

633932

高等数学 典型试题 分析

湖南科学技术出版社

高等数学 典型试题分析

马进业 编

湖南科学技术出版社

高等数学典型试题分析

马进业 编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路8号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年5月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：29.25 字数：672,000

印数：1—10,200

ISBN 7—5357—0133—7/O·16

统一书号：13204·161 定价：6.10元

湘目86—20

前 言

为了适应新形势的需要,帮助学生学习巩固所学的基本理论基本方法,顺利通过考试,并进一步深造,编者收集了历年全国部份高等学校各学年试题及研究生入学试题,根据教学大纲,结合樊映川等编的《高等数学讲义》,编写了这本典型试题分析。本书的特点是:每章均分为基本概念和计算方法两部分。基本概念部分联系计算方法部分,概括了高等数学的基本理论,使本书成为一本独立的完整的研究生入学数学复习指导书,计算方法部分介绍了各类题目的多种解法和运算技巧,并引入了不少反例,对各种常见的错误解法进行了分析和指正。全书深入浅出,除了作为考试研究生的指导书外,也可作为自学者学习高等数学的参考书。

由于编者水平所限,加之部分试题来源于抄件,因而错误在所难免,敬请读者批评指正。

萧果能、邹捷中两位同志认真地审阅了全稿,刘后圩同志提供了宝贵的资料,对于他们的热情支持和大力帮助,编者表示衷心的感谢。

编 者

1986年9月于长沙

目 录

第一章 极限	1
基本概念.....	1
计算方法.....	10
(I) 根据极限的 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 或 $\langle \varepsilon - N \rangle$ 定义, 求证某数为函数的极 限.....	10
(II) 求极限的方法	16
(III) 证明极限不存在的常用方法	83
第二章 连续	85
基本概念.....	85
计算方法.....	95
(I) 根据连续和一致连续的定义证明函数的连续性和一致连 续性.....	95
(一) 按 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 定义证明函数的连续性	95
(二) 按定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 讨论连续性.	99
(三) 按定义 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 证明函数连续.	106
(II) 连续函数性质的应用	107
(一) 中值定理的应用	107
(二) 根的存在定理的应用	108
(三) 连续性的应用	111
(III) 连续函数运算定理的应用.....	114
第三章 一元函数的微分学	115

基本概念.....	115
计算方法.....	134
(I) 关于可导性的讨论.....	134
(II) 微分法	147
(一) 抽象函数的微分法	147
(二) 分段函数的导数	149
(三) 含有绝对值符号的函数的微分法	150
(四) 极限函数的导数	152
(五) 幂指形式的函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数	152
(六) 参数方程所表示的函数的导数	154
(七) 变上限积分的导数	157
(八) 高阶导数的求法	167
(九) 利用函数的展开式求函数的导数	172
(十) 向量函数的微分法	173
(十一) 函数行列式的微分法	173
(III) 微分学的应用.....	175
(一) 用导数定义证明命题	175
(二) 求变化率	178
(三) 求曲线的切线的斜率	182
(四) 中值定理的应用	183
(五) 单调性的判别和应用	194
(六) 极值和最值的求法和应用	200
(七) 凹性和拐点的判别和应用	208
(IV) 三类证明题	209
(一) 不等式的证明	209
(二) 证明零点的存在	233
(三) 证明近似等式	238

第四章 不定积分

基本概念.....	240
计算方法.....	251
(I) 概念题.....	251

(II) 有理式的积分	255
(III) 无理函数的不定积分	262
(一) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{Ax+B}{Cx+D}}\right) dx$ 型积分	262
(二) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 型积分	266
(三) $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 型积分	270
(IV) 一些超越函数的复合函数的不定积分	273
(一) 三角函数	273
(二) 指数函数	284
(三) 对数函数	288
(四) 反三角函数	291

第五章 多元函数的微分学.....293

基本概念	293
计算方法	311
(I) 二元函数的极限	311
(一) 连续函数的极限	311
(二) 利用已知极限求函数的极限	311
(三) 不等式法	312
(四) 极限准则的应用	314
(II) 连续性和可微性的讨论	314
(III) 方向导数	316
(IV) 复合函数的微分法	320
(一) 全导公式	320
(二) 偏导数公式	321
(三) 具有具体表达式的函数的导数	323
(四) 抽象函数的导数	326
(五) 隐函数的导数	355
(V) 极值、最值及其应用	370
(一) 无条件极值	370
(二) 条件极值	372

(VI) 曲线的切线和法平面, 曲面的切平面及法线	379
(VII) 利用全微分进行近似计算	386
第六章 定积分	388
基本概念	388
计算方法	401
(I) 概念题	402
(II) 含有绝对值符号的积分	406
(III) 积分等式的证明	409
(IV) 积分不等式的证明	416
(V) 求解积分方程	424
(VI) 几个特殊的定积分	427
第七章 广义积分	431
基本概念	431
计算方法	441
(I) 广义积分敛散性的判别	441
(一) 由定义判别 442	
(二) 应用判别法判断 443	
(II) 求广义积分	444
第八章 含参变量积分	456
基本概念	456
计算方法	466
第九章 二重积分	473
基本概念	473
计算方法	484
(I) 改变二次积分的次序	484
(II) 二次积分的计算	485
(III) 二重积分的计算	487
第十章 三重积分和n重积分	500
(I) 三重积分的定义	500

(II) 几类可积函数	500
(III) 三重积分的性质	500
(IV) 三重积分的计算	501
(V) 三重积分的变量代换	502
(VI) 计算方法	505
(VII) n 重积分的定义	513
第十一章 曲线积分	518
基本概念	518
计算方法	524
(I) 对弧长的曲线积分	524
(II) 对坐标的曲线积分	525
(III) 利用积分与路径无关的条件计算积分	529
(IV) 利用格林公式计算积分	536
(V) 利用斯托克斯公式计算积分	543
(VI) 利用两种线积分间的关系计算积分	548
第十二章 曲面积分	550
基本概念	550
计算方法	555
(I) 对面积的曲面积分	555
(一) 由公式直接计算 555	
(二) 利用两种曲面积分间的关系计算 560	
(II) 对坐标的曲面积分	563
(一) 由公式直接计算 563	
(二) 利用奥氏公式计算 564	
第十三章 积分学的应用	571
(0) 微元法	571
(I) 面积的计算	572
(一) 平面区域的面积的计算 572	
(二) 曲面面积的计算 573	
(三) 旋转曲面的面积计算 573	

(四) 考题分析	574
(II) 体积的计算	580
(一) 立体的体积计算	589
(二) 已知截面的立体的体积计算	582
(三) 旋转体的体积计算	582
(四) 考题分析	582
(III) 弧长的计算	592
(IV) 质量的计算	595
(V) 重心的计算	600
(VI) 转动惯量的计算	602
(VII) 功的计算	603
(VIII) 引力的计算	614
(IX) 压力的计算	622
(X) 其他一些应用	629
(一) 流量的计算	629
(二) 电位和电场强度的计算	633
(三) 函数平均值的求法	636

第十四章 级数638

 基本概念638

 计算方法677

 (I) 根据收敛定义证明级数收敛和一致收敛677

 (II) 利用判别法判断级数的敛散性682

 (一) 比较判别法的应用 682

 (二) 比较判别法的极限形式的应用 691

 (三) 比值判别法的应用 696

 (四) 积分判别法的应用 698

 (五) 拉阿伯判别法的应用 699

 (六) 根值判别法的应用 702

 (七) 莱布尼茨判别法的应用 702

 (八) 阿贝尔判别法的应用 704

 (九) 狄利克雷判别法的应用 705

(十) 利用收敛半径判别级数的敛散性	708
(III) 收敛域的求法	709
(一) 用公式 $R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $	709
(二) 用公式 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }}$	715
(三) 用极限形式的比值判别法	716
(四) 根据间接展开确定收敛域	719
(IV) 函数的展开	722
(一) 直接展开法	722
(二) 间接展开法	722
(V) 求和法	735
(一) 数项级数的和	735
(二) 函数项级数的和	745
(VI) 傅立叶级数	755
(一) 在 $[-\pi, \pi]$ 和 $[0, \pi]$ 上展开周期函数为傅立叶级数	755
(二) $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数和奇函数的展开	765
(三) $[0, \pi]$ 上的函数的正弦级数和余弦级数	773
(四) 任意区间上的傅立叶级数	778
(VII) 级数的应用	787
(一) 求无穷和	787
(二) 求极限值	787
(三) 无穷小量的比较	789
(四) 求导数	790
(五) 计算函数值	792
(六) 计算积分的近似值	794
(七) 解微分方程	796
(八) 证明等式	796

第十五章 常微分方程803

基本概念803

(I) 一般概念	803
(II) 特殊的一阶微分方程	804
(一) 变量可分离的方程	804
(二) 可化为变量分离的方程	804
(三) 一阶线性方程	806
(四) 可化为线性方程的方程	806
(五) 全微分方程	806
(六) 可变为全微分方程的方程	808
(七) 黎卡提方程	810
(III) 特殊的高阶方程	811
(一) 不显含未知函数的方程	811
(二) 不显含自变量的方程	811
(三) 不显含自变量和未知函数的方程	813
(IV) 高阶线性微分方程	814
(一) 线性微分方程解的结构	814
(二) 常系数线性齐次微分方程	814
(三) 常系数线性非齐次微分方程	815
(四) 变系数线性微分方程	826
(V) 线性微分方程组	838
(一) 观察法	838
(二) 消元法	840
(三) 可积组合法	843
(四) 算子法	846
(五) 特征值法	847
(六) 拉普拉斯变换法	850
(VI) 微分方程的应用	851
(一) 物体运动问题	851
(二) 物质变化问题	851
(三) 几何问题	851
计算方法	852

第一章 极 限

极限概念是高等数学中最基本而又重要的概念之一。高等数学中许多其他概念都是以它为基础建立起来的。例如连续、导数、积分和级数等。可以说，凡是当所讨论的命题进入到无穷场合时，都要用到极限的思想。同时，极限又可以看成是一种运算方法，这个方法渗透到数学的各个分支。所以，在数学考试中，极限题都占有不小的份量。例如，1980年全国105所高校的研究生数学入学试卷中，无一没有极限题目，且每份试卷极限题均占15%左右。因此，对于极限概念及其性质、运算，必须深刻理解，熟练掌握。

基 本 概 念

(I) 极限的定义

(一) 数列的极限定义

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，总存在正整数 N ，当 $n > N$ 时， $|x_n - a| < \varepsilon$ ，则常数 a 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限。

对此定义，要求理解以下几点：

- 1) 正数 ε 是任意给定的，只有这样才能表达 x_n 与 a 无限接近

近的意思。

2) 对于一个 $\varepsilon > 0$, 只要找到一个适合“ $n > N$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”的 N 就行。事实上, 这样的 N 只要存在一个, 就会存在无限多个。因若 $n > N_0$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 那么对于所有大于 N_0 的 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 。在无限多个 N 中, 有最小的, 无最大的。

3) 不同的 ε 对应不同的 N , 所以有时写成 $N(\varepsilon)$ 。

4) 定义改成下面的叙述, 更为直观:

正整数 n 趋于 ∞ 时, 数列 $\{x_n\}$ 趋于 a , 就称 a 为 $\{x_n\}$ 的极限。

即:

$$n: 1, 2, 3, \dots \rightarrow \infty,$$

$$x_n: x_1, x_2, x_3, \dots \rightarrow a.$$

值得注意的是, $n \rightarrow \infty$ 是以任何途径与方式进行的, 即 n 以各种各样的途径趋于 ∞ 时, $\{x_n\}$ 都趋于同一个常数 a 。例如:

n 取偶数值趋于 ∞ : $2, 4, 6, \dots \rightarrow \infty$,

x_n 的值列趋于 a : $x_2, x_4, x_6, \dots \rightarrow a$;

n 取奇数值趋于 ∞ : $1, 3, 5, \dots \rightarrow \infty$,

x_n 的值列亦趋于 a : $x_1, x_3, x_5, \dots \rightarrow a$ 。

即: $x_n \rightarrow a$, 则它的任何子数列 $x_{n_k} \rightarrow a$ 。根据这个叙述, 证明一个数列的极限不存在极为方便。

例1 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 的极限不存在。

证 当 n 取偶数趋于 ∞ 时, $\{x_n\}$ 趋于 -1 ; 当 n 取奇数趋于 ∞ 时, $\{x_n\}$ 趋于 1 。所以 $\{x_n\}$ 的极限不存在。

(二)函数的极限定义

定义1 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在一个 $\delta > 0$, 使得对一切适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x , 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 或称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处

的极限。

定义 2 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个正数 N ，使得对适合不等式 $|x| > N$ 的一切 x ，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

对于函数极限的定义，应该理解如下几点（以定义 1 为例）：

1) 正数 ε 是任意给定的，只有这样才能表达 $f(x)$ 与 A 无限接近的意思。

2) 对一个 $\varepsilon > 0$ ，只要找到一个 δ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 就行。显然，这样的 δ 有无穷多个。因若 δ_1 满足条件，那末比 δ_1 小的一切 δ 都满足条件。在无穷多个 δ 中，有最大者而无最小者。

3) 把定义改成下面的叙述，更为直观：

当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x) \rightarrow A$ ，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。

即，

$$x: x_1, x_2, x_3, \dots \rightarrow x_0,$$

$$f(x): f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots \rightarrow A.$$

值得注意的是， $x \rightarrow x_0$ 是指以任何方式趋于 x_0 ($x \neq x_0$)， $f(x)$ 都趋于 A 。例如：

x 取一列有理数趋于 x_0 ： $r_1, r_2, r_3, \dots \rightarrow x_0$ ，

函数值列趋于 A ： $f(r_1), f(r_2), f(r_3), \dots \rightarrow A$ ；

x 取一列无理数趋于 x_0 (尽管无理数不能一一列出，但可从中取出一列)： $a_1, a_2, a_3, \dots \rightarrow x_0$ ，

函数值列亦趋于 A ： $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots \rightarrow A$ 。

根据这个叙述，证明函数在某点的极限不存在极为方便。

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

证 当 x 取值列 $\left\{1/2n\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$ 趋于 0 时, $f(x)$ 的值列

$\left\{\sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ 趋于 -1 .

而当 x 取值列 $\left\{1/2n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ 趋于 0 时, $f(x)$ 的值列 $\left\{\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ 趋于 1. 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

关于无穷大和无穷小, 只是其极限分别为无限和零的函数而已, 我们不作专门讨论.

(II) 极限的性质

(一) 数列极限的性质

(1) 存在性

定理1 (柯西收敛准则) 数列 $\{x_n\}$ 趋于有限极限的充要条件是: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 必有正整数 N 存在, 使当 $n > N$, $m > N$ 时, 恒有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

此定理的几何意义就是: 点列“聚集”在某点近旁的充要条件是此点列充分靠后的点之间任意接近.

定理2 单调有界数列必有极限(指有限的).

定理中的“单调性”和“有界性”都是不可缺少的, 否则, 就不能保证极限的存在. 例如, 数列 $\{0, 1, 0, 1, \dots\}$ 是有界的, 但不单调, 所以极限不存在; 而数列 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 是单调的, 但无界, 故极限也不存在.

另外, 单调只是极限存在的充分条件, 而不是必要条件, 即有极限的数列不一定是单调的(当然, 一定是有界的). 例如,

数列

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots,$$

其极限为 0，但不是单调的。

(2) 唯一性

定理 3 若数列 $\{x_n\}$ 具有有限极限，则极限是唯一的。

(3) 有界性

定理 4 具有有限极限的数列必有界。

(4) 保号性

定理 5 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ (或 < 0)，则对任意满足 $0 < c < a$ (或 $a < c < 0$) 的 c ，都存在正整数 N ，使当 $n > N$ 时， $x_n > c > 0$ (或 $x_n < c < 0$)。

(二) 函数极限的性质

(1) 存在性

定理 1 (柯西收敛准则) 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在而且有限的充要条件是：对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使对任意的 x', x'' ，只要 $0 < |x' - a| < \delta$ ， $0 < |x'' - a| < \delta$ ，便有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (对 $x \rightarrow a^+$ ， $x \rightarrow a^-$ ， $x \rightarrow \pm \infty$ ， $x \rightarrow \infty$ ，定理也成立)。

定理 2 若 $f(x)$ 在 a 的某一单方邻域 (比如左邻域 $(a - \delta, a)$) 内单调并且有界，则 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 存在。

注 对双侧极限此定理不一定成立。例如

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$

在 $(0, 2)$ 内单调有界，但在 $x = 1$ 处极限不存在。

(2) 唯一性

单方邻域