高等數學大綱之三

積分學綱要

韋希若
孟特爾 著
勞君展 譯

商務印書館

高等數學大綱之三

積　分　學　綱　要

韋希若
孟特爾　著
勞君展　譯

商務印書館

積分學綱要提要——這本書是法國名著"數學大綱"(原書名"Cours de Mathématiques Générales",著者 E. Vessiot 和 P. Montel, 1921年由巴黎 Librairie de L'enseignement Technique 出版)中文譯本的第三册。內容對「積分學」和「微分方程」平行講述。「一階微分方程」、「二階微分方程」插入於「不定積分」和「定積分」之間。這樣可以使它們交迭應用而供作實際問題的研究工具。在「多重積分」一章中擴[illegible]到「矢量解析學」與「全微分」,進而研究到「重心」和「轉動慣量」的實際問題。末章講幾個特殊積分和「偏微分方程」以及它的應用,始終貫徹平行講述的原則。

高等數學大綱之三

積　分　學　綱　要

勞　君　展　譯

商　務　印　書　館　出　版
上海河南中路二一一號
新華書店華東總分店　總經售
上海南京西路一號
商務印書館上海廠　印　刷
㊎(50857C)

1953年6月初版　1954年2月再版
版面字數255,000　印數2,001—2,600
定價¥25,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

目　錄

第一章　不定積分

第一節　概論

第二節　有理函數之積分法

第三節　三角積分

第四節　代數微分之積分

第五節　可積分的超越微分

第三節　徵分方程組

第四章　定積分

第一節　定積分之定義及性質

第二節　定積分之近似計算法

第三節　定積分之計算法

第四節　傅立葉級數

第五節　曲線積分

第六節　幾何的應用

第五章　多重積分

第一節　二重積分

第二節　三重積分

第三節　矢量解析學

第四節　全微分

第五節 重心

第六節 轉動慣量

第六章 一參數函數之定積分 偏導數之方程

第一節 一參數函數之定積分

第二節 偏導數方程

高等數學大綱之三

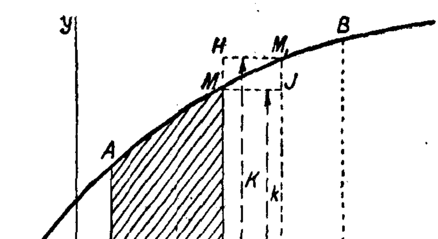
積 分 學 綱 要

第一章 不定積分

第一節 概論

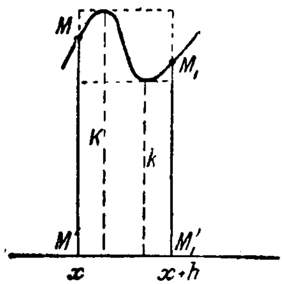
301. 原函數之存在 定理 設函數 $f(x)$ 在 (a,b) 區間內是連續的。另一函數 $F(x)$ 存在於此區間內，其導數爲 $F'(x)=f(x)$。

$1°$ 先設 $f(x)$ 函數在 (a,b) 區間內是正的。再證明面積 $AA'M'M$ 是問題中的對應函數 $F(x)$，此面積包圍在 $y=f(x)$ 曲線，x 軸，以及平行於 Oy 的 $x=a$ 和以 x 爲橫坐標的 MM' 縱標之內。 $x=a$ 線是固定的，MM' 是變動的。



證明，給 x 一增量 h。$F(x)$ 之增量用 h 的符號，因爲 $F(x)$ 隨 x 而增加。此增量之絕對值是包含在以 $M'M'_1$ 爲公底及以 $y=f(x)$ 在 $(x,x+h)$ 區間內之絕對大 K 與絕對小 k 爲高的長方形兩者之間；又此兩面積是 $K|h|$，$k|h|$。

故 $\Delta F(x)$ 是在 Kh 及 kh 之間；



又，

$$\frac{\Delta F(x)}{h}\text{是在 }K\text{ 及 }k\text{ 之間。}$$

但依函數 $f(x)$ 之連續性，當 h 趨近零時，K 及 k 趨近 $y=f(x)$，故 M 之縱標仍是 $\frac{\Delta F(x)}{h}$，即 $F(x)$ 有一導數 $f(x)$。

(C. Q. F. D.)

2° 若 $f(x)$ 在此區間內不是正的，指定 m 是 $f(x)$ 在 (a,b) 區間內小於絕對小之數。將常有：

$$f(x)>m \quad 故 \quad f(x)-m>0。$$

設 $y(x)=f(x)-m$。依前面所述，此函數有一原函數 $G(x)$，故有

$$G'(x)=f(x)-m。$$

祇須令 $F(x)=G(x)+mx$，而得

$$F'(x)=G'(x)+m=f(x)$$

這就證明了定理。

結論　若將前面的結果與第 127 號之結果對照，確定：凡連續函數 $f(x)$ 有無窮個原函數，包含在普通公式：$F(x)=F_0(x)+C$ 內，$F_0(x)$ 是任意的一個原函數，並且是一個任意常數，叫做積分常數。

302. 不定積分　設 $F(x)$ 是 $f(x)$ 之原函數，即

$$(1)\qquad \frac{dF(x)}{dx}=f(x)\text{，或 }dF(x)=f(x)dx。\qquad(2)$$

由第二式內已得的結果，可以說：凡 $f(x)dx$ 形之式，爲無窮個函數 $F(x)$ 之微分，$f(x)$ 是連續函數，無窮個 $F(x)$ 函包含在普通公式 $F(x)=F_0(x)+C$ 之中，$F_0(x)$是其中一任意函數，又 C 是一任意常數。

爲說明恆等式(2)起見，說 $F(x)$是微分 $f(x)dx$ 之一不定積分（或，

簡單的說，一個積分）並寫恆等式爲同值式

$$F(x)=\int f(x)dx,$$

上式的右端稱爲 $f(x)dx$ 之和。

故研究不定積分之問題即爲微分學之反演問題。

這問題無異於求原函數之問題，但用微分代導數是很緊要，因爲這問題常常用變換變數而解決。微分記法供給變換變數一切的利便，我們將說明如下。

303. 更換變數　保留前面的符號並令 $x=\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 是新變數之一任意函數。設 $t=\psi(x)$ 爲相應的反函數，故方程

(5)　$$x=\varphi(x),\quad t=\psi(x)。$$

能視爲同值❶方程。令 $F(\varphi(t))=G(t)$，這是說明 $F(x)$ 及 $G(t)$ 在所設條件之下，在同值方程(5)內或此或彼，以 x 及 t 之值代入得同樣的數值。故同時有

(6)　$$F(\varphi(t))=G(t),\quad G(\psi(x))=F(x)。$$

然而依微分基本性質（第 182 號）公式(2)寫爲同值式中之一式：

(7)　$$dF(x)=f(x)dx,\quad dG(t)=f(x)dx=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

若改這些方程爲積分式，我們確定

(8)　$$F(x)=\int f(x)dx,\quad G(t)=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

兩公式是同值的，祇須 F 及 G 由恆等式(6)之一式聯絡。

由是確定計算 $F(x)$，能求 $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ 之積分所有的 $G(x)=G_0(t)+c$ 函數，及推論各 $F(x)$ 函數，依照公式(6)之第二式，在各函數內以 $\psi(x)$ 代 t。

---

❶通常，$t=\psi(x)$ 是由隱函數之一支；$x=\varphi(t)$ 確定及同值式使 t 只在適當確定的區間內變化。這就是在第 VII 章內所看見的反圓函數。

由是得以下規律:

規律 計算$\int f(x)dx$能更換變數$x=\varphi(t)$,在微分$f(x)dx$式中以t之函數代x,於是微分變為t之函數。計算$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$; 在結果中用更換變數的公式$t=\psi(x)$代入仍回到$x$變數。

注意 已知此規律之證明,則開始計算時,必先命定更換變數之兩個相反的公式$x=\varphi(t)$, $t=\psi(x)$。若兩式不是精確的相等,兩式將彼此補足,如在下面的例題中所遇見的t之一值只與x之一值相應及反演;此卽前理論所述之有效條件。

〔例〕 設計算$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

令 $$x=\tan t,\quad t=\text{arc}\tan x,\quad 故\quad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}。$$

積分之微分變為

$$\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dt}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dt}{\cos^2 t}(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}。$$

因為$-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, $\cos t$是正的,又能用$\cos^3 t$代$(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$。

故 $$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\cos t\,dt。$$

右端之積分法是直接的,因$\cos t\,dt=d\sin t$故積分:

$$\sin t+c。$$

剩餘卽以x之函數代t。因有$x=\tan t$ 及 $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, $\sin t$是依$\tan t$之符號

$$\sin t=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}。$$

故一定有，

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c.$$

304. 常用積分　依公式(2)及(3)之同值直接由第 180 號之常用微分產生以下的常用積分表。審查每個公式的常數，在符號$\int$之下的式子確是右端之微分。已將全部代數微分之積分集合如下。

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+c}+c\ (n\neq 1)$$

$$\int\frac{dx}{x^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+c\ (n\neq 1)$$

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|+c$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\text{arc tan}\ x+c$$

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\text{arc tanh}\ x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sin}\ x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

$$\int e^x dx=e^x+c$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+c$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+c$$

$$\int\cosh dx=\sinh x+c$$

$$\int\sinh dx=\cosh x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\text{arc sinh}\ x+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{arc}\cosh x+c \qquad \int\frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+c$$

注意　在公式中之對數 $\log|u|+c$ 能寫成 $\log\frac{u}{a}$ 以代替，a 是一個與 u 同符號的任意常數，因此又令

$$c=-\log|a|,\quad 或\quad |a|=e^{-c}。\quad 即\quad \log\frac{u}{a}=\log|u|-\log|a|。$$

305. 普通積分法　I. 我們已經指示更換變數的方法，此法能擴充前面各公式之應用條件。

II. 常常用到下面的注意。

公式

$$\int c\,du=c\int du,$$

兩端之微分相等，證明在積分法運算中能將常數因子放在符號 $\int$ 之外，或使常數因子進入此符號內。

〔例〕1. $$\int Ax^n dx=A\int x^n dx=A\,\frac{x^{n+1}}{n+1}+c。$$

2. $$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{1}{a^2}\,\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\tan\frac{x}{a}+c。$$

3. $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{a^2}\cdot\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right|+c=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c。$$

III.　公式❶ $d(u+v+w)=du+dv+dw$ 求其兩端之積分卽應用公式(2)及(3)之同值式得,

$$u+v+w=\int(du+dv+dw),$$

卽

$$\int(du+dv+dw)=\int du+\int dv+\int dw;$$

因爲除積分常數外,

(9)
$$u=\int du,\quad v=\int dv,\quad w=\int dw;$$

在(9)之右端不必留這些積分常數,因爲兩端除一個任意常數外,是確定的。

這公式又說明求微分和之積分,能一項一項的積分。

可將此式寫爲較顯明的式子

(10)
$$\int[f(x)+g(x)+h(x)]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx+\int h(x)\,dx;$$

因爲有不定積分存在,常能令:

$$f(x)dx=du,\quad g(x)dx=dv,\quad h(x)dx=dw.$$

以上是最有用的積分法中的一種積分法原理。將微分分解爲單原素,再分別的求這些單原素的積分。

〔例〕 1. 多項式之積分。

一項一項的積分:用此法求 n 次任意多項式之積分,

$$\int(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_px^{n-p}+\cdots+A_{n-1}x+A_n)dx$$

$$=A_0\frac{x^{n+1}}{n+1}+A_1\frac{x^n}{n}+\cdots+A_p\frac{x^{n-p+1}}{n-p+1}+\cdots+A_{n-1}\frac{x^2}{n}+A_nx+c_{o}$$

2.
$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x\cdot d(2x)$$

❶譬如我們用於三項之和,亦可應用於任意多項式。

$$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

$$=\frac{x+\sin x\cos x}{2}+c。$$

3. $\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{4}\int\cos 2x\cdot d(2x)$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+c。$$

IV. 求公式 $d(uv)=udv+vdu$ 兩端之積分得

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du$$

由是

(11) $$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

此公式建立分部積分法之原理；它從 $\int u\,dv$ 的積分法引到 $\int v\,du$ 的積分法。

在每一個特別情況中，應該選擇 u 及 dv，並且先得 v 使 $u\,dv$ 爲已知之微分，又使 $\int v\,du$ 能計算。

〔例〕 設計算 $\int\log x\,dx$。令：

$$u=\log x,\quad dv=dx;\quad 故\quad v=x;$$

又依(11)變爲

$$\int\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot d\log x=x\log x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\log x-\int dx$$

故

(12) $$\int\log x\,dx=x\log x-x+c。$$

V. 在某種情況時，分部積分法之公式 (11)，不引到已知積分 $\int v\,du$，而給與一種關係，由此關係提出待計算之積分。