李根水 编著

A

中学数学解题方法与技巧

——变形与变换

X Y

Z

B C

北京师范大学出版社

中学 还 方法与技巧

——变形与变换

李根水　编著

北京师范大学出版社

前　言

“变形”是数学中的重要基础，学习数学与探索数学问题时，经常要用到“变形”，如数的变式，式的恒等变形、方程的同解变形等；“变换”是研究几何图形的重要工具，利用“变换”的观点和方法去探索几何问题，易于观察几何图形的区别与联系，揭示几何量之间的某种规律。因此“变形与变换”是数学中重要的基础知识和基本技能，是探索数学问题解答的一种有效的解题方法，是开拓思路，发展智力，培养能力的一条较好的训练途径。而目前在中学生的课外读物中此类著作较少，拟写一本《中学数学中的变形与变换》显得十分必要，笔者有感于此。

本书介绍了中学数学中恒等变形的一些方法，从理论上探索同解变形的一些方法，几何图形的变换与变式，数形结合的思想方法。着眼于加强双基、注重方法、分析综合、拓宽思路、发展智力，提高能力，如果读者通过本书的学习与使用，能够在这方面有所收益，笔者将感到欣慰。

在撰写本书的过程中，得到了北京师范大学出版社编辑的热情支持，并对书稿提出了很宝贵的意见。苏州大学数学系唐复苏副教授在百忙中看过了初稿，作了精心指导，对书稿内容的编排提出了很宝贵的意见。天津师范大学《中等数学》主编庞宗昱副编审也给以热情的帮助。谨向在写作中给以精心指导和热情帮助的同志表示衷心的感谢。

执笔的过程，同时也是笔者学习和思考的过程，在写作中限于自己水平，不当之处，敬请同志们多多批评和指导。

编　者

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　恒等变形的几种方法

如果给定两个函数式，对于它们自变量取值范围的公共部分的任何一个，函数式有相等的数值，那末我们就称这两个函数式是恒等的，这个等式叫做恒等式。

例 1　恒等式

$$\lg x^2 = 2\lg x$$

对一切正实数x成立。

例 2　恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

对一切实数x成立。

例 3　函数$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$与$\operatorname{tg} x$并不恒等，这是因为

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \left[k\pi \leqslant x < k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\operatorname{tg} x & \left[k\pi - \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant k\pi\right] \end{cases}$$

但函数$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}\left[k\pi \leqslant x < k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$与$\operatorname{tg} x$是恒等的，即对于

$\left[k\pi \leqslant x < k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right](k \in Z)$有恒等式

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x$$

在数学中，有时为了某种需要，我们常常用某一函数式的恒等式去代换，这种代换叫做恒等变形．在进行恒等变形时可能会引起变量变化范围的改变，应予以重视。

例如，根据对数运算法则可将$\lg(x \cdot y)$恒等变形为$\lg x + \lg y$，即$\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$，经过这样的恒等变形后，变量变化的范围由$x>0$，$y>0$或$x<0$，$y<0$缩小为$x>0$，$y>0$。

恒等变形是数学推理的重要工具。无论是化简代数式与三角式，证明恒等式与不等式，解方程与解不等式，以及公式的推导和定理的证明，差不多都离不开恒等变形。函数式的恒等变形是通过运算律，运算法则和数学公式来实施的，如多项式的因式分解，分式、根式、指数、对数运算，二项式的展开，三角式的恒等变形等等。数学方法：配方法、裂项法、待定系数法、换元法等在恒等变形中起着重要作用。本章将着重研究恒等变形的一些方法和技巧，它是中学数学里的重要基础知识和基本技能之一。

§1 配方法

"配方"是中学数学里的一种重要的基本技能，它的实质是"恒等变形、配成方幂"。在代数里，利用配方法较简便地进行数、式运算，凑项与配方是因式分解中常用的技巧；可以推导一元二次方程的求根公式；可以借助于它利用一元二次方程根的判别式判断根的情况；也可以利用它求出二次函数图象的顶点坐标，确定函数的最大值或最小值，以及证明某些不等式和一些数学命题等。在解析几何里，利用配方法可以化简二次曲线方程，求出抛物线的顶点坐标，椭圆、双曲线的中心坐标，确定带有参数的二元二次方程中抛物线的顶点和椭圆、双曲线中心的轨迹方程，因此它是解决

一类几何问题的一种重要方法。

常用的配方有：

（1） $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

（2） $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]；$$

（3） $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$；

（4） $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$。

例 1 在复数集内因式分解

（1） $x^2+2x\sin\theta+1$；

（2） $x^4-4x^3+5x^2-4x+4$。

思考方法： 凑项与配方联合使用。

解：（1） 原式 $=x^2+2x\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=(x+\sin\theta)^2-(i\cos\theta)^2$

$=(x+\sin\theta+i\cos\theta)(x+\sin\theta-i\cos\theta)$。

(2) 原式 $=(x^4-4x^3+4x^2)+(x^2-4x+4)$

$=x^2(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4)$

$=(x-2)^2(x^2+1)$

$=(x-2)^2(x+i)(x-i)$。

例 2 设 $a^2+b^2-4a-2b+5=0$ $(a、b\in R)$。试求下列各式的值。

（1） $\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{3b-2\sqrt{a}}}$；

（2） $\left[b^{2n+1}-\left(-\frac{a}{2}\right)^{2n+1}\right]\left(-\frac{a}{2}\right)^{b-\frac{a}{2}}$.

思考方法：这是带有题设条件的计算题，比较题设与探求式的结构，题设关系较为简单，根据题设结构的特征运用配方法先确定 a 、 b 的数量，充分运用非负数的性质。

解：由题设配方得 $(a-2)^2+(b-1)^2=0$，

$\because$ a、$b\in R$，

$\therefore$ $\begin{cases} a-2=0 \\ b-1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1. \end{cases}$

（1） 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=[1^{2n+1}-(-1)^{2n+1}]\cdot(-1)^0=2$.

例3 设函数 $f(x)=(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2$，其中 a，b，c，x 均为实数，则 $f(x)\geqslant 0$，且等号成立时，a，b，c 是以 x 为公比的等比数列。

思考方法：根据题设函数的结构特征，可运用配方法与非负数的性质证明。

证明： $f(x)=(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2$

$=(a^2x^2-2abx+b^2)+(b^2x^2-2bcx+c^2)$

$=(ax-b)^2+(bx-c)^2$.

$\because$ a，b，c，x 均为实数，

$\therefore$ $f(x)\geqslant 0$.

当 $f(x)=0$ 时，得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{cases} ax-b=0 \\ bx-c=0, \end{cases} \quad 解得\ x=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}.$$

即a，b，c是以x为公比的等比数列。

例 4　以三点$O(0, 0)$，$P(a, 0)$，$Q(0, a)$为顶点作$\triangle OPQ$，把OP边n等分，过其中一个分点A作OQ的平行线交PQ于B点，当$\triangle OAQ$与$\triangle APB$的面积的和最小时，A点应取在哪个分点上？（题中$a>0$，P第为n个分点）.

解：设A是OP线段的第x个分点（$x\in N$且$x\leqslant n$），$\triangle OAQ$和$\triangle APB$的面积的和为S，则

$$S=S_{\triangle OAQ}+S_{\triangle APB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{xa}{n}\cdot a+\frac{1}{2}\left(a-\frac{xa}{n}\right)\left(a-\frac{xa}{n}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2n^2}\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{8}a^2,$$

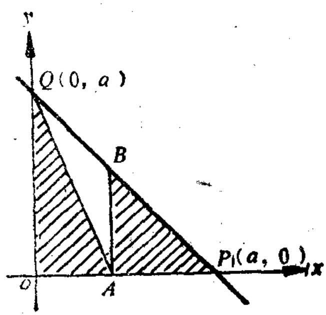

图1-1

当n为偶数时，即$x=\frac{n}{2}$时，

$$S_{最小值}=\frac{3}{8}a^2;$$

当n为奇数时，即$x=\frac{n-1}{2}$或$\frac{n+1}{2}$时，

$$S_{最小值}=\frac{(3n^2+1)a^2}{8n^2}.$$

注　解本例时可分两步：

（1） 根据题意，找出有关三角形的面积函数；

（2） 求出其面积函数的最小值。

本例$\triangle OAQ$与$\triangle APB$的面积和是关于分点序号x的二次函数，探求其最小值时，首先运用配方法将函数式恒等变形。由于分点必为整数，而当n为奇数时$\frac{n}{2}$不为整数，当x为$\frac{n-1}{2}$或$\frac{n+1}{2}$才是正整数，且都能使S取得相等的最小值，因此本例必须将n分为偶数和奇数讨论分点，学生在解答本例时，往往是不讨论分点，解题出现误漏现象，这也是本例解题的一个难点。

例 5 设A、B、C是一个三角形的三个内角，试证明

$$\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C \geqslant 1.$$

分析： 在$\triangle ABC$内，联想到关于正切的一个恒等式$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$，两边同乘以$\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$，得

$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B=1.$$

将要证的不等式中“1”代换，即证

$$\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C \geqslant \operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B,$$

用比较法，即证

$$\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C-\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}A \geqslant 0,$$

用配方法，即证

$$\frac{1}{2}[(\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B)^2+(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C)^2$$

$$+(\mathrm{ctg}C-\mathrm{ctg}A)^2]\geqslant 0。$$

而ctg$A$，ctg$B$，ctg$C$都是实数，由非负数性质可知

$$\frac{1}{2}[(\mathrm{ctg}A-\mathrm{ctg}B)^2+(\mathrm{ctg}B-\mathrm{ctg}C)^2$$

$$+(\mathrm{ctg}C-\mathrm{ctg}A)^2]\geqslant 0$$ 恒成立。

证明：（略）．

例 6 设曲线C：$mx^2+my^2-2x+m^2y+\frac{1}{8}(m^3-4m)=0$（$m$为不等于 0 的实参数）．

（1） 说明曲线C是什么图形；

（2） 求曲线C的中心的轨迹；

（3） 当$m=10^n$时，求曲线C截直线$x-y=0$所得的线段的长；

（4） 当$n\to\infty$时，求出所截得线段的总长．

解：将曲线C的方程配方，得

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{1}{m^2}+\frac{m^2}{8}+\frac{1}{2}.$$

（1） 曲线C表示圆系，其圆心为$\left(\frac{1}{m},-\frac{m}{2}\right)$，

半径为$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{m^2}{8}+\frac{1}{2}}$．

（2） 设曲线C的中心(x,y)，则

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{m}\\[2ex] y=-\dfrac{m}{2}\end{cases}.$$

消去参数m，得 $xy=-\frac{1}{2}$，即得曲线C的中心的轨迹是双曲线。

（3） 将直线方程化为$y=x$代入曲线C的方程，得

$$2mx^2+(m^2-2)x+\frac{1}{8}(m^3-4m)=0.$$

设这方程的两根为x_1、x_2，由韦达定理，得

$$x_1+x_2=\frac{2-m^2}{2m},\quad x_1\cdot x_2=\frac{m^2-4}{16}.$$

易知x_1，x_2是直线$y=x$与曲线C的交点的横坐标，令其相对应的纵坐标为y_1，y_2，因为它们满足于方程 $y=x$，所以$y_1=x_1$，$y_2=x_2$，　即得　$y_1-y_2=x_1-x_2$。

设曲线C截直线$y-x=0$所得的线段长为d，则

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{2\left[\frac{4-4m^2+m^4}{4m^2}-4\cdot\frac{m^2-4}{16}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{|m|}=\frac{\sqrt{2}}{|10^n|}=\frac{\sqrt{2}}{10^n}.$$

（4） $\because$ $\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\frac{\sqrt{2}}{10^2}$，$\frac{\sqrt{2}}{10^3}$，…是一个无穷等比数列，其首项为$\frac{\sqrt{2}}{10}$，公比为$\frac{1}{10}$，

$\therefore$ 所截得的线段的总长 $S=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

例6是一道解析几何综合题，涉及知识面较广，用到了圆的径心式方程，曲线的参数方程，消参数法，确定中心的轨迹。在探求曲线C截直线$x-y=0$所得线段长（弦长）时，用到了一元二次方程韦达定理，两点间的距离公式，数列求和公式，解题过程中两次运用了配方法，第一次是配方得出圆心坐标，从而求出圆心的轨迹；第二次是将$(x_1-x_2)^2$变形为$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，从而利用韦达定理求得弦长d。从这里我们可以发现：完全平方公式

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

与韦达定理在解析几何解题过程中往往要搭配使用。应该熟练掌握这种解题技能。

练　习　1.1

1. 因式分解：

   （1）$x^4+y^4+(x+y)^4$　（在实数集内）；

   （2）$x^2-2x\cos\theta+1$　（在复数集内）。

2. 设 $a^2+2ab+2b^2-2b+1=0$　(a、$b\in F$)，

   求 $(b^{2n+1}-a^{2n+1})a^{a+b}$的值。

3. 设 $2\lg(a+b+c)=\lg 3+\lg(a^2+b^2+c^2)$，

   则 $\log_a b=\log_b c=1$。

4. 设 $\triangle ABC$的三条边长为a，b，c，则 $\triangle ABC$为正三角形的充要条件是

   $$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

5. 设长方体的长、宽、高分别为$m(m+n)$，$n(m+n)$，mn(m、n为自然数)，则长方体的体对角线长的数量必为自然数。

6. 求函数$y=4\sin^2x+4\sin x-3$的最值。

7. 在$\triangle ABC$中，求证$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，

8. 点$P(x, y)$的坐标满足方程$x^2+y^2-6x-4y+11=0$，试求$\sqrt{x^2+(y+1)^2}$的最值。

9. 已知两圆C_1：$x^2+y^2-6y=0$，

$$C_2:\ x^2+y^2-4\sqrt{3}x-2y+12=0.$$

求证两圆C_1、C_2相外切，且x轴是这两圆的一条外公切线；并求出切点间的两弧与x轴所围图形的面积。

10. 已知函数$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$（m为实数），

（1） m是什么数值时，y的最小值是零？

（2） 求证：不论m是什么数值，函数图象（即抛物线）的顶点都在同一直线l_1上，画出$m=-1, 0, 1$时抛物线的草图，来检验这个结论。

（3） 平行于l_1的直线中，哪些与抛物线相交？哪些不相交？

求证：任一条平行于l_1而与抛物线相交的直线，被各抛物线截出的线段都相等。

§ 2 裂项法

依照某种法则排列着的一列数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

称为数列。记作$\{a_n\}$，a_n称为数列的第n项。如果a_n与n之间的函数关系可以用一个公式来表示，那末这个公式就叫做该数列的通项公式。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com