高等数学典型试题分析

湖南科学技术出版社

高等数学
典型试题分析

马进业编

湖南科学技术出版社

高等数学典型试题分析

马进业　编
责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1987年5月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：29.25　字数：672,000
印数：1——10,200
ISBN 7—5357—0133—7／O·16

统一书号：13204·161　**定价：6.10元**

湘目86—20

前言

了适应新形势的需要，帮助学生学习巩固所学的基本理本方法，顺利通过考试，并进一步深造，编者收集了历国部份高等学校各学年试题及研究生入学试题，根据教学大纲，结合樊映川等编的《高等数学讲义》，编写了这本典型试题分析。本书的特点是：每章均分为基本概念和计算方法两部分。基本概念部分联系计算方法部分，概括了高等数学的基本理论，使本书成为一本独立的完整的研究生入学数学复习指导书，计算方法部分介绍了各类题目的多种解法和运算技巧，并引入了不少反例，对各种常见的错误解法进行了分析和指正。全书深入浅出，除了作为考试研究生的指导书外，也可作为自学者学习高等数学的参考书。

由于编者水平所限，加之部分试题来源于抄件，因而错误在所难免，敬请读者批评指正。

萧果能、邹捷中两位同志认真地审阅了全稿，刘后圩同志提供了宝贵的资料，对于他们的热情支持和大力帮助，编者表示衷心的感谢。

编　者

1986年9月于长沙

目　录

第一章　极　限

极限概念是高等数学中最基本而又重要的概念之一。高等数学中许多其他概念都是以它为基础建立起来的。例如连续、导数、积分和级数等。可以说，凡是当所讨论的命题进入到无穷场合时，都要用到极限的思想。同时，极限又可以看成是一种运算方法，这个方法渗透到数学的各个分支。所以，在数学考试中，极限题都占有不小的份量。例如，1980年全国105所高校的研究生数学入学试卷中，无一没有极限题目，且每份试卷极限题均占15%左右。因此，对于极限概念及其性质、运算，必须深刻理解，熟练掌握。

基　本　概　念

(I)极限的定义

(一)数列的极限定义

如果对于任意的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则常数a称为数列$\{x_n\}$的极限。

对此定义，要求理解以下几点：

1) 正数ε是任意给定的，只有这样才能表达x_n与a无限接

近的意思。

2）对于一个$\varepsilon>0$，只要找到一个适合“$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$”的N就行。事实上，这样的N只要存在一个，就会存在无限多个。因若$n>N_0$时有$|x_n-a|<\varepsilon$，那么对于所有大于N_0的N，当$n>N$时，都有$|x_n-a|<\varepsilon$。在无限多个N中，有最小的，无最大的。

3）不同的ε对应不同的N，所以有时写成$N(\varepsilon)$。

4）定义改成下面的叙述，更为直观：

正整数n趋于∞时，数列$\{x_n\}$趋于a，就称a为$\{x_n\}$的极限。即：

n：1，2，3，$\cdots\to\infty$，

x_n：x_1，x_2，x_3，$\cdots\to a$。

值得注意的是，$n\to\infty$是以任何途径与方式进行的，即n以各种各样的途径趋于∞时，$\{x_n\}$都趋于同一个常数a。例如：

n取偶数值趋于∞：2，4，6，$\cdots\to\infty$，

x_n的值列趋于a：x_2，x_4，x_6，$\cdots\to a$；

n取奇数值趋于∞：1，3，5，$\cdots\to\infty$，

x_n的值列亦趋于a：x_1，x_3，x_5，$\cdots\to a$。

即：$x_n\to a$，则它的任何子数列$x_{n_k}\to a$。根据这个叙述，证明一个数列的极限不存在极为方便。

例1　证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$的极限不存在。

证　当n取偶数趋于∞时，$\{x_n\}$趋于-1；当n取奇数趋于∞时，$\{x_n\}$趋于1。所以$\{x_n\}$的极限不存在。

（二）函数的极限定义

定义1　如果对于任意的$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$，使得对一切适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，或称A为$f(x)$在x_0处

的极限。

定义 2　如果对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数N，使得对适合不等式$|x|>N$的一切x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限。

对于函数极限的定义，应该理解如下几点（以定义 1 为例）：

1）正数ε是任意给定的，只有这样才能表达$f(x)$与A无限接近的意思。

2）对一个 $\varepsilon>0$，只要找到一个δ满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时$|f(x)-A|<\varepsilon$就行。显然，这样的δ有无穷多个。因若δ_1满足条件，那末比δ_1小的一切δ都满足条件。在无穷多个δ中，有最大者而无最小者。

3）把定义改成下面的叙述，更为直观：

当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$，则称A为$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限。即：

$$x:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\to x_0,$$

$$f(x):\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \cdots\to A.$$

值得注意的是，$x\to x_0$是指以任何方式趋于$x_0(x\neq x_0)$，$f(x)$都趋于A。例如：

x取一列有理数趋于x_0：$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots\to x_0,$

函数值列趋于A：$f(r_1),\ f(r_2),\ f(r_3),\ \cdots\to A;$

x取一列无理数趋于x_0（尽管无理数不能一一列出，但可从中取出一列）：$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots\to x_0,$

函数值列亦趋于A：$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ f(\alpha_3),\ \cdots\to A.$

根据这个叙述，证明函数在某点的极限不存在极为方便。

例2　证明$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在。

证 当x取值列$\left\{1\Big/2n\pi-\frac{\pi}{2}\right\}$趋于0时，$f(x)$的值列

$\left\{\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$趋于$-1$。

而当x取值列$\left\{1\Big/2n\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$趋于0时，$f(x)$的值列$\left\{\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$趋于1。故$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

关于无穷大和无穷小，只是其极限分别为无限和零的函数而已，我们不作专门讨论。

(II) 极限的性质

(一)数列极限的性质

(1) 存在性

定理1 (柯西收敛准则) 数列$\{x_n\}$趋于有限极限的充要条件是：对于任给的$\varepsilon>0$，必有正整数N存在，使当$n>N$，$m>N$时，恒有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

此定理的几何意义就是：点列“聚集”在某点近旁的充要条件是此点列充分靠后的点之间任意接近。

定理2 单调有界数列必有极限(指有限的)。

定理中的“单调性”和“有界性”都是不可缺少的，否则，就不能保证极限的存在。例如，数列{0，1，0，1，…}是有界的，但不单调，所以极限不存在；而数列{1，2，3，…}是单调的，但无界，故极限也不存在。

另外，单调只是极限存在的充分条件，而不是必要条件，即有极限的数列不一定是单调的(当然，一定是有界的)。例如，

数列

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots,$$

其极限为0，但不是单调的。

(2) 唯一性

定理3 若数列$\{x_n\}$具有有限极限，则极限是唯一的。

(3) 有界性

定理4 具有有限极限的数列必有界。

(4) 保号性

定理5 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$（或$<0$），则对任意满足$0<c<a$（或$a<c<0$）的$c$，都存在正整数$N$，使当$n>N$时，$x_n>c>0$（或$x_n<c<0$）。

（二）函数极限的性质

(1) 存在性

定理1 （柯西收敛准则） 极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在而且有限的充要条件是：对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对任意的x'，x''，只要$0<|x'-a|<\delta$，$0<|x''-a|<\delta$，便有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$（对$x\to a^+$，$x\to a^-$，$x\to\pm\infty$，$x\to\infty$，定理也成立）。

定理2 若$f(x)$在a的某一单方邻域（比如左邻域$(a-\delta, a)$）内单调并且有界，则$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$存在。

单方邻域

注 对双侧极限此定理不一定成立。例如

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ \dfrac{3}{2}, & x=1\\ x, & x<1\end{cases}$$

在(0，2)内单调有界，但在$x=1$处极限不存在。

(2) 唯一性