

Stochastic Signal Processing

随机信号处理

张玲华 郑宝玉 编著

Zhang Linghua Zheng Baoyu

清华大学出版社

Stochastic Signal Processing

随机信号处理

张玲华 郑宝玉 编著

Zhang Linghua Zheng Baoyu

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据国务院学位委员会编制的以同等学力申请硕士学位“信号处理”课程全国统一考试大纲,深入浅出地介绍了随机信号处理的基本理论和方法。全书共6章,第1章介绍数字信号处理基本知识;第2章和第3章介绍随机信号处理基础;第4章至第6章阐述了功率谱估计和自适应滤波。为了便于应考人员自学,也为了帮助读者更好地理解概念、熟悉解题思路、了解应用方法,书中对大纲后面所附习题均作了详细解答,并给出了适量的例题和具体应用实例。

本书不仅适用于以同等学力申请“信息与通信工程”硕士学位的人员,亦可作为相关专业研究生、攻读工程硕士学位人员或高年级本科生选修课教材,还可供有关专业教师和科技人员参考。作为教材使用,参考学时为50~60学时。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号处理/张玲华,郑宝玉编著. —北京:清华大学出版社,2003

ISBN 7-302-07113-6

I. 随… II. ①张… ②郑… III. 随机信号—信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 072280 号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客 户 服 务:010-62776969

责任编辑:陈国新

版式设计:肖 米

印 刷 者:北京嘉实印刷有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:13.25 字数:304千字

版 次:2003年9月第1版 2003年9月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-07113-6/TN·144

印 数:1~4000

定 价:20.00元

前 言

最近几年,随着我国经济的快速发展,学位与研究生教育工作也获得了突飞猛进的发展,各种类型的研究生教育模式如雨后春笋般出现。在通信与信息产业等领域,在职人员以同等学力申请硕士学位或在职攻读工程硕士学位的人数激增。然而,至今尚未见到一部满足上述需要、深度适宜的教材问世,特别是根据以同等学力申请硕士学位“信号处理”课程全国统一考试大纲(以下简称大纲)编写的教材。本书旨在填补这一空白,为“信息与通信工程”及相近学科专业高年级本科生、研究生和教师,特别是以同等学力申请硕士学位的人员,提供一部富有使用和参考价值的信号处理教材。

作者在为同等学力申请硕士学位的人员讲授信号处理的过程中深切感受到,在没有合适教材的情况下,学员们要把大纲规定的随机信号处理内容理解掌握好,决非一件轻而易举的事。考虑到本书主要是针对这类学员的,因此讲授的内容既不宜太深,又要紧扣大纲要求,还需适当介绍一些大纲中虽未提及但对核心内容却是不可或缺的基础知识(包括数学基础、数字信号处理基础和相关专业背景),并以通俗易懂的方式将这些内容有机地组织起来。基于这一思路的教案已试用6轮,深受学员欢迎,不少学员已顺利通过该学位课全国统一考试。现将讲稿整理出版,希望对学习者有所帮助,也希望对任课教师有所裨益。

本书由6章组成,除第1章为数字信号处理基础外,其他各章分为两部分:随机信号处理基础(第2,3章)和随机信号处理基本理论方法(第4~6章)。具体来说,前者介绍随机信号特征及其估计(第2章)和平稳随机过程的线性模型(第3章);后者则讲述本书的核心内容——功率谱估计(第4章)和自适应滤波(第5章)以及自适应滤波器的算子理论及其应用(第6章)。

为了便于应考人员自学,本书还对大纲后面所附习题进行了详细解答。概念题的解答包含在相关内容介绍之中,而计算题的解答则以例题的形式给出。此外,书中还补充了适量的例题和具体应用实例。所有这些都是为了帮助读者更好地理解概念,熟悉解题思路,了解应用技术。

由于时间仓促,加之作者水平有限,书中不妥和错误之处在所难免,恳望读者批评指正。

作者

2003年6月于南京邮电学院

5151084 / 17

目 录

绪论	1
第 1 章 数字信号处理基础	3
1.1 离散时间信号与系统	3
1.1.1 序列	3
1.1.2 系统的单位脉冲响应与差分方程	8
1.1.3 Z 变换与系统函数	10
1.1.4 系统的因果性、稳定性	17
1.1.5 序列傅里叶变换与系统频率响应	18
1.1.6 离散傅里叶变换(DFT)	21
1.2 数字滤波器的结构	26
1.2.1 FIR 系统与 IIR 系统	26
1.2.2 IIR 数字滤波器的结构	26
1.2.3 FIR 数字滤波器的结构	30
1.3 举例	34
第 2 章 随机信号的特征及其估计	38
2.1 随机过程基础	38
2.1.1 随机过程及其特征描述	38
2.1.2 平稳随机过程	40
2.1.3 正态过程	42
2.2 估计的质量评价	42
2.2.1 估计的偏	42
2.2.2 估计的方差	42
2.2.3 估计的均方误差与一致性	43
2.3 均值、方差、自相关函数的估计	44
2.3.1 均值的估计	44
2.3.2 方差的估计	45
2.3.3 自相关函数的估计	45
2.4 相关函数与功率谱	47
2.4.1 相关函数	47
2.4.2 随机信号的功率谱	52



2.5	白噪声过程和谐波过程	53
2.5.1	白噪声过程	53
2.5.2	谐波过程	54
第3章	平稳过程的线性模型	57
3.1	有理分式模型	57
3.2	平稳随机信号通过线性系统	58
3.2.1	平稳随机信号通过线性系统的定理	59
3.2.2	白噪声激励线性模型	61
3.3	AR模型的正则方程与参数计算	62
3.3.1	尤勒-沃克(Yule-Walker)方程	62
3.3.2	Levinson-Durbin快速递推法	66
3.3.3	预测误差格型滤波器及Burg算法	68
3.4	MA模型的正则方程与参数计算	74
3.4.1	MA模型的正则方程	74
3.4.2	用高阶AR模型近似MA模型	75
3.5	ARMA模型的正则方程与参数计算	76
3.5.1	ARMA模型的正则方程	76
3.5.2	用高阶AR模型近似ARMA模型	78
3.6	举例	79
第4章	功率谱估计	87
4.1	古典谱估计	89
4.1.1	相关法谱估计	89
4.1.2	周期图法谱估计	90
4.1.3	古典谱估计的改进	91
4.2	最大熵谱估计	95
4.3	参数模型法谱估计	96
4.3.1	原理与方法	96
4.3.2	AR模型阶的确定	96
4.3.3	AR模型参数的求解	97
4.3.4	举例	104
4.4	特征分解法谱估计	108
4.4.1	相关阵的特征分解	108
4.4.2	多信号分类法(MUSIC方法)	111
第5章	自适应滤波	113

5.1	预备知识	113
5.1.1	自适应滤波原理	113
5.1.2	自适应滤波器的组成、分类与结构	113
5.1.3	自适应滤波应用举例	116
5.2	维纳滤波器	118
5.2.1	正交性原理与维纳-霍甫夫(Wiener-Hopf)方程	119
5.2.2	维纳-霍甫夫方程求解	121
5.2.3	误差性能曲面的几何性质	125
5.2.4	举例	129
5.3	最速梯度法	133
5.3.1	权系数的迭代解	133
5.3.2	权系数的闭式解	136
5.3.3	最速梯度法的收敛条件	138
5.3.4	权系数的收敛规律	139
5.3.5	均方误差的收敛规律	143
5.4	最小均方(LMS)算法	144
5.4.1	权系数的迭代解	145
5.4.2	LMS 权系数的收敛性分析	146
5.4.3	均方误差的收敛性分析及失调量	147
5.5	梯度类算法的改进算法	150
5.5.1	牛顿法	150
5.5.2	共轭梯度法	151
5.6	递归最小二乘(RLS)算法	152
第 6 章	自适应滤波器的算子理论及其应用	158
6.1	投影阵与正交投影阵	158
6.1.1	线性向量空间	158
6.1.2	投影阵与正交投影阵	160
6.2	最小二乘更新关系	163
6.2.1	数据空间增维	163
6.2.2	投影阵时间调整关系	164
6.3	最小二乘格型(LSL)自适应算法	169
6.3.1	前向预测误差(FPE)滤波器	169
6.3.2	后向预测误差(BPE)滤波器	171
6.3.3	LS 格型结构及 LSL 自适应算法	172
6.4	快速横向滤波(FTF)自适应算法	176
6.4.1	横向滤波算子及其时间更新关系	177

VI 随机信号处理

6.4.2 N 阶横向滤波器	180
6.4.3 快速横向滤波(FTF)自适应算法	184
附录 A LSL 算法中迭代公式的推导	186
附录 B FTF 算法中迭代公式的推导	193
参考文献	204

绪论

自 20 世纪 60 年代以来,随着计算机和信息学科的飞速发展,数字信号处理(digital signal processing, DSP)技术应运而生并迅速发展,已形成一门独立的学科体系。数字信号处理的基础理论目前日臻成熟,以基础理论为依托,数字信号处理的研究正在向深度和广度发展。研究从因果、线性系统到非因果、非线性系统,从最小相位系统到非最小相位系统,从一维处理到多维处理,从单一抽样率到多速率处理。处理的信号对象从高斯信号扩展到非高斯信号,从平稳到不平稳。研究的深化促使了分支的细化,形成了诸如“自适应信号处理”、“统计信号处理”、“多维信号处理”、“模式识别”、“语音信号处理”、“图像信号处理”及“信号检测与估值”等专业课程和研究方向。

所谓“数字信号处理”,就是用数字的方法对信号进行变换和处理。通过处理,往往可以达到两个目的:

① 对信号在时域及各种变换域内的特性进行分析,以便对信号有更清楚的认识。

② 对信号实施处理,以改善其性能,比如滤波。

该课程在本科阶段主要介绍以傅里叶变换为基础的“经典”处理方法,内容主要包括:

① 离散傅里叶变换(DFT)及其快速算法(FFT)。

② 滤波理论(线性移不变离散时间系统用于分离相加性组合的信号,要求信号频谱占据不同的频段)。

③ 谱分析(分析对象包括确定性信号和平稳、高斯随机信号)。

在研究生阶段相应课程为“现代信号处理”(advanced signal processing)。信号对象主要是随机信号,主要内容是自适应滤波(用于分离相加性组合的信号,但频谱占据同一频段)和现代谱估计。另外,还有同态滤波(用于分离相乘性组合、卷积性组合的信号),以及数字信号处理的新进展:人工神经网络(artificial neural network, ANN)、模糊(fuzzy)、分形(fractal)、小波(wavelet)、混沌(chaos)、进化计算(evolutionary computation)等前沿课题。

从技术实现的观点看,所谓 DSP 就是控制单个和多个数字序列进行计算和存储的过程。数字系统对数字信号的处理是通过数据运算完成的,不是像模拟系统那样依靠元器件的物理特性来完成。因此,数字信号处理与模拟信号处理相比有十分优越的优点,主要包括:

① 精度高。模拟系统的精度是靠元器件参数的精度来支持的,与所用的材料、工艺有关,很难达到 10^{-3} 以上。而数字系统的精度是由字长来决定的。17 位字长就可达到 10^{-5} 精度。系统可以轻易地把字长加大到 32 位、64 位。很多高精度的测量和控制只有用数字系统才能实现。

② 可靠性强。只有两个电平或有限多个电平,抗干扰能力强,并且干扰不积累。

③ 系统通用性好。模拟系统参数由元件值一次固定,数字系统参数可轻易改变。比如用同一个数字系统,只要改变一下系数,既可作高通滤波,又可作低通滤波;既可处理大信号,又可处理小信号;既能产生高频,也能产生低频。特别当频率很低时,模拟电路对电容电感的要求或许已使它们的体积大到惊人的地步,而数字系统频率可低到 10^{-3} Hz。

④ 可多维处理。数字系统的一个重大特点是可以具备庞大的存储单元,因而可以将一帧或数帧的图像信号或者地震波的传播信号存储起来,进行模拟系统不能实现的二维甚至多维的处理,如二维滤波和二维谱分析等。

⑤ 可时分处理。一套系统可同时(时分复用)处理几个信号。一些基本运算环节可以循环复用,例如将一节滤波器的输出引入到它的输入,控制其循环五次,则等效于通过一个五节的滤波器。

⑥ 易用软件模拟。数字系统可用计算机精确模拟,因此可先用计算机来研究硬件系统的参数、特性,进行性能调试和质量估计,即软件仿真。事实上,软件本身也可以是数字系统的一部分,这就构成软硬件结合的系统。也可以将软件功能做成硬件,称为软件固化。这样,开发手段强,成本低,周期短。

⑦ 容易实现非线性特性。模拟器件靠物理特性产生非线性,其曲线形状不易改变和调整。数字系统可用赋予的数据方便地产生任何非线性特性。

⑧ 自诊断、自保护性能好。可以开发故障诊断软件,便于维护操作和监控管理。

⑨ 容易集成化,体积小,重量轻,耗电省。硬件参数一致且稳定,有利于硬件互换和维修。

同一切技术领域一样,数字处理也有自己的应用局限性。主要有以下几点:

① 工作速度慢。数字系统的工作受采样频率的制约,它是靠运算而不是靠物理特性完成处理的,因此它处理不了很高频率的信号。

② 电路规模大,需时间发生器、模/数(A/D)转换、数/模(D/A)转换等附属电路。一般来说,与模拟系统相比,越是复杂的系统进行数字处理的相对成本越低,而对于比较小的系统相对成本比模拟处理要高。

③ 存在量化噪声。对模拟信号进行数字处理,必定要量化。量化会产生量化噪声;另外,在运算过程中也会产生运算误差,甚至出现极限环振荡。

数字信号处理作为单独一门学科已经快 30 年了。在这期间,算法和器件,或者说软件和硬件都取得了迅速发展。目前,数字信号处理技术已广泛应用于数字通信、雷达、遥感、语言、图像处理、地球物理学、生物医学工程以及机器人等各领域,而且随着科学技术的发展,其研究范围和应用领域还在不断地发展和扩大。

第 1 章

数字信号处理基础

1.1 离散时间信号与系统

对模拟信号进行数字处理,信号必须经过模数(A/D)转换。首先通过采样将模拟信号转换成离散时间信号(时间离散、幅度连续),再通过量化将离散时间信号转换成数字信号(时间和幅度都离散)。其中采样是线性过程,量化是非线性过程。对于线性变换,已经有一套完整的、简便有效的数学分析方法,而非线性变换的描述手段却少得多,同时也复杂和不够精确。所以,研究数字信号处理的理论体系都是建立在离散时间信号与系统上的,即暂不考虑量化的影响。

1.1.1 序列

对模拟信号 $x(t)$ 进行等间隔时域采样,如果采样间隔为 T ,则该离散时间信号在模拟时间系统中表示为 $x(nT)$,而在离散时间系统中表示为序列 $x(n)$,其中,序号 n 为整型变量,第 n 项的序列值 $x(n)$ 表示信号的第 n 个样值(采样值),它是连续数值(模拟量)。例如,某离散时间信号表示为

$$x(n) = \{-3.5, -2, -1.2, 0\}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

离散时间信号用序列表示,但序列不一定代表时间序列,也可以表示频域、相关域等其他域上的一组有序数。例如后面将要学到的离散傅里叶变换序列 $X(k)$ 、自相关函数序列 $R(m)$ 等。

下面先介绍几种最常用的典型序列。

① 单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

这个序列只在 $n=0$ 处有一个单位值 1,其余点上皆为 0,因此也称为“单位采样序列”,如图 1.1 所示。这是最常用、最重要的一种序列,它与模拟信号中的单位冲激信号 $\delta(t)$ 很类似。但是, $\delta(t)$ 的脉宽为零,在 $t=0$ 处的幅度为 ∞ ,只是其积分为 1, $\delta(t)$ 是一种数学的极限,并不是现实的信号。而 $\delta(n)$ 却完全是一个现实的序列,它的脉冲幅度是 1,是一个有限值。

② 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

如图 1.2 所示。它类似于模拟的单位阶跃信号 $u(t)$, 但是 $u(n)$ 在 $n=0$ 处有确定的取值 $u(0)=1$ 。

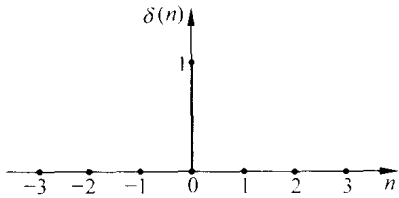


图 1.1 单位脉冲序列 $\delta(n)$

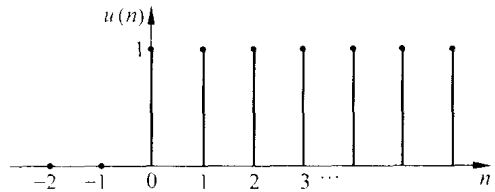


图 1.2 单位阶跃序列 $u(n)$

③ 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

它是从 $n=0$ 开始, 含有 N 个幅度为 1 的数值, 其余项都为 0, 序列的包络是一个矩形, 如图 1.3 所示。

不难看出, 以上三个序列间有以下关系:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

④ 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

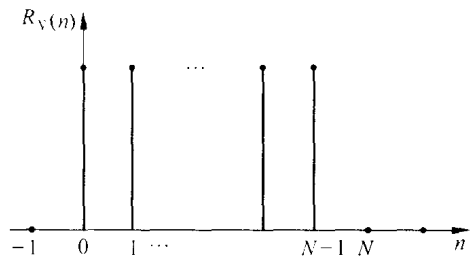


图 1.3 矩形序列 $R_N(n)$

即

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

式中 a 为实数, 当 $|a| > 1$ 时序列发散; 当 $|a| < 1$ 时序列收敛; 当 a 为负数时, 序列值正负摆动, 如图 1.4 所示。

⑤ 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma - j\omega_0)n}$$

其指数是复数(或纯虚数), 在直角坐标系中可写成

$$x(n) = e^{\sigma n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) = e^{\sigma n} \cos \omega_0 n + j e^{\sigma n} \sin \omega_0 n$$

在极坐标系中可写成

$$x(n) = |x(n)| e^{j \arg x(n)} = e^{\sigma n} e^{j \omega_0 n}$$

这里, 模 $|x(n)| = e^{\sigma n}$, 幅角 $\arg[x(n)] = \omega_0 n$ 。

⑥ 正弦序列

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \varphi) \tag{1.1.1}$$

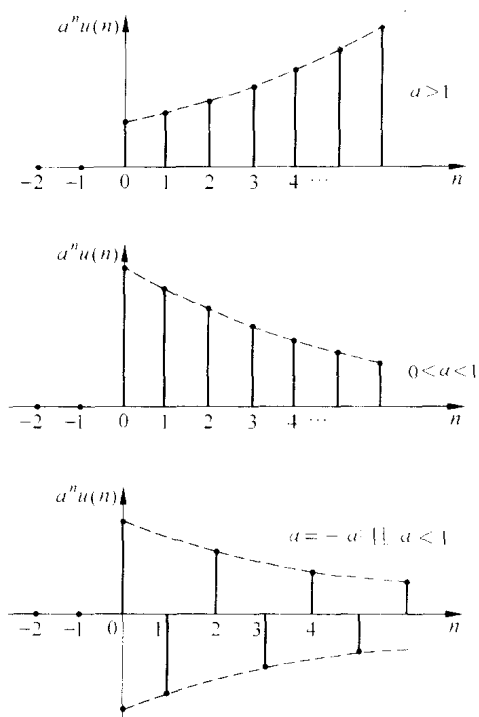


图 1.4 实指数序列

这里,幅值 A 、初相角 φ 的含义与模拟正弦信号相同; ω_0 是正弦序列的数字角频率,它与模拟正弦信号的角频率是不同的概念。模拟正弦信号的角频率单位是 rad/s ,此处 ω_0 的单位仅是 rad ,它表示相邻两个样值间弧度的变化量。正弦序列如图 1.5 所示。

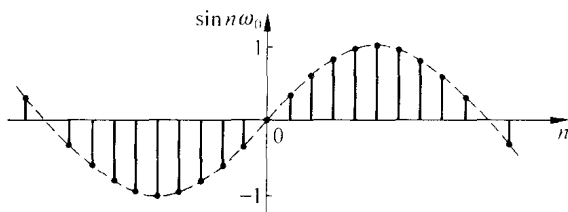


图 1.5 正弦序列

对模拟正弦信号进行采样可以得到正弦序列。例如,模拟正弦信号为

$$x(t) = A\sin(\Omega_c t + \varphi)$$

它的采样值为

$$x(n) = x(nT) = A\sin(n\Omega_c T + \varphi)$$

将上式与式(1.1.1)对照,可见

$$\omega_0 = \Omega_c T = \frac{\Omega_c}{f_s} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)表明,数字角频率 ω_0 是模拟角频率 Ω_c 对采样频率 f_s 取归一化的值。以后一律用 ω 表示数字角频率,用 Ω 表示模拟角频率。

需要指出的是,模拟周期信号的采样不一定是周期序列。一个正弦序列是周期序列必须满足条件

$$A\sin(\omega_0 n + \varphi) = A\sin[\omega_0(n + rN) + \varphi]$$

即满足 $\omega_0 rN = 2k\pi$ 或 $\frac{\omega_0}{\pi} = \frac{2k}{rN}$ 。式中 k, r 和 N 都是整数,所以 $\frac{2k}{rN}$ 是有理数。即当 $\frac{\omega_0}{\pi}$ 为有理数时,正弦序列才可能是周期的。

最后,讨论一种任意序列的单位脉冲表示法,这种表示对分析线性系统很有用。设某序列 $x(n]$ 如图 1.6 所示,则该序列可以表示为

$$x(n) = a_{-4}\delta(n+4) + a_{-2}\delta(n+2) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

即表示为单位脉冲序列的移位加权,权值就是序列在相应位置的序列值。不失一般性,用 $x(m)$ 表示序号为 m 时序列的值,则序列 $x(n)$ 可以表示为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1.3)$$

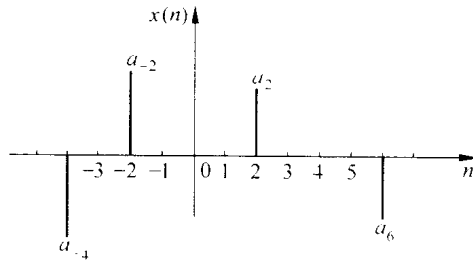


图 1.6 序列 $x(n]$

在数字信号处理中,对信号的处理是通过序列之间的相互运算完成的。下面简要介绍处理中经常涉及到的运算。

① 序列的相加与相乘

序列 $x_1(n]$ 和 $x_2(n]$ 相加,是将它们的各个对应项分别相加,即

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

序列 $x_1(n]$ 和 $x_2(n]$ 相乘,是将它们的各个对应项分别相乘,即

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$

如果序列与常数 C 相乘,是将序列的各项分别乘以常数 C ,即

$$y(n) = Cx(n)$$

② 序列的移位

如果

$$y(n) = x(n-m)$$

那么, $y(n]$ 是整个 $x(n]$ 在时间轴上右移 m 个采样周期所得的新序列。如果

$$y(n) = x(n+m)$$

那么, $y(n]$ 是整个 $x(n]$ 在时间轴上左移 m 个采样周期所得的新序列。

③ 序列的线性卷积

序列 $x(n]$ 、 $y(n]$ 的线性卷积定义为

$$w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) \quad (1.1.4)$$

如果序列 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的长度分别为 M 、 N ，则上式中 $x(m)$ 的非零区间为

$$0 \leq m \leq M-1$$

$y(n-m)$ 的非零区间为

$$0 \leq n-m \leq N-1$$

$w(n)$ 的非零区间应是使 $x(m)$ 和 $y(n-m)$ 同时不为零的 n 的取值范围，也就是使上面两式同时成立的 n ，应为

$$0 \leq n \leq M+N-2 \quad (1.1.5)$$

即长度为 $M+N-1$ 。显然，如果两序列中有一个是无限长序列，则卷积结果就是无限长序列。

根据线性卷积的定义式(1.1.4)可以看出，式(1.1.3)表示的是线性卷积运算，即

$$x(n) = x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1.6)$$

也就是说，任意序列与单位脉冲序列的线性卷积等于它本身。

线性卷积运算具有交换律和结合律，即

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

$$y(n) * [x_1(n) + x_2(n)] = y(n) * x_1(n) + y(n) * x_2(n)$$

按照线性卷积的定义式(1.1.4)，线性卷积的运算分四个步骤：翻褶、移位、相乘、相加。

例如，已知序列

$$x(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$y(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

求 $w(n) = x(n) * y(n)$ 。

解 $w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$

可以将运算过程列成表格如下：

m	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...	$w(n)$
$x(m)$					3	2	1					
$y(m)$					2	1	1					
$y(-m)$			1	1	2							$w(0) = 2 \times 3 = 6$
$y(1-m)$				1	1	2						$w(1) = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$
$y(2-m)$					1	1	2					$w(2) = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 7$
$y(3-m)$						1	1	2				$w(3) = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$
$y(4-m)$							1	1	2			$w(4) = 1 \times 1 = 1$
$y(5-m)$								1	1	2		$w(5) = 0$

这里, $y(-m)$ 是将 $y(m)$ 以 $m=0$ 为轴翻转, 称为翻褶。 $y(1-m)$ 是将 $y(-m)$ 向右平移一位, $y(2-m)$ 是将 $y(1-m)$ 再右移一位, 如此类推。例中两序列长度都是 3, 卷积后总长度应是 $L=3+3-1=5$ 。从表中可以看出, 从 $w(5)$ 开始, 卷积结果总是为零。所以两序列的卷积为

$$w(n) = 6\delta(n) + 7\delta(n-1) + 7\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + \delta(n-4)$$

或表示为

$$w(n) = \{6, 7, 7, 3, 1\}, \quad 0 \leq n \leq 4$$

1.1.2 系统的单位脉冲响应与差分方程

一个离散时间系统, 它的输入是一个序列, 输出也是一个序列。因此, 它的本质是将输入序列转变为输出序列的一种运算。所以, 一个离散时间系统可以用图 1.7 来表示, 图中的 $T[\cdot]$ 用来表示这个运算关系, 即

$$y(n) = T[x(n)]$$

离散时间系统中最常用的是线性、移不变离散时间系统。下面对线性和移不变的概念作简单介绍, 并讨论线性移不变离散时间系统的时域描述。

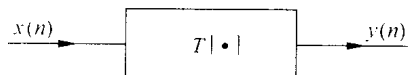


图 1.7 离散时间系统

1. 线性系统

一个离散时间系统, 如果在输入为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 时的输出分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么系统在输入为 $ax_1(n) + bx_2(n)$ 的情况下的输出就是 $ay_1(n) + by_2(n)$, 这样的系统是线性系统, 亦即线性系统满足叠加性和齐次性, 可以表示为

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= T[ax_1(n)] + T[bx_2(n)] \\ &= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

2. 移不变系统

一个离散时间系统, 如果系统的运算关系 $T[\cdot]$ 不随时间变化, 则系统称为移不变系统或时不变系统。也就是说, 如果 $T[x(n)] = y(n)$, 那么对任意整数 n_0 有

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

可以看出, 对移不变系统, 系统的输出序列随输入序列的移位而移位, 但形状不变。

既满足线性, 又满足移不变条件的系统是线性移不变(LSI)或线性时不变(LTI)系统。这是一种最常用、也最易于进行理论分析的系统。在后面的讨论中, 如不另加说明, 所指的都是线性移不变离散时间系统。

3. 系统的单位脉冲响应

线性移不变离散时间系统可以用系统的单位脉冲响应来描述。单位脉冲响应是系统

在单位脉冲序列 $\delta(n)$ 激励下的响应,用 $h(n)$ 表示,即

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

由单位脉冲响应 $h(n)$,可以求出系统在任意输入时的输出。因为任何输入序列都可以表示为单位脉冲序列的移位加权和(式(1.1.3)),即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

当输入为 $x(n)$ 时系统的输出为

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

因为系统是线性的,所以

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T[x(m)\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] \quad (1.1.7)$$

因为系统是移不变的,所以

$$T[\delta(n-m)] = h(n-m)$$

上式代入式(1.1.7),得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1.1.8)$$

式(1.1.8)表明,线性移不变离散时间系统的输出,等于输入序列与系统单位脉冲响应的线性卷积。

4. 系统的差分方程

除了系统的单位脉冲响应 $h(n)$,线性移不变离散时间系统还可以用常系数线性差分方程来描述,其一般形式为

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) + \sum_{i=0}^N a_i y(n-i) \quad (1.1.9)$$

所谓常系数,是指系数 b_i 和 a_i 是与序号 n 无关的常数,这正是“移不变”特性的体现。所谓线性,是指 $x(n-i)$ 、 $y(n-i)$ 各项均是一次项,没有高次项,也不存在它们的相乘项,符合系统的线性特性。

差分方程可以看成是一个递推公式,结合初始条件可以递推求出系统在给定输入下的瞬态解。初始条件反映了系统的初始状态。如果系统不是零状态,那么即使没有输入,系统也会有输出,这就是系统的零输入响应,是由系统的初始储能所产生的响应。假设系统为零状态,也就是系统初始不储能,那么系统在输入激励下的输出就是零状态响应。系统的完全响应由零输入响应和零状态响应两部分组成。下面以最简单的一阶差分方程为例来求系统的瞬态解。

例 1.1 已知一阶差分方程为

$$y(n) = 1.5x(n) + 0.5y(n-1) \quad (1.1.10)$$

初始条件为

$$y(n) = 0, \quad \text{当 } n < 0 \text{ 时}$$

求该系统在输入为 $\delta(n)$ 时的瞬态解。