大專生自修應考
研究所入學考試
學士後四年制醫科入學考試
大學插班、轉學考試
二年制技術學院入學考試

微積分突破

莊以滋 葉 田 主編
北、中、南各大學教授提供資料

本科教授執筆
最新命題趨勢
最全內容資料
歷屆試題分析
有效題型分類

專上圖書有限公司印行

大專生自修應考
研究所入學考試
學士後四年制醫科入學考試
大學插班、轉學考試
二年制技術學院入學考試

微積分突破

莊以蒞　葉　田　主編
北、中、南各大學教授提供資料

本科教授執筆
最新命題趨勢
最全內容資料
歷屆試題分析
有效題型分類

專上圖書有限公司印行

微積分突破

行政院新聞局局版台業字第3413號

主　編　者：莊以滋　　葉　田

出　版　者：專上圖書有限公司出版部

地址：台北市漢口街一段八號三樓

電話：3148982　　3810575

發　行　者：趙月星

印　刷　者：冠嘉印刷企業有限公司

地址：板橋市中山路二段465巷74弄12號之1

電話：9610827

郵政劃撥：0571342－1

趙月星帳戶

定價：380元

中華民國七十二年四月初版

中華民國七十八年元月最新增訂版

銘　謝

各校從事微積分講授工作的老師們，提供了試題資料及懇切指點，對本書大功不可沒，惟恐遭受校方物議，不能一一指名致意，謹在此作衷心的感謝。

又據聞本書第一版發售以來，全省各地辦理研究所、學士後醫學系、插大轉學、二技等入學輔導之各大補習班與大專微積分老師們，均採用本書資料作爲授課講義尤感榮幸之至。

四年來，因研習本書得以順利完成心願約計萬餘位讀者，並紛紛致函鼓勵使之再改版，以求精益求精發揮最高效果，以答謝愛護之情。

編者告訴讀者

(一)本書的目的

在幫助讀者在考前作整體連貫性，題型式之綜合總複習，使得讀者在最短的時間內，將微積分試題最新趨勢之題型作全部解題技巧的熟練和關鍵點作有效的突破，以便順利應付各種考試的挑戰。

(二)本書的學習方式

重點總整理（前後呼應，以達整合效果）

⇒各種試題型之解析，解法突破）

⇒類似試題之追踪研習（加强觀念與解法）

⇒實力模擬試題之研討（再加强整合戰技）

(三)微積分突破的要訣

觀念要清晰＋問題要認清＋計算要熟練＋解題要完整＋時間要把握⇒金榜必題名（研究所、學士後醫學系、大學插班或轉學、二年制技術學院、校內考試等各類考試，必得高分）。

(四)參考書目

（愼重推薦國內大學多家採用之中外教本對您的基礎練習非常有幫助的書）

①微積分（附問題研討）莊晉、周杰之、何丁舜合著（民國 75 年專上版）

②微積分：楊維哲著（三民版）（台大）

③*JK6*.CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY（有很多種譯本）

④PURCELL. CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY（東華譯本）

⑤EARL.W SWOKOWSKI. CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY.（東華譯本）

⑥MIZRAHI AND SULLIVAN. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY。

⑦SALAS HILLE. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY

⑧HOWARD ANTON. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY

⑨THOMAS FINNEY. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETR

⑩DONAID H. TRIM. CALCULUS

(五)本書的編著群

皆具有本科系高學位（博士或碩士），並擔任微積分、工程數學等數學教學輔導十年以上經驗，現職北、中、南各校微積分專任教師。（皆具合格證書之教授或副教授）

爲給讀者充分複習的時間趕在考季前出版，雖再三審愼校閱，疏漏之處在所難免，敬請讀者見諒。

編者　謹識

於民國76年3月29日增訂

微積分突破

目　　錄

第貳篇　微分

第陸篇　向量分析

第壹篇　極　限

本篇内容

第一章　函數極限之連續性與可微性

重點整理

§1－1－1　極限定義

函數 $f(x)$ 當 x 趨近 a 時之極限爲 L 記爲 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 意即對每一正數 ε，均有一正數 δ 存在，使得當 $0<|x-a|<\delta$ 時，$|f(x)-L|<\varepsilon$ 恒成立。

若存在一數 L 使 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 則謂 $f(x)$ 當 x 趨近 a 時之極限存在或 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在。

§1－1－2　極限基本定理

極限基本定理

(1) a，c，$\in R$ 則 $\lim_{x\to a} c=c$。

(2) a，b，$m\in R$ 則 $\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$。

(3) 若 $\lim_{x\to a} f_1(x)=L_1$，$\lim_{x\to a} f_2(x)=L_2$，……… $\lim_{x\to a} f_n(x)=L_n$

則① $\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)]=L_1+L_2+\cdots\cdots+L_n$。

② $\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdots f_n(x)=L_1\cdot L_2\cdot\cdots\cdots L_n$。

(4)若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 與 $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$

則 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

(5)若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 而 k 爲一常數則 $\lim_{x \to a} k\, f(x) = k\, L$.

(6)若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 則 $\lim_{x \to a} f^n(x) = L^n$ (n 爲正整數).

(7)若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 則 $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$. $L > 0$ 當 n 爲偶數時

(8) f 爲多項式函數則 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $a \in R$。

(9)設 $f(x)$, $g(x)$ 爲二多項式 a 爲常數且 $g(a) \neq 0$ ，則 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$

(10)若 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 而 $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$，則 $\lim_{x \to a} h(x) = L$

（三明治定理或稱挾擠定理）

§1－1－3 單邊極限與無窮極限

(一)單邊極限

設 f 爲一函數，L 爲一實數，若對任意給定一正數 ε ，都能找出 $\delta > 0$ 使得當 $a < x < a + \delta$ 時

$$| f(x) - L | < \varepsilon$$

則稱 x 自 a 之右方趨近於 a ，$f(x)$ 的右極限爲 L，並記爲

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

同理也可定義左極限，並以（ $a - \delta < x < a$ ）

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ 表之。

(二)極限之惟一性

當 $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

則 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 爲眞

此定理用以求證函數極限之存在性

㈢最大整數函數（［　］爲高斯符號）

若 $n \leq x < n+1$　則 $[\,x\,] = n$，n 爲整數。

如 $[\,8.3\,] = 8$，$[\,5\,] = 5$，$[\,\pi\,] = 3$，$[\,\sqrt{2}\,] = 1$，

$[\,-\frac{4}{3}\,] = -2.$

㈣無窮極限

(1)若函數 f 的定義域 D 無上界，且若對於每一 $\varepsilon > 0$，存在有一數 M，使當 $x \in D$，且 $x > M$ 時

$$|\,f(x) - L\,| < \varepsilon$$

成立。則稱爲 x 趨近於無限大時，f 的極限爲 L，記作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

(2)若函數 f 的定義域 D 無下界，且對於每一個 $\varepsilon > 0$，存在有一數 M，使當 $x \in D$，且 $x < M$ 時

$$|\,f(x) - L\,| < \varepsilon$$

成立，則稱當 x 趨近於負無限大時，$f(x)$ 的極限 L，記作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

(3)若對於每一正數 M，對應有一 $\delta > 0$，使（a，$a+\delta$）在函數 f 之定義域內，且當 $x \in$（a，$a+\delta$）時，有 $f(x) > M$，則稱 x 從右邊趨近於 a，f 爲無限大的遞增記爲

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

因∞並非一實數，故在 $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ 中，並不只有右極限，其它如：

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$