的f的K图中的AC、ABD为素蕴涵项，而ABC、ACD均为蕴涵项，但不是素蕴涵项，因为它们可以被并入AC。

定义 1-5 至少包含一个不被其它素蕴涵项覆盖的最小项的素蕴涵项称为实质蕴涵项，相应的最小项则称为实质最小项。

在使用K图化简逻辑函数与／或式时只圈K图中的1值格。根据K图的特点，聚合圈越大，相应的乘积项中所含的变量数越小，因此所需与非门的输入端数越少。由于每个聚合圈对应一个乘积项，因此聚合圈越少，所需与非门数就越少。此外，由于1+1=1，因此1值格被圈用后作任意项处理，即1值格可重复圈用，具体化简步骤如下：

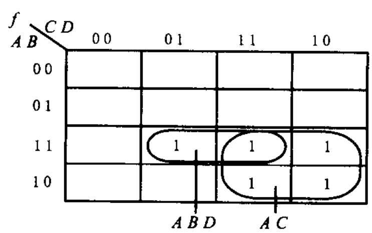


图1-6 f的K图

（1）画出逻辑函数的K图，标出实质最小项。

（2）画实质蕴涵圈，对余下未圈用过的1值格按圈尽可能大，圈数尽可能少的原则画聚合圈。

（3）检查是否存在冗余聚合圈，如有则应删去冗余圈。

（4）根据K图写出逻辑函数的最简与／或式。

例 1-3 设$f(x_1 \sim x_4)$的K图如图1-7所示，试用K图法化简，写出它最简与／或式。不难发现，c_2、c_5、c_{14}格为实质最小项，相应的方格中标·号。画出各实质蕴涵项聚合圈后，发现f的1值格均被圈过。

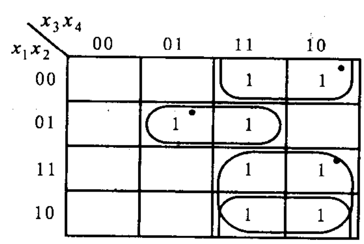


图1-7 $f(x_1 \sim x_4)$的K图化简

由K图可读得

$$f_2(x_1 \sim x_4) = \bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_4 + x_1x_3$$

例 1-4 设$f(x_1 \sim x_4) = \sum 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13$，试用K图法化简$f$，写出它的最简与／或式。

先将f填入 K 图，如图 1-8a 所示。可以发现，该 K 图中不存在实质最小项，这就是所谓的循环情况。这时我们可任选一个素蕴涵项聚合圈，该圈选定后容易画出其它聚合。例如，

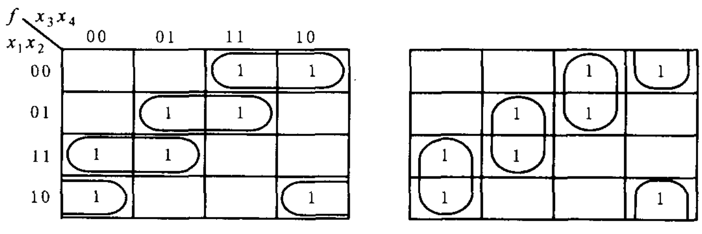


图 1-8　f的 K 图化简

先画含c_2、c_3格的聚合圈，便可得到如图 1-8a 所示的各聚合圈，相应的f的最简与 / 或式为

$$f(x_1 \sim x_4)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$$

如果先画含c_3、c_7的聚合图，则可得到如图 1-8b 所示的各聚合圈，相应的f的另一种最简与 / 或式为

$$f(x_1 \sim x_4)=\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

例 1-5　设$f(A \sim D)$的 K 图如图 1-9 所示，试用 K 图予以化简，写出它的最简与 / 或式。

图 1-9 中标“×”的格表示任意项，可以任意取值。按 K 图化简步骤，标出实质最小项c_0、c_3、c_{12}，画出实质蕴涵项聚合圈，如图 1-9 所示。由 K 图可以写出$f(A \sim D)$的最简与/或式。

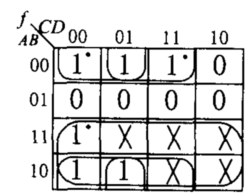


图 1-9　f的 K 图化简

$$f(A \sim D)=A+\overline{B}\overline{C}+\overline{B}D$$

2. 逻辑函数或 / 与式的 K 图化简。化简方法：首先画出$\bar{f}$的 K 图，然后用 K 图化简函数$\bar{f}$，写出$\bar{f}$的最简与 / 或式，最后利用公式$f=\bar{\bar{f}}$求得f的最简或 / 与式。注意到函数f与$\bar{f}$的 K 图的填入量相反，f的 1 值格在$\bar{f}$的 K 图中为 0 值格，反之亦然。因此也可以在f的 K 图上对 0 值格画圈，从而得到$\bar{f}$的最简与 / 或式。

例 1-6　试用 K 图化简例 1-5 中函数$f(A \sim D)$，写出它的最简或 / 与式。

由图 1-9 所示的 K 图容易得到图 1-10 所示$\bar{f}$的 K 图。图中标出实质最小项，画出实质蕴涵项聚合圈。由图可以得到$\bar{f}$的最简与 / 或式：

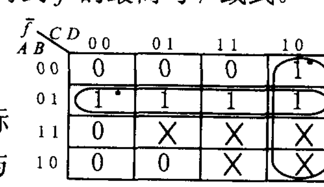


图 1-10　$\bar{f}$的 K 图简化

$$\overline{f(A \sim D)}=\overline{A}B+C\overline{D}$$

对上式求反得

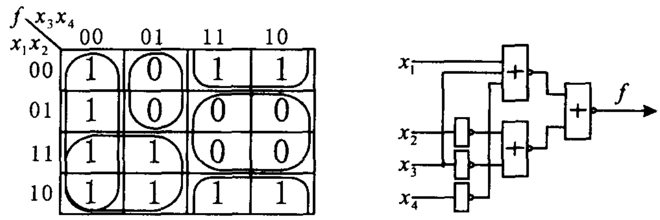
$$f=\overline{\overline{A}B+C\overline{D}}=(A+\overline{B})(\overline{C}+D)$$

显然，我们也可在f的 K 图上通过对 0 值格画圈得到同样的结果。

例 1-7　试用门电路实现图 1-11 所示函数$f(x_1 \sim x_4)$，要求电路成本最低，写出最简函数形式，画出逻辑图。

先考虑使用与非门的逻辑设计。在图 1-11 中对 1 值格画圈可得到它的最简与 / 或式:

$$f(x_1 \sim x_4)=x_1\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3+\bar{x}_3\bar{x}_4=\overline{\overline{x_1\bar{x}_3}\cdot\overline{\bar{x}_2x_3}\cdot\overline{\bar{x}_3\bar{x}_4}}$$



a) f 的K图　　b) 用或非门实现 f 的电路

图 1-11　函数 f 的 K 图化简及电路实现

鉴于一块反相器集成块中有 6 个反相器，一块二输入门电路集成块有 4 个二输入门，一块三输入门电路集成块有 3 个三输入门，一块四输入门电路集成块有 2 个四输入门， 一块八输入门电路集成块有 1 个八输入门，因此与上式相应的电路的成本为

$$\text{成本}=\frac{3}{6}\text{块}+\frac{3}{4}\text{块}+\frac{1}{3}\text{块}=1\frac{7}{12}\text{块}$$

现在考虑使用或非门的逻辑设计。在图 1-11 中对 0 值格画圈可得到 $\bar{f}$ 的最简与 / 或式:

$$f(x_1 \sim x_4)=\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+x_2x_3$$

对上式求反得

$$f(x_1 \sim x_4)=(x_1+x_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_2+\bar{x}_3)=\overline{\overline{x_1+x_3+\bar{x}_4}+\overline{\bar{x}_2+\bar{x}_3}}$$

与上式相应的电路的成本为

$$\text{成本}=\frac{3}{6}\text{块}+\frac{2}{4}\text{块}+\frac{1}{3}\text{块}=1\frac{1}{3}\text{块}$$

显然，采用或非门逻辑设计的电路成本更低，相应的电路实现如图 1-11b 所示。

1.2.2　多输出逻辑函数的 K 图化简[6, 8]

文献[6]指出，如果使用单输出函数化简的方法来化简多输出函数，尽管各个单输出函数分别可达到最简，但是由于在化简过程中未考虑公用项的使用，因此从总体上来说，据此得到的电路的总成本常常不是最低的。在多输出函数化简过程中需要考虑的特殊问题是如何充分利用各函数之间的公用项，以使多输出函数联合设计的电路总体上要比各函数单独设计的结果更为简单。然而，为了寻找与利用各函数之间的公用项，按文献[6]提出的传统设计方法需要考虑各函数相互之间的乘积，研究它们的重复部分（公用部分），因此对于 m 个输出函数的 K 图化简，除了需要画 m 个单独的 K 图外，还需要考虑函数之间各种乘积的 K 图，也即需要画 $c_m^1+c_m^2+\cdots+c_m^m=2^m-1$ 个 K 图组成的 K 图群，从而导致了整个设计过程变得非常复杂和烦琐[6]。 如果我们深入分析造成 K 图大量增加的原因，可以发现主要是由于原来的各个函数的 K 图没有携带函数之间相互重复的信息。因此，为了避免大量增加 K 图所带来的困难，必须使原来的 K 图经过改造后能携带重复次数的信息， 由此导致了多输出函数 K 图的提出[7, 8]。文献[8]提出用 1 值最小项在所有 m 个 K 图中重复出现的次数代替 1，并给出了多输出函数的

K 图化简步骤：

(1) 在各个 K 图中用某格 1 值重复出现次数代替 1，从而获得携带重复信息的多输出函数 K 图。

(2) 在各 K 图中先画含一半格子的单变量素蕴涵项聚合圈，圈内的原有数字均记为“—”，并作任意项处理，然后改写其它 K 图中相应格子的重复次数。

(3) 在各 K 图中对记 1 的格子画圈，圈后的处理同上。

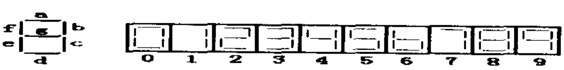
(4) 当各 K 图中没有记 1 格子时可进一步对记 2 格子画圈，画圈时应尽可能利用公用项，圈后处理同前。

(5) 当各 K 图没有记 1、记 2 格时对记 3 格画圈，圈后处理同前。

(6) 如通过上述步骤后各 K 图中的非零格全被圈用，则在经过检查后便可写出各函数的最简与 / 或式。

例 1-8 设计一个七段显示译码器，它接受 8421BCD 码输入，输出 $a \sim g$ 用来驱动七段显示数码管以显示一位十进制数。

图 1-12a 为七段显示数码管，图 1-12b 为显示 0～9 的字形，图 1-12c 为根据显示字形的要求得到的真值表。表中规定输出为高电平有效，即输出 1 值使相应的段发光。由于输入为 8421BCD 码，表中输入 1010～1111 是不可能发生的，因此对应的输出均记作“×”，表示在化简过程可作任意项处理。



a) 七段数码管　　　　b) 显示字形

十进制数	输入 $ABCD$	输出 $abcdefg$
0	0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0
1	0 0 0 1	0 1 1 0 0 0 0
2	0 0 1 0	1 1 0 1 1 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1 1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1 0 1 1
6	0 1 1 0	0 0 1 1 1 1 1
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 0 0 1 1
错码	1 0 1 0	×××××
	1 0 1 1	×××××
	1 1 0 0	×××××
	1 1 0 1	×××××
	1 1 1 0	×××××
	1 1 1 1	×××××

C) 真值表

图 1-12　七段数码管、显示字形及显示译码真值表

(1) 由图 1-12c 所示的真值表，考虑 K 图中各 1 值重复的次数，从而构成了携带重复信息的多输出函数 K 图，如图 1-13a 所示。

(2) 在各 K 图中先画含一半格子的聚合圈，这是因为与它们相应的乘积项为单变量，实现它们不需要与门，因此不存在公用与门的问题。在 7 个 K 图中可分别圈出 A（对输出 a），$\overline{B}$（对输出 b），B、$\overline{C}$、D（对输出 c），A（对输出 f），A（对输出 g）。此后便可把被圈用过的各格改记为“—”，表示可任意取值。显然，输出 c 已设计完毕。

(3) 改写各 K 图中的重复次数，例如输出 d、e 的 K 图中左下角方格内的数字由 7 改为 2，由此可以得到图 1-13b。

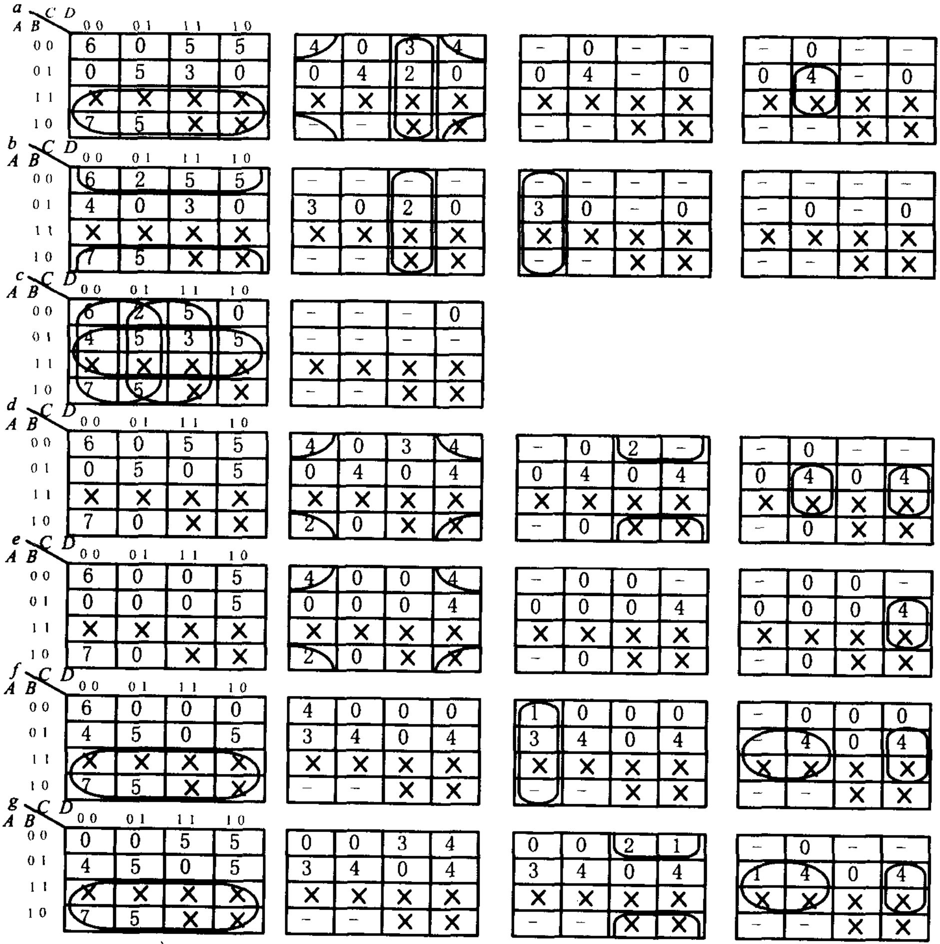


图 1-13　8421BCD 码—七段显示译码器的 K 图化简

(4) 在图 1-13b 中没有记 1 格，因此先对记 2 格处理。画圈时不仅要使圈尽可能大，而且要尽量可公用。为此，可选 CD 圈为输出 a、b 所公用及选 $\overline{B}\ \overline{D}$ 为输出 a、d、e 公用。

(5) 改写各 K 图得到图 1-13c。注意到图中 f、g 的 K 图内有记 1 格，按前述原则可对输出 b、f 选 $\overline{C}\ \overline{D}$ 圈，对输出 d、g 选 $\overline{B}\ C$ 圈。显然，对输出 b 已设计完毕。

(6) 改写各 K 图得到图 1-13d。注意到图中 g 的 K 图有记 1 格，按前述原则可对输出 f、g 选 $B\ \overline{C}$ 圈。对余下格子可对输出 a、d 选 $B\ \overline{C}\ D$，对输出 d、e、f、g 选 $B\ C\ \overline{D}$，至

此各 K 图中非零格全部被圈完。据此可写出各输出 $a \sim g$ 的最简与 / 或式：

$$
\begin{aligned}
a &= A + \overline{B}\ \overline{D} + C\ D + B\ \overline{C}\ D \\
b &= \overline{B} + C\ D + \overline{C}\ \overline{D} \\
c &= B + \overline{C} + D \\
d &= \overline{B}\ \overline{D} + \overline{B}\ C + B\ \overline{C}\ D + B\ C\ \overline{D} \\
e &= \overline{B}\ \overline{D} + B\ C\ \overline{D} \\
f &= A + \overline{C}\ \overline{D} + B\ \overline{C} + B\ C\ \overline{D} \\
g &= A + \overline{B}\ C + B\ \overline{C} + B\ C\ \overline{D}
\end{aligned}
$$

与上式相应的电路在不计输入反相器的条件下，用 6 个二输入门，4 个三输入门及 4 个四输入门，共需 $4\frac{5}{6}$ 块集成电路。如果按单独设计，在不计输入反相器的条件下需用 $5\frac{1}{4}$ 块集成电路。显然，由于在多输出 K 图化简中考虑了公用项，因此使整个组合电路的成本比单独设计更为节省。

1.3 K 图规模的压缩

逻辑函数的 K 图的规模随变量数的增加按 2 的幂次迅速增加，这使图形方法的适用范围受到了限制。一方面由于 K 图规模的扩大增加了绘图工作量，另一方面由于对称相邻的存在使得相邻格的辨别及合并化简发生困难。降维 K 图是最常用的压缩 K 图规模的一种方法。此外，在互斥变量的情况下存在的大量不可能发生的条件，从而使得 K 图规模显得浪费，因此有必要研究逻辑函数在互斥变量情况下的 K 图表示及化简方法。

1.3.1 降维 K 图及其应用

1. 降维 K 图[8, 9]

定义 1-6 设 $f(x_1 \sim x_n)$ 为 n 变量的逻辑函数，以 n 变量中的 $(n-l)$ 个变量作为变量的 K 图表示称为该逻辑函数的降 l 维 K 图，所压缩的 l 个变量称为收缩变量。

在实际应用中用得最多的是降一维 K 图，其次是降二维 K 图。下面分别介绍获得降维 K 图的两种方法。

(1) 由代数式对选定的 $(n-l)$ 个变量展开获得降维 K 图

例 1-9 设 $f(x_1 \sim x_5) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_5 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_2 x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_5 + \bar{x}_2\bar{x}_4 x_5$，试画出以 $x_1 \sim x_4$ 为变量的降维 K 图。

将 $f(x_1 \sim x_4)$ 对变量 $x_1 \sim x_4$ 进行展开得

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \sim x_5) = {} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + {} \\
& \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4\bar{x}_5 + x_1 x_2\bar{x}_3 x_4\bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + {} \\
& \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 x_5 + x_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 x_5 \\
= {} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 + {} \\
& \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 x_5 + x_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 x_5 + x_1 x_2\bar{x}_3 x_4\bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4\bar{x}_5
\end{aligned}
$$

将上述代数式填入以 $x_1 \sim x_4$ 为变量的四变量 K 图可以得到如图 1-14 所示的降维 K 图。上述方法可推广应用于降二维乃至降更多维的 K 图。

(2) 由原 K 图获得降维 K 图。如果收缩变量为 x_i，则将除 x_i 以外的各变量轴为分界线将原 K 图划分为 2^{n-1} 个子 K 图。将各子 K 图读得的结果作为填入量填入相应的 K 图便可得逻辑函数的降一维 K 图。

$f(x_1 \sim x_5)$ x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	x_5	x_5
01	1	1	1	x_5
11	0	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_5$	0
10	x_5	0	0	x_5

图 1-14　f 的降维 K 图

例 1-10　图 1-15a 为 $f(x_1 \sim x_4)$ 的 K 图，试画出它的各种降一维 K 图。

根据上述降一维 K 图的构成方法，以各相应的变量轴为分界线将原 K 图划分为 8 个子 K 图，然后将由各子 K 图读得的结果填入相应的 K 图可得到如图 1-15b～e 所示的各种降一维 K 图。

f x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	1	1
11	0	1	0	0
10	0	1	1	0

a)　f 的K图

f x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$

b)　收缩 x_1 的K图

f x_1 \ x_3x_4	00	01	11	10
0	x_2	$\bar{x}_2$	1	x_2
1	0	1	$\bar{x}_2$	0

c)　收缩 x_2 的K图

f x_1 \ x_2x_4	00	01	11	10
0	0	1	x_3	1
1	0	1	$\bar{x}_3$	0

d)　收缩 x_3 的K图

f x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	x_4	x_4	1	$\bar{x}_4$
1	x_4	x_4	0	x_4

e)　收缩 x_4 的K图

图 1-15　f 的 K 图和各种降一维 K 图

如果收缩 x_i、x_j 二个变量，则将除 x_i、x_j 以外的变量轴为分界线将原 K 图划分成 2^{n-2} 个子 K 图，然后将各子 K 图读得的结果填入相应的 K 图便可得到降二维 K 图。

例 1-11　试画出例 1-10 中函数 f 的各种降二维 K 图。

f 的 K 图如图 1-15a 所示。根据上述降二维 K 图的构成方法，以各相应的变量轴为分界线将原 K 图划分成 4 个子 K 图，然后将各子 K 图读得的结果填入相应的 K 图可得到如图 1-16 所示的各种降二维 K 图。

f x_3 \ x_4	0	1
0	$\bar{x}_1x_2$	$x_1+\bar{x}_2$
1	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1+\bar{x}_2$

a) 收缩 x_1x_2

f x_2 \ x_4	0	1
0	0	1
1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1x_3+x_1\bar{x}_3$

b) 收缩 x_1x_3

f x_2 \ x_3	0	1
0	x_4	x_4
1	$\bar{x}_1\bar{x}_4+x_1x_4$	$\bar{x}_1$

c) 收缩 x_1x_4

f x_1 \ x_4	0	1
0	x_2	$\bar{x}_2+x_3$
1	0	$\bar{x}_2+\bar{x}_3$

d) 收缩 x_2x_3

f x_1 \ x_3	0	1
0	$\bar{x}_2x_4+x_2\bar{x}_4$	x_2+x_4
1	x_4	$\bar{x}_2x_4$

e) 收缩 x_2x_4

f x_1 \ x_2	0	1
0	x_4	$x_3+\bar{x}_4$
1	x_4	$\bar{x}_3x_4$

f) 收缩 x_3x_4

图 1-16　f 的各种降二维 K 图