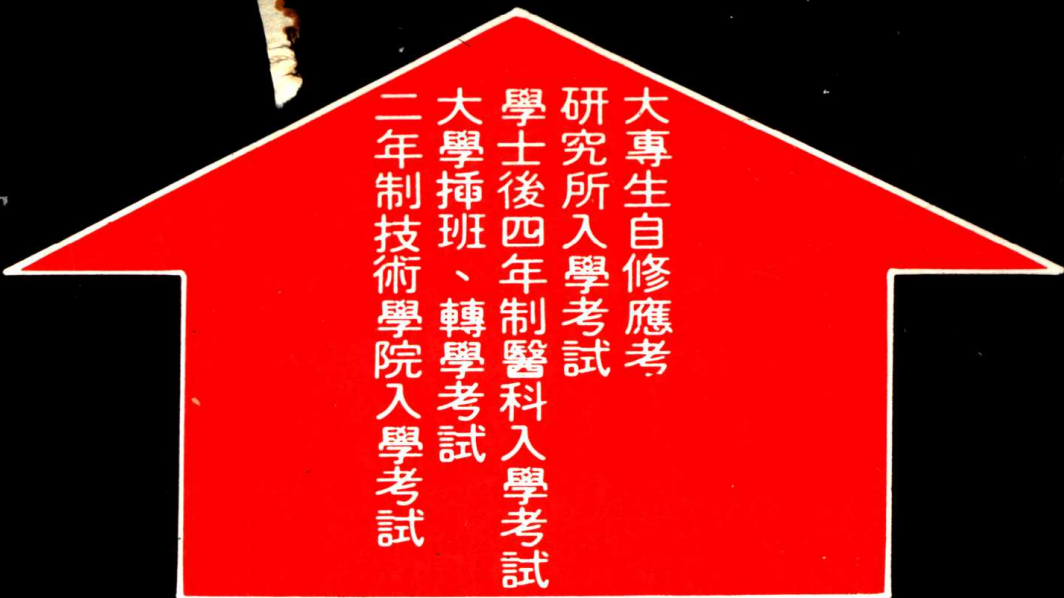




大專生自修應考
研究所入學考試
學士後四年制醫科入學考試
大學插班、轉學考試
二年制技術學院入學考試

微積分突破

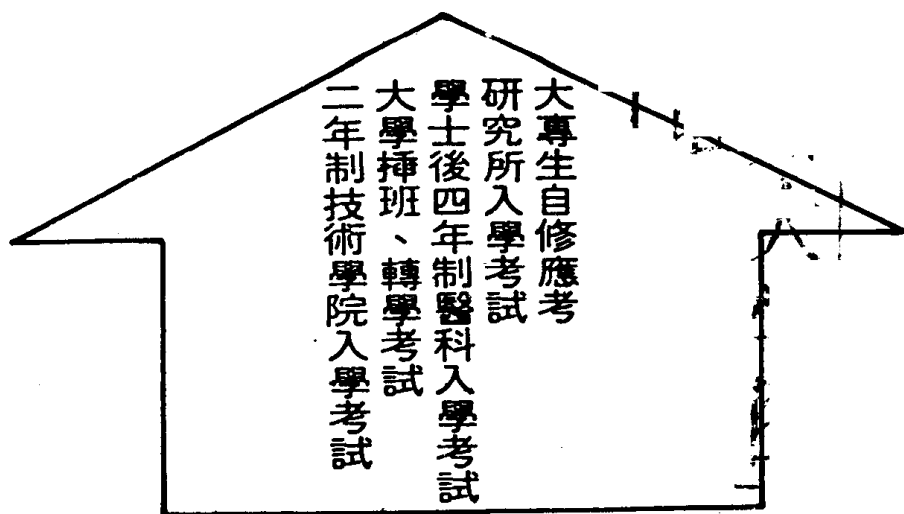
莊以蒞 葉 田 主編

北、中、南各大學教授提供資料



本科教授執筆
最新命題趨勢
最全內容資料
歷屆試題分析
有效題型分類

專上圖書有限公司印行

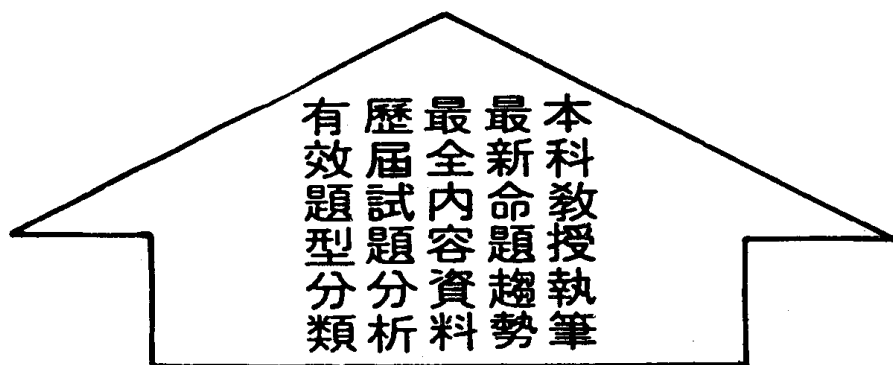


大專生自修應考
研究所入學考試
學士後四年制醫科入學考試
大學插班、轉學考試
二年制技術學院入學考試

微積分突破

莊以蒞 葉 田 主編

北、中、南各大學教授提供資料

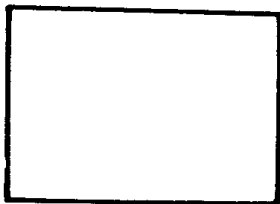


本科教授執筆
最新命題趨勢
最全內容資料
歷屆試題分析
有效題型分類

專上圖書有限公司印行

微積分突破

版權所有



翻印必究

行政院新聞局局版台業字第 3413 號

主 編 者：莊以蒞 葉 田

出 版 者：專上圖書有限公司出版部

地址：台北市漢口街一段八號三樓

電話：3148982 3810575

發 行 者：趙月星

印 刷 者：冠嘉印刷企業有限公司

地址：板橋市中山路二段 465 巷 74 弄 12 號之 1

電話：9610827

郵政劃撥：0571342-1

趙月星帳戶

定價：380 元



中華民國七十二年四月

中華民國七十八年元月最新增訂版

銘 謝

各校從事微積分講授工作的老師們，提供了試題資料及懇切指點，對本書大功不可沒，惟恐遭受校方物議，不能一一指名致意，謹在此作衷心的感謝。

又據聞本書第一版發售以來，全省各地辦理研究所、學士後醫學系、插大轉學、二技等入學輔導之各大補習班與大專微積分老師們，均採用本書資料作為授課講義尤感榮幸之至。

四年來，因研習本書得以順利完成心願約計萬餘位讀者，並紛紛致函鼓勵使之再改版，以求精益求精發揮最高效果，以答謝愛護之情。

編者告訴讀者

(一)本書的目的

在幫助讀者在考前作整體連貫性，題型式之綜合總複習，使得讀者在最短的時間內，將微積分試題最新趨勢之題型作全部解題技巧的熟練和關鍵點作有效的突破，以便順利應付各種考試的挑戰。

(二)本書的學習方式

- 重點總整理（前後呼應，以達整合效果）
- ⇒各種試題型之解析，解法突破）
- ⇒類似試題之追蹤研習（加強觀念與解法）
- ⇒實力模擬試題之研討（再加強整合戰技）

(三)微積分突破的要訣

觀念要清晰＋問題要認清＋計算要熟練＋解題要完整＋時間要把握⇒金榜必題名（研究所、學士後醫學系、大學插班或轉學、二年制技術學院、校內考試等各類考試，必得高分）。

(四)參考書目

（慎重推薦國內大學多家採用之中外教本對您的基礎練習非常有幫助的書）

- ①微積分（附問題研討）莊晉、周杰之、何丁舜合著（民國 75 年專上版）

- ②微積分：楊維哲著（三民版）（台大）
- ③JK6. CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY（有很多種譯本）
- ④PURCELL. CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY（東華譯本）
- ⑤EARL. W SWOKOWSKI. CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY.（東華譯本）
- ⑥MIZRAHI AND SULLIVAN. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY。
- ⑦SALAS HILLE. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY
- ⑧HOWARD ANTON. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY
- ⑨THOMAS FINNEY. CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETR
- ⑩DONAID H. TRIM. CÁLCULUS

(五)本書的編著群

皆具有本科系高學位（博士或碩士），並擔任微積分、工程數學等數學教學輔導十年以上經驗，現職北、中、南各校微積分專任教師。（皆具合格證書之教授或副教授）

爲給讀者充分複習的時間趕在考季前出版，雖再三審慎校閱，疏漏之處在所難免，敬請讀者見諒。

編者 謹識

於民國76年3月29日增訂

微積分突破

目 錄

第壹篇 極限

第一章 函數極限之連續性與可微性	1
1-1-1 極限定義	1
1-1-2 極限基本定理	1
1-1-3 單邊極限與無窮極限	2
1-1-4 函數的連續	4
1-1-5 函數的導函數(函數的可微性)	5
1-1-6 多變數函數極限與連續	5
1-1-7 多變數函數之導函數(偏導函數)定義	7
各校歷屆試題研討	8
類似試題	21
第二章 各種函數極限類型求極限值法	31
1-2-1 一般函數(代數,或三角函數)求極限值法	31
1-2-2 一般函數或超越函數,求極限值法	32
1-2-3 多變數函數求極限值	32
各校歷屆試題研討	34
類似試題	61

第三章 數列之極限	85
1-3-1 數列定義	85
1-3-2 數列極限定理	86
各校歷屆試題研討	88
類似試題	94

第貳篇 微分

第一章 單變數函數之微分	102
2-1-1 函數的導函數(函數的可微性)	102
2-1-2 基本導函數公式	103
2-1-3 鏈鎖律(合成函數之導函數)	104
2-1-4 超越函數之導函數	104
2-1-5 隱函數微分法	107
2-1-6 參數式微分法	107
2-1-7 反函數之導函數	107
2-1-8 對數微分法	107
2-1-9 高階導函數	108
2-1-10 函數之微分	108
各校歷屆試題研討	109
類似試題	119
第二章 多變數函數之微分	135
2-2-1 多變數函數定義	135
2-2-2 偏導數計算	135
2-2-3 鏈鎖律	137
2-2-4 全微分	138

2-2-5 隱函數之偏導數	138
各校歷屆試題研討	139
類似試題	149
第三章 微分之應用	160
2-3-1 函數的極值及圖形的描繪	160
2-3-2 切線、法線與兩曲線間之交角	164
2-3-3 質點運動（速度和加速度）	165
2-3-4 相關變率	166
2-3-5 極值的應用	166
2-3-6 微分的應用	167
2-3-7 偏導函數應用	167
各校歷屆試題研討	170
類似試題	195

第參篇 積分

第一章 單變數函數積分	228
3-1-1 定積分定義	228
3-1-2 積分的定理（微積分基本定理）	231
3-1-3 積分的性質	231
3-1-4 基本積分形式	233
3-1-5 變數變換積分法	235
3-1-6 分部積分法	235
3-1-6' 三角函數積分法	235
3-1-8 三角代換積分法	237
3-1-9 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理式代入積分法	237

3-1-10	配方積分法	238
3-1-11	部份分式積分法	238
3-1-12	廣義積分(瑕積分)法	238
3-1-13	Gamma 函數與 Beta 函數	239
各校歷屆試題研討		241
類似試題		272
第二章 多變數函數積分		304
3-2-1	二重積分	304
3-2-2	三重積分	306
3-2-3	線積分	310
各校歷屆試題研討		312
類似試題		329
第三章 積分應用		347
3-3-1	不定積分的應用	347
3-3-2	連續函數的平均值	348
3-3-3	面積	348
3-3-4	體積	349
3-3-5	弧長	352
3-3-6	旋轉體的曲面積	353
3-3-7	重心(形心)	354
3-3-8	功	356
3-3-9	液體壓力	357
3-3-10	轉動慣量	358
3-3-11	重積分的應用	360
3-3-12	重積分在物理上的應用	363

3-3-13 積分近似值	366
各校歷屆試題研討	368
類似試題	407

第肆篇 級數

第一章 數列與級數	435
4-1-1 數列	435
4-1-2 有限級數	437
4-1-3 無窮級數	439
4-1-4 無窮級數之收斂或發散審斂法	440
4-1-5 交錯級數的和	443
各校歷屆試題研討	444
類似試題	455
第二章 函數展開式	468
4-2-1 冪級數 (Power Series)	468
4-2-2 泰勒及馬克勞林及二項式展開級數	471
各校歷屆試題研討	474
類似試題	491

第伍篇 微分方程式

第一章 一階常微分方程式	506
5-1-1 微分方程式 (Differential Equations)	506
5-1-2 微分方程式之分類	506
5-1-3 微分方程式之階數 (Order) 與次數 (Degree) ...	507
5-1-4 微分方程式之解 (Solution)	507

5-1-5 一階一次微分方程式之解法	507
5-1-6 應用問題	510
各校歷屆試題研討	511
類似試題	524
第二章 二階常微分方程式	530
5-2-1 線性方程式	534
5-2-2 用一階方法求二階方程式	530
各校歷屆試題研討	534
類似試題	539

第陸篇 向量分析

第一章 平面向量	549
6-1-1 基本定義	549
6-1-2 平面向量代數 (Vector Algebra in The Plane)	550
6-1-3 向量值函數 (Vector Valued Functions) ...	552
6-1-4 平面運動 (Plane Motion)	553
6-1-5 平面曲線的曲率 (Curvature)	554
各校歷屆試題研討	556
類似試題	561
第二章 空間向量	564
6-2-1 三維向量代數	564
6-2-2 空間之直線	568
6-2-3 空間之平面	569

6-2-4 方向導數，梯度	571
各校歷屆試題研討	573
類似試題	587

第柒篇 證明篇 595

第捌篇 實力模擬考試附研討 648

實力模擬考試附研討(一)	648
實力模擬考試附研討(二)	655
實力模擬考試附研討(三)	661
實力模擬考試附研討(四)	670
實力模擬考試附研討(五)	682
實力模擬考試附研討(六)	693
實力模擬考試附研討(七)	702
實力模擬考試附研討(八)	709
實力模擬考試附研討(九)	720
實力模擬考試附研討(十)	728
實力模擬考試附研討(十一)	738
實力模擬考試附研討(十二)	751
實力模擬考試附研討(十三)	758
實力模擬考試附研討(十四)	769
實力模擬考試附研討(十五)	784
實力模擬考試附研討(十六)	788
實力模擬考試附研討(十七)	797
實力模擬考試附研討(十八)	804
實力模擬考試附研討(十九)	809

實力模擬考試附研討(甲)	816
實力模擬考試附研討(乙)	828
實力模擬考試附研討(丙)	839
實力模擬考試附研討(丁)	848
實力模擬考試附研討(戊)	857
實力模擬考試附研討(己)	866
實力模擬考試附研討(庚)	873
實力模擬考試附研討(辛)	879
實力模擬考試附研討(壬)	883
實力模擬考試附研討(癸)	892
實力模擬考試附研討(甲)	898
實力模擬考試附研討(乙)	904
實力模擬考試附研討(丙)	914
實力模擬考試附研討(丁)	921
實力模擬考試附研討(戊)	928
實力模擬考試附研討(己)	932

第壹篇 極 限

本 篇 內 容

- 第壹章 函數之極限與連續性與可微性
 第貳章 各種函數極限類型求極限值方法
 第叁章 數列之極限

第一章 函數極限之連續性與可微性
 重點整理

§ 1-1-1 極限定義

函數 $f(x)$ 當 x 趨近 a 時之極限為 L 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 意即對每一正數 ϵ ，均有一正數 δ 存在，使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時， $|f(x) - L| < \epsilon$ 恒成立。

若存在一數 L 使 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 則謂 $f(x)$ 當 x 趨近 a 時之極限存在或 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

§ 1-1-2 極限基本定理

極限基本定理

(1) $a, c \in R$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ 。

(2) $a, b, m \in R$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$ 。

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$

則① $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ 。

② $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n$ 。

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 而 k 為一常數則 $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k L$.

(6) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n$ (n 為正整數).

(7) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $L > 0$

(8) f 為多項式函數則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $a \in R$. 當 n 為偶數時

(9) 設 $f(x)$, $g(x)$ 為二多項式 a 為常數且 $g(a) \neq 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$

(10) 若 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 而 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

(三明治定理或稱夾擠定理)

§ 1-1-3 單邊極限與無窮極限

(一) 單邊極限

設 f 為一函數, L 為一實數, 若對任意給定一正數 ε , 都能找出 $\delta > 0$ 使得當 $a < x < a + \delta$ 時

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

則稱 x 自 a 之右方趨近於 a , $f(x)$ 的右極限為 L , 並記為

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

同理也可定義左極限, 並以 $(a - \delta < x < a)$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{表之。}$$

(二) 極限之惟一性

$$\text{當 } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\text{則 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ 為真}$$

此定理用以求證函數極限之存在性

(三)最大整數函數($[\]$ 爲高斯符號)

若 $n \leq x < n+1$ 則 $[x] = n$, n 爲整數。

如 $[8.3] = 8$, $[5] = 5$, $[\pi] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$,

$$[-\frac{4}{3}] = -2.$$

(四)無窮極限

(1)若函數 f 的定義域 D 無上界, 且若對於每一 $\varepsilon > 0$, 存在有一數 M , 使當 $x \in D$, 且 $x > M$ 時

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

成立。則稱爲 x 趨近於無限大時, f 的極限爲 L , 記作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

(2)若函數 f 的定義域 D 無下界, 且對於每一個 $\varepsilon > 0$, 存在有一數 M , 使當 $x \in D$, 且 $x < M$ 時

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

成立, 則稱當 x 趨近於負無限大時, $f(x)$ 的極限 L , 記作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

(3)若對於每一正數 M , 對應有一 $\delta > 0$, 使 $(a, a + \delta)$ 在函數 f 之定義域內, 且當 $x \in (a, a + \delta)$ 時, 有 $f(x) > M$, 則稱 x 從右邊趨近於 a , f 爲無限大的遞增記爲

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

因 ∞ 並非一實數, 故在 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 中, 並不只有右極限, 其它如:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$