

高等數學大綱之三

積分學綱要

韋 希 若 著
孟 特 爾
勞 君 展 譯

商務印書館

高等數學大綱之三

積 分 學 綱 要

著 者 若 爾 展
希 待 君
韋 孟 勞

商 務 印 書 館

積分學綱要提要——這本書是法國名著“數學大綱”(原書名“Cours de Mathématiques Générales”, 著者 E. Vessiot 和 P. Montel, 1921 年由巴黎 Librairie de L'enseignement Technique 出版)中文譯本的第三冊。內容對「積分學」和「微分方程」平行講述。「一階微分方程」、「二階微分方程」插入於「不定積分」和「定積分」之間。這樣可以使它們交迭應用而供作實際問題的研究工具。在「多重積分」一章中擴充到「矢量解析學」與「全微分」, 進而研究到「重心」和「轉動慣量」的實際問題。末章講幾個特殊積分和「偏微分方程」以及它的應用, 始終貫徹平行講述的原則。

高等數學大綱之三
積 分 學 綱 要
勞 君 展 譯

★版權所有★

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

新華書店華東總分店 總經售

上海南京西路一號

商務印書館上海廠印刷

◆(50857C)

1953年6月初版 1954年2月再版

版面字數 255,000 印數 2,001—2,600

定價 ¥ 25,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

目 錄

第一章 不定積分

第一節 概論

301. 原函數之存在.....	1
302. 不定積分.....	2
303. 更換變數.....	3
304. 常用積分.....	5
305. 普通積分法.....	6

第二節 有理函數之積分法

306. 分解多項式爲實因子.....	11
307. 分解有理分數爲單原素.....	13
308. 有理分數之積分法.....	13

第三節 三角積分

309. $\int R(\cos x, \sin x)dx$ 形之積分.....	22
310. 特例.....	24
311. 整式.....	26

第四節 代數微分之積分

312. 微分中的 x 有分數指數.....	28
313. 二項式微分.....	30
314. 亞倍爾氏積分.....	31

第五節 可積分的超越微分

315. 分部積分法之應用.....	36
316. 更換變數法之應用.....	40

第一章的習題

第二章 一階微分方程

第一節 微分方程概論

317. 微分方程.....	43
318. 由消去常數法構成微分方程.....	47

第二節 一階微分方程概論

319. 積分曲線.....	49
320. 圖解積分法.....	52
321. 等斜法.....	54
322. 戴勞氏級數之應用.....	56

第三節 求積法的可積分性

323. 變數分離法.....	57
324. 線性方程.....	62
325. 齊次方程.....	69

第四節 正交曲線族

326. 正交軌線族.....	75
-----------------	----

第二章的習題

第三章 二階微分方程 微分方程組

第一節 二階微分方程式 下降情況

327. 概論.....	85
328. 下降情況.....	85

第二節 二階線性方程

329. 普通性質.....	90
330. 定理 I.....	98
331. 無右端常係數方程.....	95

332. 有右端常係數方程.....	105
333. 普通情況.....	108
334. 普通結論.....	109

第三節 微分方程組

335. 兩個一階微分方程組.....	112
336. n 個一階方程組.....	115
337. 第一積分.....	117
338. 任意階聯立方程.....	121

第三章的習題

第四章 定積分

第一節 定積分之定義及性質

339. 定積分概念的幾何來源.....	125
340. 定積分之定義.....	128
341. 定積分之性質.....	130
342. 中值公式.....	136
343. 定積分與不定積分之關係.....	140
344. 用分析法證明以上各結論.....	142
345. 第一應用.....	144
346. 定積分之例題.....	145

第二節 定積分之近似計算法

347. 辛佛生公式對於積分近似計算法.....	149
348. 彭斯雷公式.....	150
349. 圖解法.....	153

第三節 定積分之計算法

350. 普通方法.....	154
350. ^{bs} 積分的幾何解釋.....	158

351. 更換變數.....	163
352. 分部積分法.....	165

第四節 傅立葉級數

353. 三角級數及週期函數.....	166
354. 傅立葉級數.....	167
355. 例題.....	172
355. bis 有效值.....	175
356. 三角推值法.....	175

第五節 曲線積分

357. 功的概念.....	179
358. 曲線積分代功.....	181
358. bis 例題.....	183
359. 微分原素爲恰當全微分之情況.....	185
360. 任意曲線積分之微分原素的說明.....	187
361. 依閉圖線取積分.....	188

第六節 幾何的應用

362. 段面面積.....	190
363. 扇形面積.....	192
364. 應用於雙曲線函數.....	193
365. 閉曲線之面積.....	194
366. 計算弧長.....	196
367. 平行底間之體積.....	199
368. 應用初等幾何中的立體.....	201
369. 三水平面之公式.....	203
370. 旋轉體體積.....	203
371. 旋轉體之球帶的面積.....	205

第四章的習題

第五章 多重積分

第一節 二重積分

872. 二重積分概念的幾何來源	210
873. 用直角坐標計算二重積分	213
874. 用極坐標計算二重積分	219
875. 曲面之面積	221

第二節 三重積分

876. 定義	224
877. 用直角坐標計算三重積分	226

第三節 矢量解析學

878. 格林公式	232
879. 面積的積分	234
880. 發散性	237
881. 特例	237
882. 高斯公式	240
883. 斯托克公式	241
884. 斯托克公式之解釋	245

第四節 全微分

885. $A dx + B dy$ 或 $A dx + B dy + C dz$ 式, 全微分的條件	247
886. 所得條件之另形	248
887. 在 A, B, C 之導數中之條件的方程	249
888. 全微分之積分	251
889. 積分因子	252
890. 例題	254
891. 應用於熱力學	256

第五節 重心

392. 一組質點的重心	261
393. 連續物體的重心	262
394. 求均勻物體的重心公式之簡易法	264

第六節 轉動慣量

395. 一組質點的轉動慣量	266
396. 對於各軸的轉動慣量之比較	267
397. 連續固體的轉動慣量	270
398. 例題	272

第五章的習題

第六章 一參數函數之定積分 偏導數之方程

第一節 一參數函數之定積分

399. 連續性 微分法 積分法	281
400. 例題	283
401. 擴張於三重積分	284
402. 無窮極限之情況	286
403. 體曲線之面積、夫累涅爾積分	287
403. bis 直接研究夫累涅爾積分	292

第二節 偏導數方程

404. 偏導數方程	295
405. 一般線性偏導數方程	297
405. bis 積分法	299
406. 弦振動的方程	302
407. 用三角表示之解	307
408. 貝奴里的方法	310
409. 熱在同質環境中的傳達	310

第六章的習題

高等數學大綱之三

積分學綱要

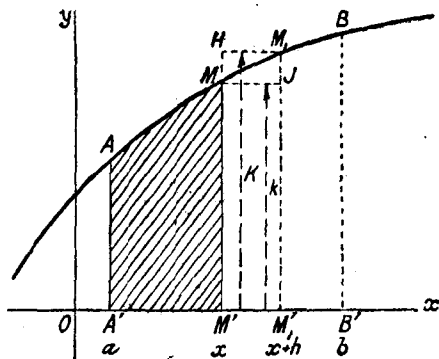
第一章 不定積分

第一節 概論

301. 原函數之存在 定理 設函數 $f(x)$ 在 (a, b) 區間內是連續的。另一函數 $F(x)$ 存在於此區間內，其導數為 $F'(x) = f(x)$ 。

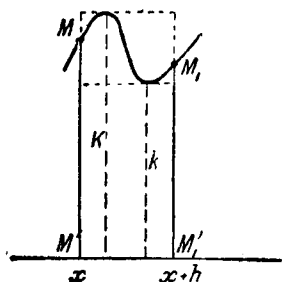
1° 先設 $f(x)$ 函數在 (a, b) 區間內是正的。再證明面積 $AA'M'M$ 是問題中的對應函數 $F(x)$ ，此面積包圍在 $y = f(x)$ 曲線， x 軸，以及平行於 Oy 的 $x = a$ 和以 x 為橫坐標的 MM' 縱標之內。 $x = a$ 線是固定的， MM' 是變動的。

證明，給 x 一增量 h 。 $F(x)$ 之增量用 h 的符號，因為 $F(x)$ 隨 x 而增加。此增量之絕對值是包含在以 $M'M'_1$ 為公底及以 $y = f(x)$ 在 $(x, x+h)$ 區間內之絕對大 K 與絕對小 k 為高的長方形兩者之間；又此兩面積是 $K|h|$ ， $k|h|$ 。



故

$\Delta F(x)$ 是在 Kh 及 kh 之間；



又,

$$\frac{\Delta F(x)}{h} \text{ 是在 } K \text{ 及 } k \text{ 之間。}$$

但依函數 $f(x)$ 之連續性, 當 h 趨近零時, K 及 k 趨近 $y=f(x)$, 故 M 之縱標仍是

$$\frac{\Delta F(x)}{h}, \text{ 即 } F(x) \text{ 有一導數 } f(x)。$$

(C. Q. F. D.)

2° 若 $f(x)$ 在此區間內不是正的, 指定 m 是 $f(x)$ 在 (a, b) 區間內小於絕對小之數。將常有:

$$f(x) > m \quad \text{故} \quad f(x) - m > 0。$$

設 $y(x) = f(x) - m$ 。依前面所述, 此函數有一原函數 $G(x)$, 故有

$$G'(x) = f(x) - m。$$

祇須令 $F(x) = G(x) + mx$, 而得

$$F'(x) = G'(x) + m = f(x)$$

這就證明了定理。

結論 若將前面的結果與第 127 號之結果對照, 確定: 凡連續函數 $f(x)$ 有無窮個原函數, 包含在普通公式: $F(x) = F_0(x) + C$ 內, $F_0(x)$ 是任意的一個原函數, 並且是一個任意常數, 叫做積分常數。

302. 不定積分 說 $F(x)$ 是 $f(x)$ 之原函數, 即

$$(1) \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx. \quad (2)$$

由第二式內已得的結果, 可以說: 凡 $f(x)dx$ 形之式, 為無窮個函數 $F(x)$ 之微分, $f(x)$ 是連續函數, 無窮個 $F(x)$ 函包含在普通公式 $F(x) = F_0(x) + C$ 之中, $F_0(x)$ 是其中一任意函數, 又 C 是一任意常數。

為說明恆等式(2)起見, 說 $F(x)$ 是微分 $f(x)dx$ 之一不定積分(或,

簡單的說，一個積分)並寫恆等式為同值式

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

上式的右端稱為 $f(x)dx$ 之和。

故研究不定積分之問題即為微分學之反演問題。

這問題無異於求原函數之問題，但用微分代導數是很緊要，因為這問題常常用變換變數而解決。微分記法供給變換變數一切的利便，我們將說明如下。

303. 更換變數 保留前面的符號並令 $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ 是新變數之一任意函數。設 $t = \psi(x)$ 為相應的反函數，故方程

$$(5) \quad x = \varphi(x), \quad t = \psi(x).$$

能視為同值^①方程。令 $F(\varphi(t)) = G(t)$ ，這是說明 $F(x)$ 及 $G(t)$ 在所設條件之下，在同值方程(5)內或此或彼，以 x 及 t 之值代入得同樣的數值。故同時有

$$(6) \quad F(\varphi(t)) = G(t), \quad G(\psi(x)) = F(x).$$

然而依微分基本性質(第 182 號)公式(2)寫為同值式之一式：

$$(7) \quad dF(x) = f(x)dx, \quad dG(t) = f(x)dx = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

若改這些方程為積分式，我們確定

$$(8) \quad F(x) = \int f(x)dx, \quad G(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

兩公式是同值的，祇須 F 及 G 由恆等式(6)之一式聯絡。

由是確定計算 $F(x)$ ，能求 $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ 之積分所有的 $G(x) = G_0(t) + c$ 函數，及推論各 $F(x)$ 函數，依照公式(6)之第二式，在各函數內以 $\psi(x)$ 代 t 。

^①通常， $t = \psi(x)$ 是由隱函數之一支； $x = \varphi(t)$ 確定及同值式使 t 只在適當確定的區間內變化。這就是在第 VII 章內所看見的反函數。

由是得以下規律：

規律 計算 $\int f(x)dx$ 能更換變數 $x=\varphi(t)$ ，在微分 $f(x)dx$ 式中以 t 之函數代 x ，於是微分變為 t 之函數。計算 $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ ；在結果中用更換變數的公式 $t=\psi(x)$ 代入仍回到 x 變數。

注意 已知此規律之證明，則開始計算時，必先命定更換變數之兩個相反的公式 $x=\varphi(t)$ ， $t=\psi(x)$ 。若兩式不是精確的相等，兩式將彼此補足，如在下面的例題中所遇見的 t 之一值只與 x 之一值相應及反演；此即前理論所述之有效條件。

[例] 設計算 $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

令 $x = \tan t$, $t = \arctan x$, 故 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 。

積分之微分變為

$$\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dt}{\cos^2 t} (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}.$$

因為 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos t$ 是正的，又能用 $\cos^2 t$ 代 $(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$ 。

故
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos t dt.$$

右端之積分法是直接的，因 $\cos t dt = d \sin t$ 故積分：

$$\sin t + c.$$

剩餘即以 x 之函數代 t 。因有 $x = \tan t$ 及 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\sin t$ 是依 $\tan t$ 之符號

$$\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

故一定有,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

304. 常用積分 依公式(2)及(3)之同值直接由第 180 號之常用微分產生以下的常用積分表。審查每個公式的常數,在符號 $\int$ 之下的式子確是右端之微分。已將全部代數微分之積分集合如下。

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c \quad (n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log |x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \cosh x + c \quad \left| \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c \right.$$

注意 在公式中之對數 $\log|u| + c$ 能寫成 $\log \frac{u}{\alpha}$ 以代替, α 是一個

與 u 同符號的任意常數, 因此又令

$$c = -\log|\alpha|, \text{ 或 } |\alpha| = e^{-c}. \text{ 即 } \log \frac{u}{\alpha} = \log|u| - \log|\alpha|.$$

305. 普通積分法 I. 我們已經指示更換變數的方法, 此法能擴充前面各公式之應用條件。

II. 常常用到下面的注意。

公式

$$\int c du = c \int du,$$

兩端之微分相等, 證明在積分法運算中能將常數因子放在符號 $\int$ 之外, 或使常數因子進入此符號內。

$$[\text{例}] 1. \quad \int Ax^n dx = A \int x^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{1}{a^2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{x}{a} + c.$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{a^2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1} \right| + c = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$$

III. 公式① $d(u+v+w)=du+dv+dw$ 求其兩端之積分即應用公式(2)及(3)之同值式得,

$$u+v+w=\int(du+dv+dw),$$

即
$$\int(du+dv+dw)=\int du+\int dv+\int dw;$$

因為除積分常數外,

$$(9) \quad u=\int du, \quad v=\int dv, \quad w=\int dw;$$

在(9)之右端不必留這些積分常數,因為兩端除一個任意常數外,是確定的。

這公式又說明求微分和之積分,能一項一項的積分。

可將此式寫為較顯明的式子

$$(10) \quad \int [f(x)+g(x)+h(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx+\int h(x)dx;$$

因為有不定積分存在,常能令:

$$f(x)dx=du, \quad g(x)dx=dv, \quad h(x)dx=dw.$$

以上是最有用的積分法中的一種積分法原理。將微分分解為單原素,再分別的求這些單原素的積分。

〔例〕 1. 多項式之積分。

一項一項的積分:用此法求 n 次任意多項式之積分,

$$\begin{aligned} & \int (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_px^{n-p} + \cdots + A_{n-1}x + A_n)dx \\ &= A_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + A_1 \frac{x^n}{n} + \cdots + A_p \frac{x^{n-p+1}}{n-p+1} + \cdots + A_{n-1} \frac{x^2}{2} + A_n x + c. \end{aligned}$$

$$2. \quad \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x \cdot d(2x)$$

①譬如我們用於三項之和,亦可應用於任意多項式。

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$= \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c.$$

$$3. \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 2x \cdot d(2x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c.$$

IV. 求公式 $d(uv) = u \, dv + v \, du$ 兩端之積分得

$$uv = \int u \, dv + \int v \, du$$

由是

$$(11) \quad \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

此公式建立分部積分法之原理；它從 $\int u \, dv$ 的積分法引到 $\int v \, du$ 的積分法。

在每一個特別情況中，應該選擇 u 及 dv ，並且先得 v 使 $u \, dv$ 為已知之微分，又使 $\int v \, du$ 能計算。

〔例〕設計算 $\int \log x \, dx$ 。令：

$$u = \log x, \quad dv = dx; \quad \text{故} \quad v = x;$$

又依(11)變為

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot d \log x = x \log x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \log x - \int dx$$

故

$$(12) \quad \int \log x \, dx = x \log x - x + c.$$

V. 在某種情況時，分部積分法之公式(11)，不引到已知積分 $\int v \, du$ ，而給與一種關係，由此關係提出待計算之積分。