中学数理化复习丛书

初中代数

CHUZHONG DAISHU

张 巡 编

ZHONGXUE
SHULIHUA
FUXI
CONG
SHU

上海科学技术出版社

代 数

张 巡 编

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

中学数理化复习丛书

初 中 代 数

张 巡 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7.375　字数 163,000

1986 年 3 月第 1 版　1986 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—78,800

统一书号：13119·1295　　定价：1.00 元

引　言

初中代数的内容虽然名目很多，但归纳起来基本上可以分为四部分：数的概念、方程（不等式）、恒等变形、函数，其中数的概念是基础，恒等变形是工具，而主要讨论的是方程与函数，因此复习时可按：数、式、方程、函数等几个部分进行，现就怎样复习谈点认识和看法。

一、首先将知识系统归纳整理，综合概括，揭示其内在联系和基本规律，使学生对基础知识能有较系统完整的认识和理解。

我们认为每一部分复习的开始阶段，要有意识地引导学生依课本逐章系统归纳整理，弄清定义、定理、法则、公式等的来龙去脉，以及它们相互之间的内在联系和应用，使所学的知识能融会贯通。例如"解三角形"一章，可以以三角函数定义为主线，导出该章的公式、法则、定理等基础知识，以及这些公式、法则、定理的应用，经验证明，弄通课本的基础知识过程，实际上也就是将知识融汇深化的过程。

二、要注意沟通知识之间的相互联系，培养学生综合运用知识的能力。

在复习阶段，要把分散在各章节中的知识有机结合起来，作一次总的"升华"，即是要揭示所学知识的内在规律与"纵""横"联系，从而提高学生分析问题和解决问题的能力。例如：二次三项式、一元二次方程、二次函数与二次不

等式，是初中代数中四个重要的基础知识，彼此之间存在着密切的联系，一般称为“四个二次”。这四部分内容分散在初一到初三各个阶段，各自成为一个独立的章节，但是它们的一般形式都可以用$ax^2+bx+c(a\neq0)$来表达；因此在复习时，将这四个“知识点”串成一线，形成一个知识结构；因为这四个“知识点”象锁链一样一环扣一环，前呼后应。如将它系统整理，并加以综合，融为一体，学生就可以获得一个完整的，有逻辑联系的结构系统，在应用时就能做到得心应手，左右逢源。

三、要注意总结解题的基本思路，揭示解题的一般规律.

代数题，大多是一些概念、公式、法则和定理的应用，都有一般的解法（有些问题也有灵巧的解法），复习时要注意总结揭示一般的思路和方法，例如：解方程（组）的规律，在于针对各类方程（组）的特点，采用相应的解题方法，如一元方程是“次数高”，关键是降次；方程组是“变元多”，关键是在于消元；分式方程是“有分母”，关键在于整式化；无理方程是“带根号”，关键是有理化，复习时通过典型例题的分析来揭示解方程（组）的基本思路和一般规律。

配方法、换元法、待定系数法在代数的各个领域中都有广泛的应用，在复习时应予以重视，使学生能熟练地掌握这些方法。

四、要注重概念的复习与应用，能做到对概念透彻理解，牢固掌握，灵活应用。

代数中的一些主要概念，要重点加以复习，使学生对概念有一个科学的、正确的理解，因为概念是掌握和理解基础知识的关键，是进一步学习的基础。例如：数的概念；算术根和绝对值概念；方程和不等式概念；指数与对数概念；函

数概念等，可通过典型题目，揭露本质，加强训练，使学生对解题的每一个步骤，不仅知道怎样做，而且懂得为什么要这样做。同时还要针对学生平时常犯和易犯的错误，分析其原因加以纠正。

一元二次方程根的判别式和韦达定理是应用很广的两个基础知识，但学生对这两个基本概念的区别和联系含糊不清，我们知道韦达定理和判别式$\Delta=b^2-4ac$都是用来揭示根与系数之间关系的式子，但是两者用途是不同的，判别式只能判别有无实根和实根是否相等，而要进一步判别根的正负，还必须用韦达定理，但是韦达定理又只阐明了根与系数的关系，它本身并不能保证方程有实根，只有判别式$\Delta=b^2-4ac\geqslant0$才是方程有实根的充要条件，因此，在解题时要注意什么情况下只需用韦达定理即可，而在什么情况下却需与根的判别式一起应用。

五、要注意培养学生掌握最基本的运算方法，具有熟练的运算技能。

初中代数中数的运算，代数式的运算，解方程(组)等内容极为丰富，要求学生在复习中，要有重点地加强计算技能训练，能做到运算有据、计算合理、方法简便；克服由于概念不清、判断不当或记忆模糊而引起的错误；同时要求学生掌握一些常用的速算方法、运算技巧、验算方法等。

出 版 说 明

为了帮助初、高中毕业班教师搞好总复习阶段的教学，也为了帮助初、高中学生搞好总复习，我们约请了一些有多年教学经验的教师编写了《中学数理化复习丛书》。本丛书一套十种：数学六种、物理两种、化学两种。

本书包括：实数，指数和对数，代数式，方程和方程组，不等式，函数及其图象，解三角形，统计初步，几种重要的数学方法等内容，比较全面、系统地对初中阶段代数知识和技能串点成线，强调归纳总结、纵横联系；对其中的重点和难点进行了分析和讲解；精选例题和习题，例题着重揭示最基本的方法和规律，习题选取上注意知识的覆盖面；在编排上考虑到教师复习的需要，由浅入深，分清层次。最后还采取小专题的形式，编排了一章综合运用，介绍了配方法、换元法、待定系数法在代数中的应用，以供初中毕业班在总复习时选用。

本书在编写中承上海市第六师范学校陈肇曾同志提供许多宝贵意见，对书稿作了认真地修改，在这里我们表示感谢。

欢迎广大读者对本书提出批评意见。

目　　录

第一章 实 数

本章主要复习数的概念、性质和运算。

在实数概念的复习中，重点要搞清正负数、有理数、无理数、实数、绝对值等基本概念以及它们之间的相互联系。尤其是绝对值概念，不仅对学习有理数性质、运算处于举足轻重的地位，而且对于以后学习与掌握含有绝对值符号的代数式、不等式和方程，都是极为重要的。因此这个概念更是复习的重点。

在实数的性质和运算中，重点要搞清实数大小的比较(即实数的顺序性)、实数的几何意义(与数轴上的点建立一一对应)，实数的运算主要是通过有理数的近似计算来实施的，因此有理数运算是复习的重点。

通过对实数的复习，不仅使学生理解数的定义、分类及各种与数有关的概念，而且使学生能熟练地掌握数的运算定律与性质，能正确、合理、迅速地进行各种数系的运算，提高学生的计算能力。

一 实数的概念和性质

1. 实数的基本概念

复习实数的概念，要抓住三个方面：第一，要对数的概念的扩展过程作系统的整理、归纳，使学生在数的系统里掌

握数的有关概念；第二，在数的有关概念中，重点要抓住绝对值概念及其应用；第三，要运用数的概念，对字母表示数的意义进行一次再认识，例如通过“$+a$是正数吗？$-a$是负数吗？”之类问题的练习，提高学生抽象思维的能力。

此外，对算术中有些概念，例如质数、合数、因数、质因数、约数、倍数等有关概念，应作适当的复习。

（1） 数的概念的扩充

由于社会实践的需要，人们对数的认识不断扩大。小学里学习了自然数、零、分数；初中数学里首先引入负数，将数的概念扩充到有理数集(第一次扩充)；接着通过方根引入无理数，又将数的概念扩充到实数集(第二次扩充)，它们之间的关系如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或者无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

（2） 相反数、倒数

只有正、负号不同的两个数叫做互为相反的数，零的相反数是零。任何实数都有相反数，互为相反数的两个数，它们的绝对值相等，符号相反，其和为零。

如果两个数的积等于1，那末这两个数互为倒数。零没有倒数。

（3） 数轴

数轴有三个要素，它是一个规定了原点、正方向和单位

长的直线。实数和数轴上的点一一对应，也就是说，每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示，反之，数轴上的每一个点都可以表示唯一的一个实数。

(4) 绝对值

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零，即

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

一个实数的绝对值的几何意义，是数轴上表示这个实数的点到原点的距离。

绝对值的概念，不仅对学习实数的性质、运算处于举足轻重的地位，而且对于学习根式及含有绝对值符号的代数式、不等式、方程等都很重要，可以说它贯串于中学数学课的始终，但由于学生对这一概念理解不深，解题时错误较多，因而在复习时，要抓住基本内容，由浅入深地把有关不等式，根式等知识沟通起来，并注意一定的解题技巧，培养分析问题的能力。

(5) 实数大小的比较

实数的大小比较，可结合数轴来阐明比较法则，右边的数总比左边的数大，即正数大于零，负数都小于零，正数大于一切负数，两个负数，绝对值大的反而小。

2．需要注意以下几点

(1) 偶数可以表示为 $2n$，奇数可以表示为 $2n+1$，其中 n 为整数；

(2) 任何一个有理数，都可以表示为$\frac{n}{m}$，其中 m，n 是整数，且 $m\neq0$；

(3) 在整数中，或在有理数中，或在实数中，讨论某个字母或某个式子时，一般都分为三种情况：正、负、零。不要忘记零的情况，这在解决许多问题时都很重要。

例 1 下列各数中，哪些是整数？哪些是分数？哪些是无理数？

π， $0.5343434\cdots$， $\lg 1$， 3.1416， $-\sqrt{2}\sin 45°$，$\sqrt{121}$，$\mathrm{tg}60°$， $0.1010010001\cdots$

解 整数：$\lg 1$， $-\sqrt{2}\sin 45°$， $\sqrt{121}$；

分数：$0.5343434\cdots$， 3.1416；

无理数：π， $\mathrm{tg}\,60°$， $0.1010010001\cdots$。

例 2 (1) 求证：三个连续整数的平方和被 3 除余 2；

(2) 求证：两个相邻奇数的平方差是 8 的倍数。

证明 (1) 设三个连续整数为 $a-1$、a、$a+1$，则

$(a-1)^2+a^2+(a+1)^2=3a^2+2$， ∴被 3 除余 2；

(2) 设两个相邻奇数为 $2n-1$，$2n+1$（n 为整数），则

$(2n+1)^2-(2n-1)^2=4n\times 2=8n$， ∴是 8 的倍数。

例 3 下列各数中，哪些互为相反数，哪些互为倒数？哪些互为负倒数？

$3\frac{1}{3}$，$\sqrt{2}+1$，$\lg 6$，-0.3，$\sqrt{2}-1$，$\lg\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{5}$，0.2，$\mathrm{ctg}30°$，$\mathrm{tg}30°$。

解 ∵ $-\frac{1}{5}=-0.2$，$\lg\frac{1}{6}=\lg 6^{-1}=-\lg 6$，

∴ $-\frac{1}{5}$ 与 0.2，$\lg 6$ 与 $\lg\frac{1}{6}$ 互为相反数。

∵ $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$，$\mathrm{ctg}30°\cdot\mathrm{tg}30°=\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1$，

$\therefore\quad \sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$，$\mathrm{ctg}30°$ 与 $\mathrm{tg}30°$ 互为倒数。

$\because\quad 3\frac{1}{3}\times(-0.3)=-1$，

$\therefore\quad 3\frac{1}{3}$ 与 (-0.3) 互为负倒数。

例 4 若实数 a、b、c 在数轴上的对应点(图 1.1)。计算：$\sqrt{a^2}-|a+b|+|c-a|+|b+c|$.

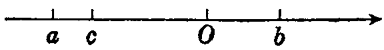

图 1.1

解 $\because\quad a<0$，

$\therefore\quad \sqrt{a^2}=-a$。

$\because\quad a<0$，$b>0$，又 $|a|>|b|$，

$\therefore\quad a+b<0$，$|a+b|=-(a+b)$.

$\because\quad c<0$，$a<0$，又 $|a|>|c|$，

$\therefore\quad c-a>0$，$\therefore |c-a|=c-a$.

$\because\quad b>0$，$c<0$，又 $|c|>|b|$，

$\therefore\quad b+c<0$，$\therefore |b+c|=-(b+c)$.

$\therefore$ 原式 $=-a-[-(a+b)]+c-a+[-(b+c)]$

$=-a+a+b+c-a-b-c=-a$.

说明 从例 5 可以知道，去掉绝对值时，应首先确定绝对值符号内代数式的值的符号（正数、负数、零），再根据绝对值定义去掉绝对值的符号.

例 5 若 $m<0$，化简：$|m-\sqrt{m^2}|$.

解 $\because\quad m<0$，

$\therefore\quad |m-\sqrt{m^2}|=|m-(-m)|$（算术根概念）

$=|2m|=-2m$.（绝对值概念）

说明 本题可能有些同学会得零，反映出算术根和绝对值的概念

都不清楚；若得 $2m$，则对绝对值概念不清；只有对两者概念都清楚，才能得到正确的结果 $-2m$.

例 6 化简：$|7-2x|-\sqrt{9-6x+x^2}-3^{\log_3(x-5)}$。

分析 本例虽没有似上题那样给出条件，但要使$3^{\log_3(x-5)}$有意义，必须$x>5$，这是题中的隐含条件。

解 $\because$ $x>5$，$\therefore$ $|7-2x|=|2x-7|=2x-7$，

$\sqrt{9-6x+x^2}=\sqrt{(3-x)^2}=|3-x|=|x-3|=x-3$，

$\therefore$ 原式 $=(2x-7)-(x-3)-(x-5)=1$。

例 7 化简：$|2x+1|+|2-3x|$。

分析 本题一般采用"零点分区直观法"来解。它的解题步骤是 12 字口诀：标准化，求零点，划区间，得结果。

解 (1) 标准化：$|2x+1|+|2-3x|=|2x+1|+|3x-2|$。

(2) 求零点：$|2x+1|$的零点为 $2x+1=0$，即$x=-\frac{1}{2}$；$|3x-2|$的零点为 $3x-2=0$，即 $x=\frac{2}{3}$。

(3) 划区间：将零点按大小标在数轴上，并将各个绝对值写在各自零点上。零点将 x 取值范围$(-\infty, +\infty)$划分为三个区间$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$，$\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$，$\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$。

(4) 得结果：由图 1.2，得

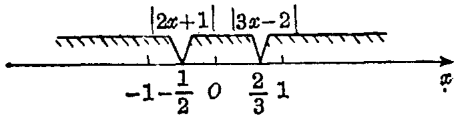

图 1.2

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，原式 $=-(2x+1)-(3x-2)=-5x+1$，

当$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$时，原式 $=(2x+1)-(3x-2)=-x+3$，

当 $x\geqslant\frac{2}{3}$ 时，原式$=(2x+1)+(3x-2)=5x-1$。

例 8 比例下列各数的大小：

(1) $-1\frac{3}{4}$ 和 $-\frac{12}{7}$；

(2) $-\sqrt{3}$ 和 -1.732；

(3) $2\sqrt{7}$ 和 $4\sqrt{2}$；

(4) 当 $a<b<0$，$\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$。

解 (1) $\because$ $\left|-1\frac{3}{4}\right|=+\frac{7}{4}=+\frac{49}{28}$，

$$\left|-\frac{12}{7}\right|=+\frac{48}{28},$$

$$\therefore\quad \left|-1\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{12}{7}\right|,$$

即 $\qquad -1\frac{3}{4}<-\frac{12}{7}$。

(2) $|-\sqrt{3}|=1.73205\cdots$，$|-1.732|=1.732$，

而$1.73205\cdots>1.732$，$\therefore$ $-\sqrt{3}<-1.732$。

(3) $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$，$4\sqrt{2}=\sqrt{32}$，

而 $\sqrt{28}<\sqrt{32}$，$\therefore$ $2\sqrt{7}<4\sqrt{2}$。

(4) $\because$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，$\quad a<b<0$，

$\therefore$ $ab>0$，$b-a>0$，则 $\frac{b-a}{ab}>0$，

即 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$，$\therefore$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$。

例 9 试证：不论 x 取任何实数，多项式 $2x^2-4x-1$的值总大于 x^2-2x-4 的值。

证明 ∵ $(2x^2-4x-1)-(x^2-2x-4)$

$=x^2-2x+3=(x-1)^2+2.$

对于任何实数 x，总有$(x-1)^2\geqslant 0$，∴$(x-1)^2+2>0$，

∴ 不论 x 取任何实数，$(2x^2-4x-1)-(x^2-2x-4)>0$，即多项式 $2x^2-4x-1$ 的值总大于 x^2-2x-4 的值。

说明 上面例8的(4)和例9，是关于比较两个代数式的大小的常用方法之一："比较法"。

(1) "比差法"，它的基本思想是：若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b<0$，则$a<b$；若$a-b=0$，则 $a=b$。一般步骤是：①作差，②变形(通常是配方或分解因式)，③判断(大于零、小于零、或等于零)。

(2) "比商法"，它的基本思想是：在 $a>0$，$b>0$ 的条件下，若 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$，若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$，若 $\frac{a}{b}=1$，则$a=b$.

二 实数的运算

1. 实数的运算

实数的运算，主要是通过有理数的运算来计算的，因此在复习实数的运算时，重点应放在有理数的运算上。

对于六种代数运算的实施，应向学生指出，在实数范围内，只能实施加、减、乘、除、乘方等五种代数运算，而开方运算不一定可以进行。

关于有理数的四则运算法则，关键在于搞清符号法则以及利用绝对值意义把运算转化为算术中数的运算。同时也要注意"+"与"-"这两个符号的双重意义：它们既是运算符号又是性质符号。

实数的运算，通常是取它的近似值，进行近似计算，因此实数运算实际上是通过有理数的运算来进行的。有理数的