杨凤翔　段炎伏

新编高等数学

兰 州 大 学 出 版 社

第 二 册

新编高等数学

第二册

杨凤翔　段炎伏

兰州大学出版社

1989·兰州

内 容 提 要

本册主要讲矢量与空间解析几何、多元函数微分法及应用、多元函数的积分学及应用、场论及场的分类、微分方程。适合于非数学专业本科生使用，也可作为工程技术人员的参考书。

新编高等数学

第二册

杨凤翔　段炎伏

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃省静宁县印刷厂印刷　　甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米 1/32　　印张：25

1989年12月第1版　　1989年12月第1次印刷

字数：646 千字　　印数：1—7000册

ISBN 7-311-00273-7/O·42　　定价：6.00元

目　　录

第二册

第五章　矢量与空间解析几何

空间解析几何是运用代数方法研究空间图形的一门科学。用代数方法研究几何图形，主要有坐标法和矢量法。本章的开头先介绍这两种方法，然后把这两种方法结合起来研究一些空间几何图形的性质、形状，主要研究常用的二次曲面及有关空间直线与曲线的问题。

§1　空间直角坐标系

为了介绍坐标法，首先在空间建立直角坐标系，使空间的点与有序三数组（x、y、z）建立一一对应关系，以引入空间点的坐标的概念。

（一）空间直角坐标系的建立，点的坐标。

在空间任取一点O，过点O作三条两两互相垂直的直线，并分别选取它们的正向Ox、Oy、Oz和单位长度（如图5.1）。

1．空间直角坐标系$Oxyz$

点O称为坐标原点。直线Ox，Oy，Oz称为坐标轴。每两条坐标轴确定的平面xOy，yOz，zOx称为坐标平面。显然，三个坐标平面两两互相垂直。并且，Ox轴垂直于yOz面，Oy轴垂直于zOx面，Oz轴垂直于xOy面。这样构成的坐标系称为空间直角坐标系，记为$Oxyz$。

如果Ox轴、Oy轴、Oz轴的顺序分别和右手的拇指、食指、中指展开时的顺序一致，则称此坐标系为右手系。和左手一致时称为左手系。今后，我们都取空间直角坐标系为右手系。物

理学中有时也取左手系，但要特殊声明。

2. 空间点的坐标$P(x,y,z)$

设P为空间任意一点，过P作平行于坐标面yOz, zOx, xOy的三个平面，分别交坐标轴Ox、Oy、Oz于点A，B，C。设OA，AB，OC的代数长分别为x、y、z，这样就得到唯一确定的有序实数组（x，y，z）与点P相对应（如图5.2）。

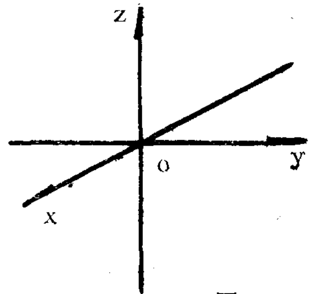

图5.1

反之，任意给定一组有序实数（x，y，z），就可以在Ox、Oy、Oz轴上确定三个点A、B、C，使OA、OB、OC的代数长分别为x、y、z。经过点A、B、C分别作平行于坐标面yOz，zOx，xOy的三个平面相交于一点P，这样就得到空间唯一确定的一点P与有序实数组（x，y，z）相对应。

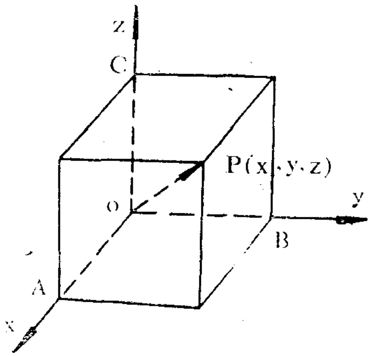

图5.2

至此，空间的所有点和全体有序实数组（x，y，z）间建立了一一对应关系。我们把点P所对应的有序实数组（x，y，z）叫做点P的坐标，写成P（x，y，z）。图5.3所示的就是点P（4，8，6）的描绘法。

特别的，对于坐标面xOy上的任意点有$z=0$，记为（x,y,0）；坐标面yOz上的任意点有$x=0$，记为（0，y，z）；坐标面zOx上的任意点有$y=0$，记为（x，0，z）。

对于Ox轴上的点有$y=0$，$z=0$，记为（x，0，0）；Oy轴上的点有$z=0$，$x=0$，记为（0，y，0）；oz轴上的

点有$x=0$，$y=0$，记为（0，0，z）。原点O的坐标为$x=0$，$y=0$，$z=0$，记为O（0，0，0）。

3．卦限和对称点。

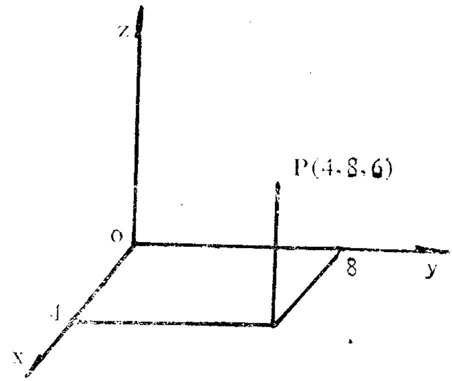

图5.3

三个坐标平面把空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，用大写罗马数字Ⅰ-Ⅷ表示（如图5.4）。

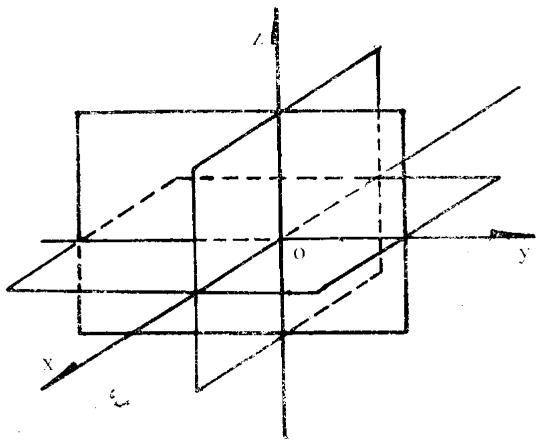

图5.4

八个卦限内的点（除去坐标面上的点外）的坐标的正负符号如下Ⅰ（+，+，+），Ⅱ（－，+，+），Ⅲ（－，－，+），Ⅳ（+，－，+），Ⅴ（+，+，－），Ⅵ（－，+，－），Ⅶ（－，－，－），Ⅷ（+，－，－）。由点的坐标的正负符号很容易确定点所在的卦限。例如P（－1，2，－7）在第Ⅵ卦限；P（4，－2，－3）在第Ⅷ卦限。

设P（x，y，z）为空间一点，显然，P关于坐标原点的对称点为P'（$-x$，$-y$，$-z$）；关于xoy坐标面的对称点为P''

$(x, y, -z)$；关于x轴的对称点为$\overline{P}(x, -y, -z)$。同样可写出P关于其它坐标面和坐标轴的对称点。

(二)基本公式和空间方向的确定

1．两点间的距离公式

求两点间的距离是几何学中最基本的问题之一，利用距离公式可以研究图形的许多性质。

在空间直角坐标系下，已知两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，我们来求这两点间的距离。

过P_1作三个平面分别平行于三个坐标面，和ox轴，oy，oz轴依次交于点$A_1(x_1, 0, 0)$，$B_1(0, y_1, 0)$，$C_1(0, 0, z_1)$，再过P_2作三个平面分别平行于三个坐标平面和坐标轴依次交于点$A_2(x_2, 0, 0)$，$B_2(0, y_2, 0)$，$C_2(0, 0, z_2)$，这六个平面构成一个长方体（如图5.5），长方体的三条棱长a、b、c分别为：

$a=|A_1A_2|=|x_2-x_1|$，　$b=|B_1B_2|=|y_2-y_1|$，　$c=|C_1C_2|=|z_2-z_1|$，利用勾股定理可得此长方体的对角线P_1P_2长的平方为：

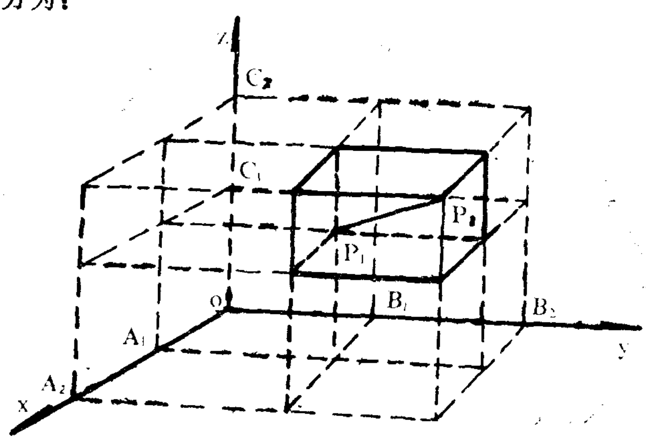

图5.5

$|P_1P_2|^2=a^2+b^2+c^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$两端开平方即得：

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.1}$$

这就是空间两点间的距离公式。它是平面上两点间距离公式的推广，以后简记成$\rho(P_1, P_2)$。

特殊的，若P_1为原点，即$x_1=y_1=z_1=0$，设P_2的坐标为(x, y, z)，则有

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.2}$$

利用两点间距离公式，还可求空间任意一点到各坐标轴和各坐标面的距离。

例　由$P(x,y,z)$向x轴作垂线，则垂足的坐标为$(x, 0, 0)$，从而P至x轴的距离为：

$$d=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$$

由$P(x、y、z)$向yoz平面作垂线，则垂足的坐标为$(o、y、z)$，从而P至yoz平面的距离：

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2}=|x|.$$

同样可求出点P到其它坐标轴和坐标面的距离。

例1　在oz轴上求与点$A(-2, 5, 3)$和$B(3, 2, -1)$等距离的点。

解　设所求点为$P(0, 0, z)$，由$|PA|=|PB|$可得：

$$\sqrt{(-2-0)^2+(5-0)^2+(3-z)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2+(-1-z)^2}$$

解得$z=3$，故所求点为$P(0, 0, 3)$。

2．线段的定比分点公式

已知线段$\overline{P_1P_2}$两端点分别为$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，现要在线段$\overline{P_1P_2}$上求一点P，分线段成两部分使其代数长的定比为λ，即　$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$。可以看出：当$\lambda$为正值时，点$P$

为线段P_1P_2的内分点，当λ为负值时，点P为线段$\overline{P_1P_2}$的外分点，且显然$\lambda \neq -1$。

设点P的坐标为（x、y、z），过P_1、P_2和P分别作平面平行于zox面，交oy轴于点B_1、B_2和B（如图5.6）。

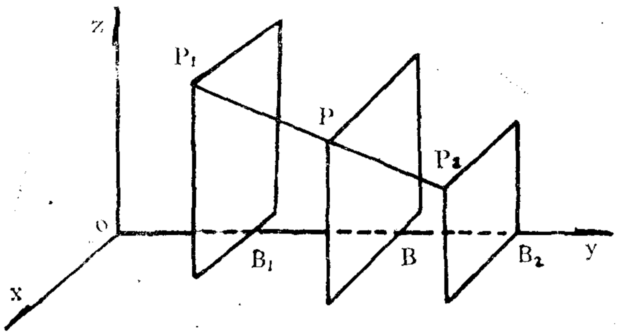

图5.6

因两直线被平行平面截得的线段成比例，

有 $$\frac{B_1B}{BB_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$

而 $$B_1B=y-y_1 \qquad BB_2=y_2-y$$

即得： $$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda$$

解之，得 $$y-y_1=\lambda(y_2-y)$$

$$(1+\lambda)y=y_1+\lambda y_2$$

因为$\lambda \neq -1$，所以 $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

同理可得 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$

与 $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\ x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ z&=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

于是点P的坐标为 $P\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

特别的，当$\lambda=1$时，P是线段的中点。其坐标为：

$$x=\frac{y_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}\qquad(1.4)$$

显然，公式（1.3）、（1.4）分别是平面上线段定比分点的坐标和中点的坐标的公式推广。

例2 在一线段的端点$A_1(x_1, y_1, z_1)$和$A_2(x_2, y_2, z_2)$分别放置两个质量为m_1、m_2的质点，求该质点系的重心坐标。

解 设这个质量点系的重心为$G(x, y, z)$，由物理学知，点G在线段$\overline{A_1A_2}$上，且分$\overline{A_1A_2}$成两线段，其代数长的比为$m_1 : m_2$。

即：$$\lambda=\frac{A_1G}{GA_2}=\frac{m_2}{m_1}$$

由公式（1.3）得：

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

同理得：

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\qquad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$$

依此推广：n个质量点系的重心坐标为：

$$\overline{x}=\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\qquad \overline{y}=\frac{\Sigma m_iy_i}{\Sigma m_i}\qquad \overline{z}=\frac{\Sigma m_iz_i}{\Sigma m_i}$$

例3 已知两点$P_1(2, 3, -5)$和$P_2(-1, 2, -8)$，求直线P_1P_2与坐标平面yOz交点P的坐标。

解 因为交点P在yOz面上，设它的坐标为(o, y, z)。设P点分线段$\overline{P_1P_2}$成两部分，其代数长的比为λ，即

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$$