

杨凤翔 段炎伏

新编高等数学

兰州大学出版社

第二册



新编高等数学

第二册

杨凤翔 段炎伏



兰州大学出版社

1989·兰州

内 容 提 要

本册主要讲矢量与空间解析几何、多元函数微分法及应用、多元函数的积分学及应用、场论及场的分类、微分方程。适合于非数学专业本科生使用，也可作为工程技术人员的参考书。

新 编 高 等 数 学

第 二 册

杨凤翔 段炎伏

兰州大学出版社出版

(兰州大学校内)

甘肃省静宁县印刷厂印刷 甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米 1/32 印张：25

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

字数：646千字 印数：1—7000册

ISBN 7-311-00273-7/0·42 定价：6.00元

目 录

第二册

第五章 向量与空间解析几何	(1)
§ 1 空间直角坐标系	(1)
(一) 空间直角坐标系的建立, 点的坐标	(1)
(二) 基本公式和空间方向的确定	(4)
1 两点间的距离公式	(4)
2 线段的定比分点公式	(5)
3 空间方向的确定	(8)
§ 2 向量及向量的代数运算	(11)
(一) 向量的概念	(11)
1 向量的图示法	(11)
2 向量的模	(12)
3 单位向量	(12)
4 向量的种类	(13)
(二) 向量的加减运算, 向量与数的乘积运算	(13)
1 向量的加法 (几何加)	(13)
2 向量与数量 (标量) 的乘法	(16)
3 向量的线性组合、共面向量	(17)
4 向量的减法 (几何减)	(21)
(三) 向量的分解与向量在轴上的投影	(22)
1 向量的分解	(22)
2 向量在直角坐标系中的分量	(22)
3 向量合成的解析法与向量在轴上的投影	(24)
(四) 向量的坐标表示	(27)
(五) 向量的标积	(30)

(六) 矢量的矢积·····	(33)
1 矢积的定义和性质·····	(33)
2 矢积的分量表示法·····	(36)
(七) 矢量的混合积·····	(39)
1 混合积的定义及性质·····	(39)
2 混合积的分量表示·····	(42)
(八) 矢量的二重矢积·····	(44)
(九) 矢量不变性原理·····	(45)
(十) 极矢量与轴矢量·····	(46)
§ 3 变矢及变矢的简单微分与积分计算·····	(51)
(一) 矢性函数(变矢)及变矢的极限与连续·····	(51)
1 矢性函数的概念·····	(51)
2 矢量曲线·····	(52)
3 单变矢性函数的极限和连续性·····	(58)
(二) 单变矢性函数的导数(导矢)·····	(59)
1 单变矢性函数导数的概念·····	(59)
2 矢性函数导数的公式·····	(61)
3 导矢在力学中的应用·····	(62)
(三) 矢性函数的微分·····	(67)
(四) 单变矢性函数的积分·····	(68)
§ 4 平面的方程·····	(81)
(一) 平面的点法式方程·····	(82)
(二) 平面的一般式方程·····	(83)
(三) 平面的参数方程·····	(84)
(四) 平面其它形式方程·····	(85)
1 平面的三点式方程·····	(85)
2 平面的截距式方程·····	(86)
3 平面的法式方程·····	(87)
(五) 点到平面的距离·····	(87)

(六) 两平面的位置关系	(88)
1 两平面平行的充要条件	(88)
2 两平面相交的充要条件	(89)
3 两平面的交角	(89)
§ 5 直线的方程	(92)
(一) 直线的点向式方程和参数方程	(92)
(二) 直线的一般方程	(94)
(三) 两直线的夹角	(96)
(四) 直线和平面的相关位置	(98)
1 直线和平面平行的充要条件	(98)
2 直线和平面相交的充要条件、交角	(98)
§ 6 二次曲面	(118)
(一) 旋转曲面	(118)
(二) 椭球面	(120)
(三) 单叶双曲面	(121)
(四) 双叶双曲面	(123)
(五) 椭圆抛物面	(124)
(六) 双曲抛物面	(125)
(七) 锥面	(127)
(八) 柱面	(129)
§ 7 空间曲线	(132)
(一) 空间曲线作为两曲面的交线	(132)
(二) 空间曲线在坐标面上的投影	(134)
(三) 空间曲线的参数方程	(136)
第六章 多元函数微分法及其应用	(143)
§ 1 多元(多变数)函数概念, 定义域	(143)
(一) 二元函数及其定义域, 点函数	(143)
(二) 二元函数的几何意义, 等值(高)线	(153)
§ 2 二元(二变数)函数的极限和连续	(156)

§ 3	偏导数和全微分	(167)
	(一) 偏导数与偏微分	(167)
	(二) 高阶偏导数(或偏微商)	(173)
	(三) 二元函数偏导数的几何意义	(175)
	(四) 全微分存在	(177)
	(五) 切平面及其存在的条件	(187)
	(六) 全微分在近似计算中的应用	(190)
	(七) 估计函数值的误差	(192)
§ 4	方向导数、梯度	(205)
	(一) 方向导数概念及计算公式	(205)
	(二) 梯度及其性质	(210)
§ 5	二元函数的微分法	(215)
	(一) 复合函数微分法	(215)
	(二) 隐函数的微分法	(222)
§ 6	空间曲线的切线、法平面, 曲面的切平面、法线	(256)
	(一) 空间曲线的切线与法平面	(256)
	(二) 曲面的切平面与法线	(257)
§ 7	泰勒定理	(274)
§ 8	二元函数的极值	(279)
§ 9	条件极值问题	(295)
	第七章 多元函数的积分学	(321)
§ 1	多元函数的几种类型积分概念的引入, 积分的简单性质	(322)
	(一) 几种积分的引入	(322)
	(二) 几种积分的统一	(329)
	(三) 积分的性质	(330)
§ 2	二重积分	(331)
	(一) 二重积分的概念及其性质	(331)

(二) 二重积分的意义	337
1 几何意义	337
2 薄板的质量	338
(三) 二重积分的计算	339
1 二重积分在直角坐标系下的累次积分公式	339
2 二重积分的变量变换公式	363
(四) 广义二重积分	383
(五) 曲面面积的计算与一型曲面积分	390
1 曲面面积	390
2 一型曲面积分	399
§ 3 三重积分	410
(一) 三重积分的概念	410
(二) 在直角坐标系中三重积分的计算	412
(三) 柱坐标与球坐标	421
(四) 三重积分的变量替换公式	423
1 变换为柱坐标	424
2 变换为球坐标	425
(五) 三重积分在静力学中的应用	438
1 质量	438
2 重心	438
3 转动惯量	440
§ 4 曲线积分	474
(一) 第一型(对弧长)的曲线积分	474
(二) 第二型(对坐标)的曲线积分	477
§ 5 格林公式、曲线积分与积分路径无关的条件	493
§ 6 第二型曲面积分(通量), 奥-高公式与斯托克斯公式	522
(一) 曲面积分(二型)的概念, 计算公式	522

(二) 曲面积分与三重积分的关系, 奥-高公 式.....	(542)
(三) 曲线积分与曲面积分的关系, 斯托克斯公 式.....	(564)
(四) 通量为正、为负、为零的物理意义.....	(578)
§ 7 含参变量的定积分.....	(580)
第八章 场论及场的分类	(621)
§ 1 数量场的梯度场.....	(622)
(一) 数量场的等值面.....	(622)
(二) 数量场中的方向导数.....	(624)
(三) 数量场的梯度场是矢量场.....	(626)
§ 2 矢量场的散度, 管量场.....	(637)
(一) 矢量场的矢量曲线.....	(637)
(二) 矢量场的通量, 散度.....	(640)
1 通量.....	(640)
2 矢量场的散度, 矢量场的散度场是数量场.....	(641)
(三) 矢量场中的高斯定理、管量场.....	(644)
1 高斯定理.....	(644)
2 积分曲面变形问题.....	(651)
3 管量场.....	(652)
§ 3 矢量场的旋度, 有势场.....	(653)
(一) 二维矢量场的旋度.....	(654)
1 环流.....	(654)
2 二维矢量场的旋度, 矢量场中的格林定理.....	(657)
3 二维矢量场的旋度的命名.....	(659)
4 无旋矢量场 $\vec{f}(M)$ 的势.....	(662)
(二) 三维矢量场的旋度.....	(665)
(三) 矢量场中的斯托克斯定理.....	(668)
(四) 积分曲线变形问题、无旋场的势.....	(669)

(五) 矢量势, 旋度场是管量场.....	(674)
§ 4 算子 Δ 及调和场.....	(686)
* 附录.....	(687)
第九章 微分方程	(708)
§ 1 一阶常微分方程的其它可积类型.....	(708)
(一) 全微分方程 积分因子.....	(708)
(二) 隐式方程.....	(715)
1 不显含 y 的情形.....	(715)
2 不显含 x 的情形.....	(716)
3 易解出 y 的情形.....	(717)
4 易解出 x 的情形.....	(719)
§ 2 一阶常微分方程解的存在唯一性及其它解法...	(721)
(一) 解的存在唯一性定理.....	(721)
(二) 逐次逼近法.....	(727)
(三) 数值解法.....	(729)
§ 3 二阶变系数常微分方程的幂级数解法.....	(734)
(一) 幂级数解法及例.....	(734)
(二) 广义幂级数解法及例.....	(738)
§ 4 常微分方程组.....	(742)
(一) 方程组概说.....	(742)
(二) 方程组的初等积分法.....	(744)
(三) 常微分方程组与一阶线性偏微分方程的关系	(753)
(四) 线性方程组的基本理论.....	(757)
(五) 常系数线性方程组.....	(761)
§ 5 拉普拉斯变换及其在求解常系数线性微分方程 (组)中的应用.....	(771)
(一) 基本概念及理论.....	(772)
(二) 应用举例.....	(783)

第五章 矢量与空间解析几何

空间解析几何是运用代数方法研究空间图形的一门科学。用代数方法研究几何图形，主要有坐标法和矢量法。本章的开头先介绍这两种方法，然后把这两种方法结合起来研究一些空间几何图形的性质、形状，主要研究常用的二次曲面及有关空间直线与曲线的问题。

§ 1 空间直角坐标系

为了介绍坐标法，首先在空间建立直角坐标系，使空间的点与有序三数组 (x, y, z) 建立一一对应关系，以引入空间点的坐标的概念。

(一) 空间直角坐标系的建立，点的坐标。

在空间任取一点 O ，过点 O 作三条两两互相垂直的直线，并分别选取它们的正向 Ox 、 Oy 、 Oz 和单位长度（如图 5.1）。

1. 空间直角坐标系 $Oxyz$

点 O 称为坐标原点。直线 Ox 、 Oy 、 Oz 称为坐标轴。每两条坐标轴确定的平面 xOy 、 yOz 、 zOx 称为坐标平面。显然，三个坐标平面两两互相垂直。并且， Ox 轴垂直于 yOz 面， Oy 轴垂直于 zOx 面， Oz 轴垂直于 xOy 面。这样构成的坐标系称为空间直角坐标系，记为 $Oxyz$ 。

如果 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴的顺序分别和右手的拇指、食指、中指展开时的顺序一致，则称此坐标系为右手系。和左手一致时称为左手系。今后，我们都取空间直角坐标系为右手系。物

理学中有时也取左手系，但要特殊声明。

2. 空间点的坐标 $P(x, y, z)$

设 P 为空间任意一点，过 P 作平行于坐标面 yOz , zOx , xOy 的三个平面，分别交坐标轴 Ox 、 Oy 、 Oz 于点 A , B , C 。设 OA , AB , OC 的代数长分别为 x 、 y 、 z ，这样就得到唯一确定的有序实数组 (x, y, z) 与点 P 相对应（如图5.2）。

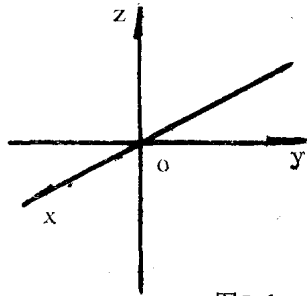


图5.1

反之，任意给出一组有序实数 (x, y, z) ，就可以在 Ox 、 Oy 、 Oz 轴上确定三个点 A 、 B 、 C ，使 OA 、 OB 、 OC 的代数长分别为 x 、 y 、 z 。经过点 A 、 B 、 C 分别作平行于坐标面 yOz , zOx , xOy 的三个平面相交于一点 P ，这样就得到空间唯一确定的一点 P 与有序实数组 (x, y, z) 相对应。

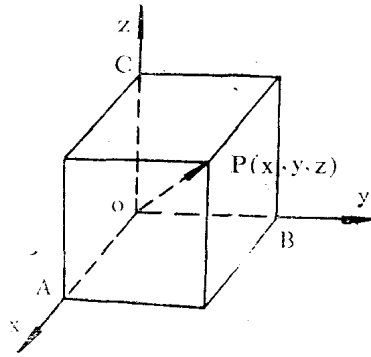


图5.2

至此，空间的所有点和全体有序实数组 (x, y, z) 间建立了一一对应关系。我们把点 P 所对应的有序实数组 (x, y, z) 叫做点 P 的坐标，写成 $P(x, y, z)$ 。图5.3所示的就是点 $P(4, 8, 6)$ 的描绘法。

特别的，对于坐标面 xOy 上的任意点有 $z=0$ ，记为 $(x, y, 0)$ ；坐标面 yOz 上的任意点有 $x=0$ ，记为 $(0, y, z)$ ；坐标面 zOx 上的任意点有 $y=0$ ，记为 $(x, 0, z)$ 。

对于 Ox 轴上的点有 $y=0, z=0$ ，记为 $(x, 0, 0)$ ； Oy 轴上的点有 $z=0, x=0$ ，记为 $(0, y, 0)$ ； oz 轴上的

点有 $x = 0, y = 0,$
 记为 $(0, 0, z)$ 。
 原点 O 的坐标为 $x = 0,$
 $y = 0, z = 0,$ 记为
 $O(0, 0, 0)$ 。

3. 卦限和对称点。

三个坐标平面把空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，用大写罗马数字 I - VIII 表示 (如图 5.4)。

八个卦限内的点 (除去坐标面上的点外) 的坐标的正负符号如下 I (+, +, +),

II (-, +, +),

III (-, -, +), IV (+, -, +), V (+, +, -), VI (-, +, -), VII (-, -, -), VIII (+, -, -)。由点的坐标的正负符号很容易确定点所在的卦限。例如 $P(-1, 2, -7)$ 在第 VII 卦限; $P(4, -2, -3)$ 在第 VIII 卦限。

设 $P(x, y, z)$ 为空间一点, 显然, P 关于坐标原点的对称点为 $P'(-x, -y, -z)$; 关于 xOy 坐标面的对称点为 P''

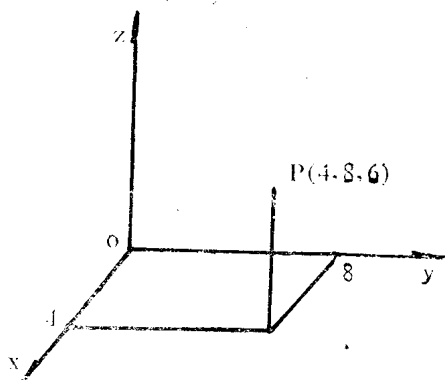


图 5.3

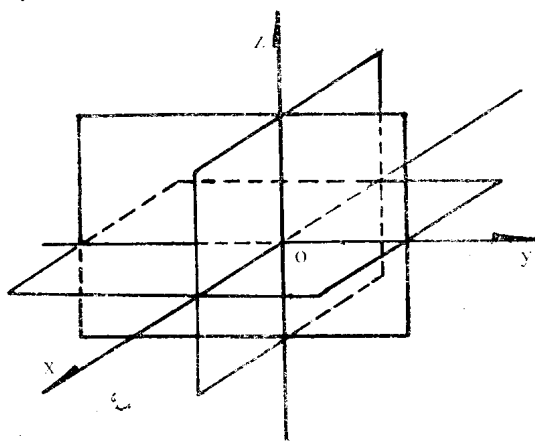


图 5.4

$(x, y, -z)$; 关于 x 轴的对称点为 $\overline{P}(x, -y, -z)$ 。同样可写出 P 关于其它坐标面和坐标轴的对称点。

(二)基本公式和空间方向的确定

1. 两点间的距离公式

求两点间的距离是几何学中最基本的问题之一，利用距离公式可以研究图形的许多性质。

在空间直角坐标系下，已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，我们来求这两点间的距离。

过 P_1 作三个平面分别平行于三个坐标面，和 ox 轴， oy ， oz 轴依次交于点 $A_1(x_1, 0, 0)$ ， $B_1(0, y_1, 0)$ ， $C_1(0, 0, z_1)$ ，再过 P_2 作三个平面分别平行于三个坐标平面和坐标轴依次交于点 $A_2(x_2, 0, 0)$ ， $B_2(0, y_2, 0)$ ， $C_2(0, 0, z_2)$ ，这六个平面构成一个长方体（如图5.5），长方体的三条棱长 a 、 b 、 c 分别为：

$a = |A_1A_2| = |x_2 - x_1|$ ， $b = |B_1B_2| = |y_2 - y_1|$ ， $c = |C_1C_2| = |z_2 - z_1|$ ，利用勾股定理可得此长方体的对角线 P_1P_2 长的平方为：

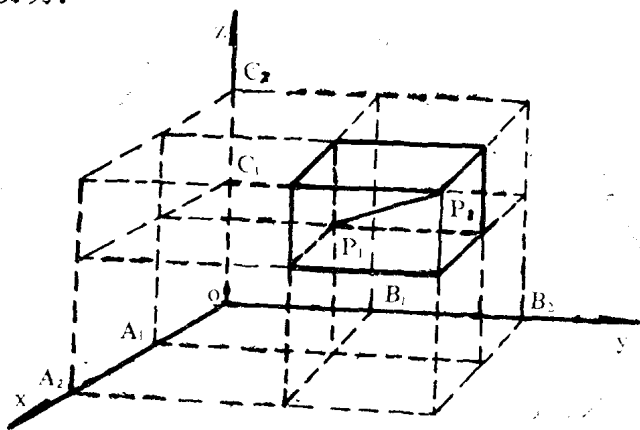


图5.5

$|P_1P_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ 两端开平方即得:

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.1)$$

这就是空间两点间的距离公式。它是平面上两点间距离公式的推广，以后简记成 $\rho(P_1, P_2)$ 。

特殊的，若 P_1 为原点，即 $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ ，设 P_2 的坐标为 (x, y, z) ，则有

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

利用两点间距离公式，还可求空间任意一点到各坐标轴和各坐标面的距离。

例 由 $P(x, y, z)$ 向 x 轴作垂线，则垂足的坐标为 $(x, 0, 0)$ ，从而 P 至 x 轴的距离为：

$$d = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

由 $P(x, y, z)$ 向 $yo z$ 平面作垂线，则垂足的坐标为 $(0, y, z)$ ，从而 P 至 $yo z$ 平面的距离：

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

同样可求出点 P 到其它坐标轴和坐标面的距离。

例 1 在 oz 轴上求与点 $A(-2, 5, 3)$ 和 $B(3, 2, -1)$ 等距离的点。

解 设所求点为 $P(0, 0, z)$ ，由 $|PA| = |PB|$ 可得：

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-2-0)^2 + (5-0)^2 + (3-z)^2} \\ & = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (-1-z)^2} \end{aligned}$$

解得 $z = 3$ ，故所求点为 $P(0, 0, 3)$ 。

2. 线段的定比分点公式

已知线段 $\overline{P_1P_2}$ 两端点分别为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，现要在线段 $\overline{P_1P_2}$ 上求一点 P ，分线段成两部分使其代

数长的定比为 λ ，即 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$ 。可以看出：当 λ 为正值时，点 P

为线段 P_1P_2 的内分点,当 λ 为负值时,点 P 为线段 P_1P_2 的外分点,且显然 $\lambda \neq -1$ 。

设点 P 的坐标为 (x, y, z) ,过 P_1 、 P_2 和 P 分别作平面平行于 zox 面,交 oy 轴于点 B_1 、 B_2 和 B (如图5.6)。

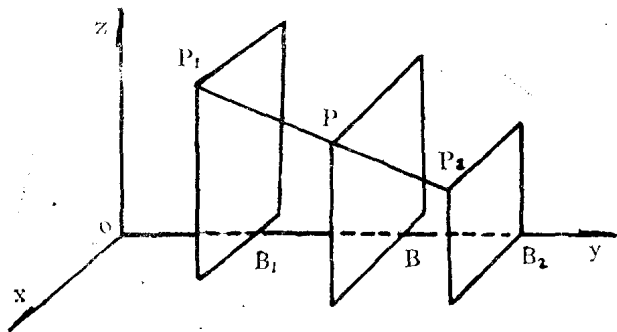


图5.6

因两直线被平行平面截得的线段成比例,

$$\text{有} \quad \frac{B_1B}{BB_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$$

$$\text{而} \quad B_1B = y - y_1 \quad BB_2 = y_2 - y$$

$$\text{即得:} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

$$\text{解之, 得} \quad y - y_1 = \lambda (y_2 - y)$$

$$(1 + \lambda) y = y_1 + \lambda y_2$$

$$\text{因为} \lambda \neq -1, \text{ 所以} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$\text{同理可得} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$\text{与} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

(1.3)

于是点 P 的坐标为 $P \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$

特别的, 当 $\lambda = 1$ 时, P 是线段的中点, 其坐标为:

$$x = \frac{y_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (1.4)$$

显然, 公式 (1.3)、(1.4) 分别是平面上线段定比分点的坐标和中点的坐标的公式推广。

例 2 在一线段的端点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别放置两个质量为 m_1, m_2 的质点, 求该质点系的重心坐标。

解 设这个质量点系的重心为 $G(x, y, z)$, 由物理学知, 点 G 在线段 A_1A_2 上, 且分 A_1A_2 成两线段, 其代数长的比为 $m_1 : m_2$ 。

$$\text{即: } \lambda = \frac{A_1G}{GA_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

由公式 (1.3) 得:

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

同理得:

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \quad z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

依此推广: n 个质量点系的重心坐标为:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

例 3 已知两点 $P_1(2, 3, -5)$ 和 $P_2(-1, 2, -8)$, 求直线 P_1P_2 与坐标平面 yOz 交点 P 的坐标。

解 因为交点 P 在 yOz 面上, 设它的坐标为 $(0, y, z)$ 。设 P 点分线段 P_1P_2 成两部分, 其代数长的比为 λ , 即

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$$