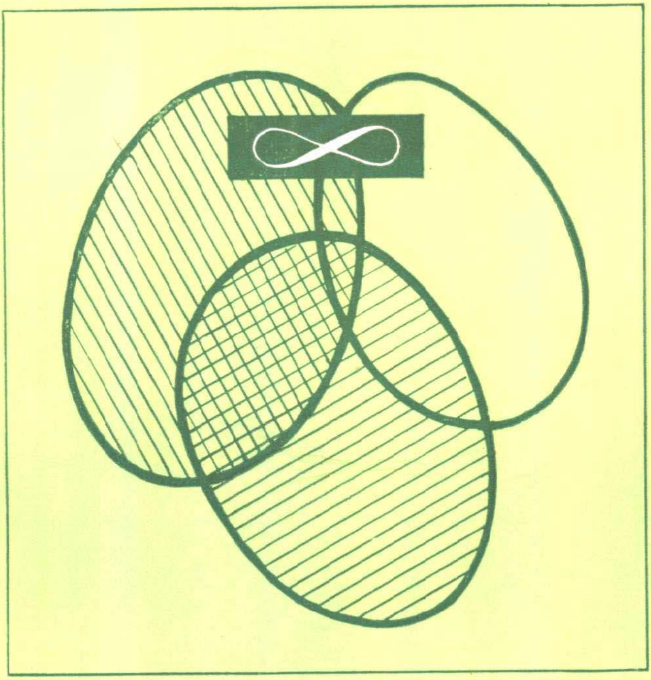
不平常的代數

方伟武 译



知识出版社

不平常的代数

И.М.ЯГЛОМ 著

方 伟 武 译

知 识 出 版 社

内 容 提 要

本书深入浅出地介绍了现今数学中的一些基本问题，例如数与集合，算术与代数，代数与逻辑等数学基础概念，以及它们的关系和发展。并通过具体而有趣的例子说明了布尔代数（命题代数）在数学、逻辑、电路设计等方面的广泛应用。书中内容对于深刻理解中学数学的基本概念和方法，开拓眼界，培养科学的思维方法是非常有益的。

本书适于中小学师生阅读，对于有志于学习逻辑运算及设计的成年读者也可作为一本启蒙读物。

不平常的代数
方伟武译
知识出版社出版
（北京安定门外外馆东街甲1号）
新华书店北京发行所发行
六〇三厂印刷
开本787×1092 1/32 印张4.625 字数97千字
1984年6月第1版 1984年6月第1次印刷
印数：1—87,000
书号：7214·18 定价：0.41 元

目　录

星号表示这些部分在初次阅读本书时可以略去。

前　　言

本书是在一次讲演的基础上写成的，讲演内容和本书内容之间的差别在于书的每一节末尾都附有练习（练习中最困难的问题标有星号）。在本书的最后，有某些问题的答案和提示。建议读者若不解答完所有的问题也要做完大部份练习，因为只有解答完所有这些问题之后，读者才可以确信自己理解了书中的主要内容。书中还包括了一些选择阅读的材料(特别是在目录中标有星号的第七节和附录)，这些材料在初次阅读本书时可以略去。在书的正文中，这些部份是这样标记出来的：在开始处用一个星号，在结束时用二个星号。然而，在第二遍阅读本书时，最好要学习第七节，因为第七节的内容对布尔代数理论的实际应用是重要的。

书末文献目录中列出的书，对于想详细研究布尔代数的读者是有用的。

一、从数的代数谈起

什么时候 $A+A=A$？你的回答未必完全。记住登高望远这一简单而又重要的真理是有益的。

学生在学校里学习算术和代数时，会遇到不同类型的数。在开始时学习整数，理解这些整数并不困难，因为大部份学生上学前已经相当熟悉这些数了。然而在数学学习的进一步课程中，学生会不断遇见新的"数"以及一些初看来十分奇怪的"数"（例如，分数、无理数等等）。当学生逐渐习惯了一种新的数后，就不再对它感到困惑，可是将数的概念每进行一次新的扩充，他们还有一些错误观念要改正。一个整数给出了在确定的对象总体中有多少个对象的信息。例如，一个篮子里有多少苹果，一本书有多少页，一班里有多少男孩。至于分数，一个班里当然不会有$33\frac{1}{2}$个男孩，桌上不能有$3\frac{1}{4}$个盘子，但桌上可以有$4\frac{1}{2}$个苹果，一场电影可以放映了$1\frac{3}{4}$个小时，一个书架上可以有$6\frac{1}{2}$本书（当然，这书的主人没有把书保管好！）。当我们理解了一个对象总体

里的分数可以是有意义的之后，学生开始学习负数。当然，在一个书架上不可能有－3本书(这是十分不合人情的！)。可是一个温度计可以标示出－5°，并且说一个人有－50元甚至也有意义(后一情况也许使人烦恼，可是对数学这是不重要的！)。高年级学生还要学习更“惊人”的数：首先是所谓无理数，如$\sqrt{2}$，其次是虚数，如$1+2i$①(“无理”和“虚”这些名词清楚地表示出：在人们习惯于这些数之前，它们对人似乎是多么不可思议！)，顺便指出，如果读者还不熟悉无理数和虚数，这并不妨碍他读这本书②。上面我们将整数看做为一个对象总体里的定量性质，这个基本概念与无理数及虚数的概念很少有相同之处，虽然如此，我们依然把无理数及虚数称为“数”。

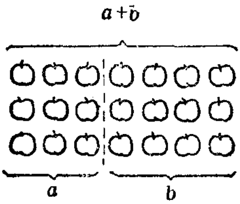


图1

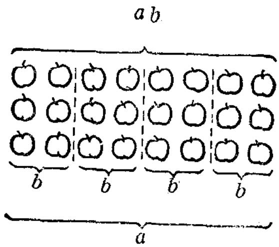


图2

① 在现代数学里，$1+2i$这种型式的数称为复数，而用虚数(或纯虚数)这个词时，指的是如$2i$或$-\sqrt{2}i$这样的数(与此相对照，像1或$-\frac{3}{2}$或$\sqrt{2}$这样的数被称为实数)。

② 各种数的基本表示可以在下面书里找到：
I. Niven, Numbers: Rational and Irrational, New York, Random House, 1961.

这样自然会问：什么是这些数的共同特征，使我们可以对它们全体采用“数”这个术语呢？不难发现，这些各种数的主要共同特征是每一类数都可以彼此相加以及相乘①。但是在不同种类数之间的这种相似是有条件的，理由是：尽管我们可以完成各种数的加法和乘法运算，但这些运算本身在不同的情况下有不同的意义。例如，当我们把两个正整数 a 与 b 加起来，我们是求出两个对象总体合并后的对象个数，其中第一个总体含有 a 个对象，第二个含有 b 个对象。若在一个班里有 35 个学生，在另一个班里有 39 个学生，那么在两个班里共有 $35+39=74$ 个学生（也见图 1）。类似地，当我们把正整数 a 和 b 相乘，我们是求出 a 个总体合并后的对象个数，其中每一个总体都含有 b 个物体。假若有 3 个班，每一个班有 36 个学生，那么所有这些班共有学生 $3\times 36=108$ 个（也见图 2）。然而很明显，加法和乘法的这种解释既不能用于分数运算，也不能用于负数运算。例如，有理数（分数）的和与积用下面的规则定义：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

和

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

（这里 a，b、c 和 d 是整数）。我们也知道，对有正负号的数存在着规则：

---

① 可是不能减或除：例如，若我们仅熟悉正数，我们不可能从 5 减去 3，若我们仅知道整数，我们不能用 4 除 7。

$$(-a)\cdot(-b)=ab \quad \text{等等。}$$①

这样，我们可以导出下列结论："数"这个术语可以用于不同类型的数，是因为它们可以彼此相加和相乘，可是对于不同类型的数，加法和乘法运算本身则完全不同。然而这里我们已说得过分了：可以证明的是，整数加法运算和分数加法运算之间事实上有很多类似。更严格地说，这些运算的定义是不同的，可是运算的一般性质是完全类似的。例如，对任意一种数我们总有恒等式

$$a+b=b+a$$

数的加法交换律

$$ab=ba$$

数的乘法交换律

并且还有恒等式

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

数的加法结合律

以及

$$(ab)c=a(bc)$$

数的乘法结合律

在所有这些情况里存在着两个"特殊"的数——0和1，0同任意一个数相加以及1同任意一个数相乘都不会使原来这

---

① 这里我们不详细讨论无理数和虚数，并仅仅指出复数是根据规则

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

和

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

进行相加和相乘，对那些还不熟悉复数的读者这些规则大概是很奇怪的，可是它们比起定义无理数的和与积来要简单得多。

一个数得到改变：对任意数a，我们有

$$a+0=a \text{ 和 } a\cdot 1=a$$

上述内容说明了现代数学的一个观点，根据这个观点，代数的目的是研究一些（不同的）数的系统（以及其他一些对象），对这些数系定义了加法和乘法运算，使得上述定律和下面将要讲到的一些定律是成立的。例如对任意数a、b和c，恒等式

$$(a+b)c=ac+bc$$

乘法对加法的分配律

应当成立。

在加法和乘法运算之间有某种类似，这是特别显而易见的，因为加法的性质在许多方面类似于乘法的性质。假若我们提出一个不寻常的“比例”

$$\frac{\text{加法}}{\text{减法}}=\frac{\text{乘法}}{?}$$

那么甚至不用分析“比例”的含意，每一个人都会用“除法”这个词代替问号。由于这种类似，常使许多人将一个数的（加法的）逆的概念（这个逆是$-a$，它和给出的a相加结果为0）和一个数的倒数（乘法的逆）的概念混同（倒数是$\frac{1}{a}$，它与给出的a相乘结果等于1）。由于同样的原因，算术级数（它是一个数的序列，它的任意一个数与这数前面的一个数之差都是同一个数）与几何级数（它是一个数的序列，它的任意一个数与这数前面的一个数之比都是同一个数）的性质之间也有许多类似之处。

然而这种类似还没有完。例如数0不仅在加法中，而且

在乘法中都起着特殊作用，因为对任意数 a，

$$a \cdot 0 = 0$$

成立（从上面这个恒等式可以得出，一个与 0 不同的数不可能被 0 除尽）。如果在这个恒等式中，用加代替乘，用 1 代替 0，我们将得到一个无意义的“等式”

$$a + 1 = 1$$

它仅在 $a = 0$ 时能够成立①。我们如在分配律 $(a+b)c = ac + bc$ 中把乘法与加法相交换，我们得到“等式”

$$ab + c = (a+c)(b+c)$$

当然没有人会赞同这个式子。因为我们显然有

$$(a+c)(b+c) = ab + ac + bc + c^2 = ab + c(a+b+c)$$

仅当 $c = 0$ 或 $a+b+c = 1$ 时，才得出 $(a+c)(b+c) = ab + c$

然而还有一些其他的代数系统，它们的元素不是数，对这些元素也可能定义加法和乘法运算，并且这些元素的加法与乘法运算之间的类似甚至比数的同样这些运算之间的类似还要接近。例如我们考察关于集合代数这个重要的例子。一个集合指的是任意一些对象的任何一个总体，这些对象称为集合元素。例如我们可以考察在某一班里学生的集合，一个圆内点的集合，一个正方形里点的集合，周期系统里元素的集合，偶数的集合，印度象的集合，你的作文里语法错误的集合等等。很明显，两个集合的加法可用下面的方式定义：所谓集合 A 与集合 B 的和 $A+B$，我们仅指的是这两个集合的并。例如，若 A 是一个班里男孩的集合，B 是这个班里女孩的集合，那么 $A+B$ 是这个班里所有学生的集合。类似地，

① 若等式 $a+1=1$ 对任意 a 成立，那么从任意一个不同于 1 的数里减去 1 就变得不可能了。实际上不是这样；例如，$3-1=2$。

若 A 是所有偶正整数集合，B 是能被 3 整除的正整数集合；那么

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \cdots\cdots\}$$

是由两个数组所组成的集合 $A+B$。在图 3 中，若集合 A 由水平线阴影面积内的点所组成，集合 B 由斜线阴影面积内的点所组成，那么集合 $A+B$ 是图 3 中整个阴影面积。

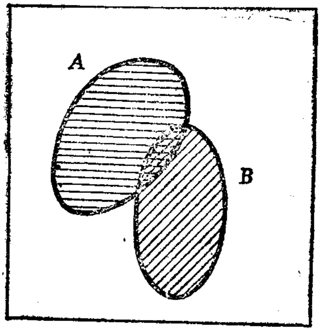


图 8

我们已经定义了一个完全新的运算，并且已把它称为加法，对此不应该觉得奇怪。应当记得，在前面当我们从一种数转到另一种数时，我们用不同的方式定义了加法运算。显然，正数的加法和负数的加法是完全不同的运算，例如，数 5 与 - 8 之和等于(正)数 5 与 8 之差。类似地，分数的加法按照 $a/b+c/d=(ad+bc)/db$ 的规则进行，这个加法与整数的加法不同：正整数加法的定义（见图 1）不适用于分数加法。它们应用同一术语“加法”的原因是：由正整数转到其他种类的数时，譬如转到分数时，正整数加法运算的一般定律依然有效，在这两种情况里，加法运算证明都是可以交换的和可以结合的。

现在检验这些定律对新的“加法”运算是否依然有效，即对集合的加法进行检验。考察表示集合运算的专门图表对简化分析是有利的。设我们采用下列约定：研究中所有元素的集合（例如，所有整数的集合，或学校里所有学生的集合）

将表示为一个正方形，在这正方形里，我们可以标出不同的点，去表示集合里某些具体元素（例如，数 3 和 5，或学生张华和马萍）。在这种表示法中，由这个给定集合里某些元素组成的集合（例如，偶数的集合或优秀学生的集合）用这个正方形里的某些部份来表示。英国数学家约翰·温（1834—1923）把这些图用于他的数理逻辑研究工作之后，这样的图常称为温氏图。更正确地说，它们应称为欧拉①图，因为 L·欧拉应用这样的图比 J·温要早许多[1]。

从图 3 同样很清楚看出，

$$A+B=B+A$$

它对任意两个集合 A 与 B 成立。这意味着交换律对集合的加法是成立的。而且对任意集合 A、B 和 C 显然恒等式

$$(A+B)+C=A+(B+C) \quad \text{成立,}$$

这意味着集合的加法遵从结合律，它得出集合 $(A+B)+C$（或同样的，集合 $A+(B+C)$）可以不用括号简单地表示为 $A+B+C$；集合 $A+B+C$ 只不过是所有这三个集合 A、B 和 C 的并（见图 4，在那里集合 $A+B+C$ 同图中整个阴影面积一致）。

现在我们约定，两个集合 A 与 B 的积 AB 意味着它们的公共部分，即这些集合的交。例如，A 是你们班里象棋手的集合，B 是你们班里游泳者的集合，那么 AB 是那些也会游泳的象棋手的集合；若 A 是偶正整数的集合，B 是能被 3

---

① 欧拉（1707—1783）是著名的瑞士数学家，他的大部分生活是在俄罗斯度过的，死于彼得堡。

① 欧拉在他的数理逻辑研究中，通过平面上的圆表示对象的不同集合，因此，相应的图（在原则上它和温氏图没有什么不同）常称为欧拉圆。

整除的正整数的集合，那么集合 AB 是

$$\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\cdots\}$$

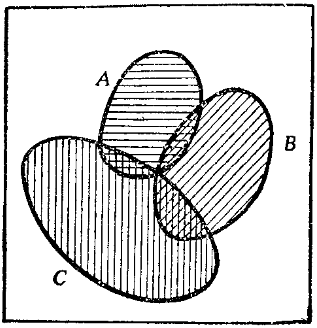


图 4

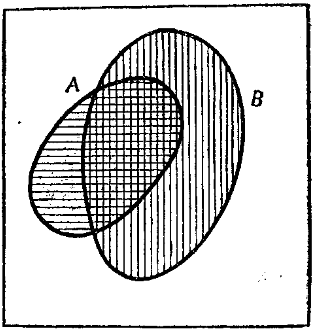


图 5

这个集合由可被 6 除尽的所有正整数组成。在图 5 中，如果集合 A 由水平线阴影面积内的点所组成，并且集合 B 由垂直线阴影面积内的点组成，那么集合 AB 是图中交叉阴影线面积。十分清楚，以这种方式定义的集合乘法遵从交换律，也就是对任意两个集合 A 与 B，我们有

$$AB = BA$$

（见同一个图 5，显然，"会游泳的象棋手集合"与"会象棋的游泳者的集合"相重合，这完全是同一个集合）。而且，非常明显的是：结合律对集合的乘法也成立。即对任意三个集合 A、B 和 C，我们有

$$(AB)C = A(BC)$$

结合律允许我们把集合$(AB)C$或同一个集合 $A(BC)$ 简单地表示成 ABC，而不用括号。集合 ABC 是三个集合 A、B、C 的公共部分（交）（在图 6 中，集合 ABC 是被三簇阴影线形

成的网格所复盖①)。

值得注意的是，对任意三个集合 A、B 和 C 还有分配律成立：

$$(A+B)C=AC+BC$$

实际上，例如在你们班里 A 是象棋手的集合，B 是会玩跳棋的学生集合，而 C 是游泳者的集合，那么集合 $A+B$ 是象棋手集合与那些会玩跳棋的学生集合之并，即那些能玩象棋或能玩跳棋或两者都会的学生集合。如果我们仅从集合 $A+B$ 中选出会游泳的学生，可以得到集合 $(A+B)C$。可是十分清楚，同样的集合也可从集合 AC 以及 BC 的并 $AC+BC$ 得到，这里 AC 是那些会游泳的象棋手集合，BC 是那些会跳棋又会游泳的学生集合。

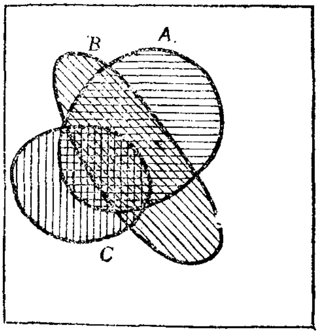


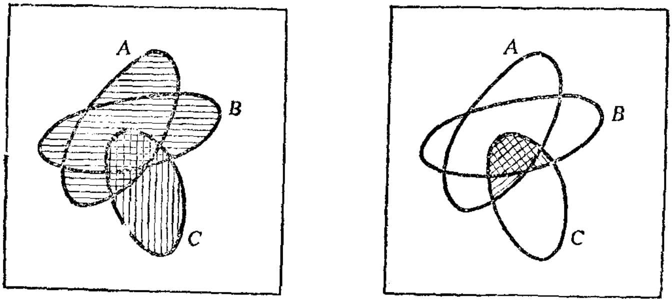
图 6

分配律的文字解释是相当长的，说明这个定律也可利用图示的证明方法。在图 7 a)中，集合 $A+B$ 是水平线阴影，集合 C 是垂直线阴影，因此集合 $(A+B)C$ 是被阴影线网格所复盖的部分。在图 7b)中，集合 AC 和 BC

---

① 这里还有一个证明集合的积具有结合律的例子。令 A 是能被 2 整除的整数集合，B 是能被 3 整除的整数集合，C 是能被 5 整除的整数集合，那么 AB 是能被 6 整除的整数集合，(AB)C 是能被 6 和 5 都整除的整数集合，也就是能被 30 整除。另一方面，BC 是能被 15 整除的整数集合，并且 A(BC) 是能被 15 整除的偶整数集合；因此我们知道，A(BC) 与能被 30 整除的所有整数集合 (AB)C 相同。

用不同的倾斜阴影线来表示，图中，集合 $AC+BC$ 与整个阴影面积相一致。而在图 7 b)中清楚地看出，$AC+BC$ 的面积和图 7 a)中交叉阴影线复盖的面积 $(A+B)C$ 相同。



(a) (b)

图 7

很容易理解在“集合代数”里起“0”作用的“集合”。实际上，任一集合加这个集合（我们表示它为 O），其结果仍是原来那个集合。因而 O 集合必然完全不含有元素。这样，O 是一个空集（也称为 0 集）。也许有人认为由于 O 集合是空集，并且不含有元素，因此不需考虑它。可是从研究中排除空集实际上极不合理。这样做就类似于从数系中排除数0；一个包含“0”个元素的“总体”也是空的，并且说包含在这样一个总体里的元素“数目”似乎也是无意义的。可是事实上它决不是可有可无的，而且是非常有用的，若我们不引入数 0，从任意一个数减去另一个任意数就不可能（因为例如 3 － 3 的差在这种情况下就不是数）。没有数 0，用十进制写数 108 时就很困难、因为这个数含有百位数字 1，个位数字 8，可是没有十位数字。另外还有许多重要的问题没有数 0

是不可能的。这就是为什么把数0的引入看作算术发展史中最值得注意的事件之一。类似的若我们不引入空集合的概念，就不可能谈及任意两个集合的积(交)。例如图8中集合A和B的交是空的，你们班里优秀学生的集合和大象集合的交也是空的，若我们没有空集合的概念，甚至不能谈到某些集合。例如就不可能说“一个班里那些名字叫张华的学生集合”因为这个集合也许根本不存在，即也许它原来就是空集合。

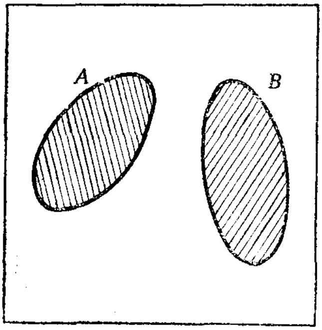


图 8

很清楚，若O是一个空集合，那么对任意集合A，我们有

$$A+O=A$$

也很明显，对任意集合A我们总有

$$AO=O$$

因为任意集合A和O集合（它不含有元素）的交必然是空的（例如，你们班里女学生集合和那些身高超过2.5米的学生的集合之交是空集合）。上述恒等式通常称为交定律之一（另外的交定律将在下面讲述）。

现在谈一个更复杂的问题，它和一个集合有关，这个集合起着类似于数系里数1的作用，这个集合（我们表示它为I）和任意一个集合A的积（也就是交）仍和A相同。从这个要求可得出：集合I必含有所有这些集合A的全部元素。然而很清楚，若我们限制这些集合的元素仅取自于“对象”的一个确定的范围，这样一个集合就能够唯一地存在，