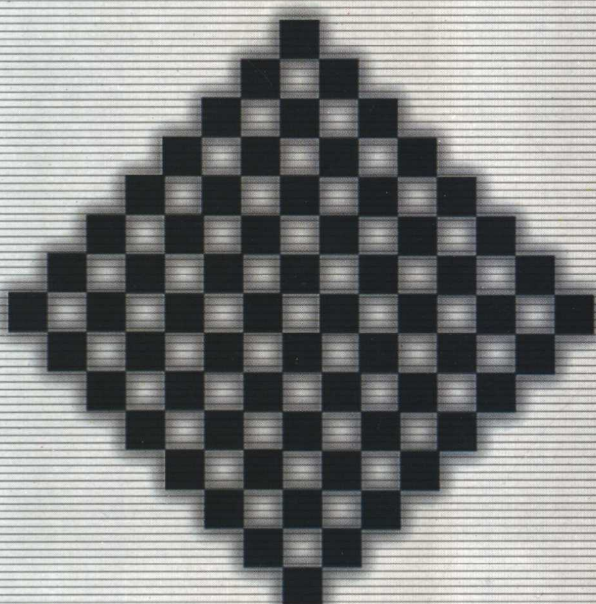
线性代数

XIANXING DAISHU

宣飞红/编著



厦门大学出版社

线性代数

XIANXING DAISHU

宣飞红 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/宣飞红编著. —厦门:厦门大学出版社,2003.4
ISBN 7-5615-2063-8

Ⅰ.线… Ⅱ.宣… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033170 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
三明地质印刷厂印刷
2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:7
字数:172 千字 印数:1-4 000 册
定价:13.00 元

内 容 提 要

本书作者按照教育部对经济管理类大学本科的基础课程《线性代数》的教学要求，在总结多年教学经验的基础上编写而成。全书共分五章，主要内容有行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值和二次型等。

针对网络、函授等远程教学“面授、自学相结合”的特点，作者合理有序地安排了章节，在保持内容相对独立性及整体连贯性的同时，循序渐进，对重点、难点进行深入浅出地论述，并提供了丰富的例子，适合于学生自学。根据学练结合的原则，本书配备了课后练习题，并附有详细解答，特别是证明题也附有证明过程，以弥补远程教学学员在自学练习中缺少教师指导的不足。

本书适合经济管理类专业的网络学生、电大学生、函授生及自考生作为教材或学习参考书使用。

目　录

第一章　行列式

在中学代数里，我们已经接触到用二阶、三阶行列式求解二元、三元线性方程组. 实际应用中，如在经济管理、工程技术的案例中，往往会出现 n 元线性方程组的求解问题，因此需介绍 n 阶行列式的理论. 本章的主要内容有 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

通过介绍二阶、三阶行列式的知识，可以更好地理解 n 阶行列式的概念.

1. 二阶行列式　含有两个未知数的线性方程组，其一般形式可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases},$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 是未知数 x_1,x_2 的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项. 用加减消元法解方程，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得方程组的解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}.$$

将代数和 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示，即

$$\overset{+\qquad -}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$，被称为二阶行列式.

二阶行列式由四个元素排成两行两列，其值按对角线法则计算，由主对角线(左上角至右下角的连线)上两个元素的乘积前取正号，次对角线(右上角至左下角的连线)上两个元素乘积前取负号的代数和构成. 例如，$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=(-2)\times 4-3\times 5=-23$. 利用二阶行列式，设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为系数行列式，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D\neq 0$ 时，二元方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

例 解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1-x_2=-2 \end{cases}$.

解 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0$，

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1-(-4)=3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-2-3=-5,$$

所以 $x_1=-\dfrac{3}{7}$，$x_2=\dfrac{5}{7}$.

2. 三阶行列式　类似于二阶行列式，可定义三阶行列式的计算为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式由 9 个元素排成三行三列，其中 a_{ij}是第 i 行第 j 列的元素，下标 i 为行标，j 为列标. 行列式的值仍是一个展开式，看上去很复杂，实际上也同样满足对角线法则

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

实对角线上的三个元素乘积前带“＋”号，虚对角线上三个元素乘积前带“－”号，把这六个乘积项相加，即得三阶行列式的值.

例如：$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\times2\times5+(-4)\times3\times4+0\times0\times(-1)- 0\times2\times4-1\times(-1)\times3-(-4)\times0\times5=-35.$

注意：对于更高阶行列式的展开式不一定满足对角线法则.

二、排列与逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，先介绍排列及逆序数的概念.

定义 1.1 由 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

如：21354 是一个 5 级排列，4132 是一个 4 级排列，n 级排列实际上是 n 个不同元素的全排列，所以由 n 个元素可构成的 n 级排列共有 $n!$ 个. 如：3 个元素 1,2,3 构成的 3 级排列共有 $3!=6$ 个，分别是 123,132,213,231,312,321.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排

在较小的数 i_t 前面，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总和称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 计算 $\tau(34152)$；$\tau(4132)$.

解 这是一个 5 级排列，在 34152 中，构成逆序的数对有

31，32，41，42，52，所以 $\tau(34152)=5$. 而在 4132 中，构成逆序的数对有 41，43，42，32，所以 $\tau(4132)=4$.

特别排列 $123\cdots n$ 为自然排列，其逆序数为 0，即 $\tau(123\cdots n)=0$.

若逆序数为奇(偶)数，则称对应的排列为奇(偶)排列，逆序数为 0 的排列规定为偶排列. 这样，所有的 n 级排列分为奇、偶两大类. 如在六个三级排列中，123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列.

定义 1.3 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果只对调 i_s 与 i_t 两个数，其他各数位置不变，得到一个新的排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记为 (i_s,i_t).

如 $(31524)\xrightarrow{(1,2)}(32514)$；

$(612435)\xrightarrow{(6,4)}(412635)$.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 1) 先证相邻的情形：$(\cdots i_si_t\cdots)\xrightarrow{(i_s,i_t)}(\cdots i_ti_s\cdots)$

若 i_si_t 在原来的排列中构成逆序，经过对换逆序减少一个；若 i_si_t 在原排列中不构成逆序，经过对换，逆序增加一个，故不论如何，都改变了排列的奇偶性.

2) 再证一般情形：设 $(\cdots i_s\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_ki_t\cdots)\xrightarrow{(i_s,i_t)}(\cdots i_t\alpha_1\cdots\alpha_ki_s\cdots)$

此对换可由一系列相邻两数的对换实现. 先将 i_t 顺次与 α_k，α_{k-1}，…，α_1 及 i_s 作 $k+1$ 次相邻对换，排列变成 $(\cdots i_ti_s\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots)$，再将 i_s 顺次与 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 作 k 次的相邻对换，使排列变为 $(\cdots i_t\alpha_1\alpha_2\cdots$

$a_k i_s \cdots$)，共经过 $2k+1$ 次相邻对换得到新排列，故 $2k+1$ 次的对换最终也改变了排列的奇偶性.

此种从特殊到一般的思维方式在线性代数里经常使用，请留意.

推论 1 在 n 级排列（$n \geqslant 2$）中，奇排列与偶排列的个数相同，各为$\frac{n!}{2}$个.

推论 2 任一 n 级排列都可以经过一系列的对换变成自然排列，且所用对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同.

如：将 4312 对换变成 1234 须经过 3 次对换，又因为 $\tau(4312)=5$，3 与 5 都是奇数，故奇偶性相同（不是相等）.

三、n 阶行列式

先观察二、三阶行列式的结构，其特点为：(1)都是一些乘积的代数和，共有 $n!$ 项；(2)每一项都是由不同行不同列的元素构成；(3)每一项都带有符号，且符号与元素下标排列的奇偶性有关. 由此可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 设有 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 n 行 n 列的数表，做出表中位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，并冠以符号得

$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，这样的项共有 $n!$ 个，所有项的代数和 $\sum\limits_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 就称为这 n^2 个元素的 n 阶行列式，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$

对于 n 阶行列式,实际上是一个运算,其运算结果是一个数,而这个数是由 $n!$ 项的代数和构成的,为方便起见,n 阶行列式也可简记为 $|a_{ij}|$. 特别地,当 $n=1$ 时,规定 $|a_{11}|=a_{11}$,即一个元素的行列式的值就是其本身. 另外,n 阶行列式各项的符号还可以由下面两种方法确定:

(1) $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$,即列标为自然排列时,可用行标的逆序数确定符号;

(2) $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$,即行标与列标均不是自然排列时,可用行标的逆序数与列标的逆序数之和确定该项的符号.

例 1 判断(1) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{31}a_{52}$ (2) $a_{11}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}$ (3) $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$是否为 5 阶行列式 D 中的某一项,若是,确定其符号.

解 (1)由于此项元素下标中,行标为 1 2 3 3 5,表明有两个元素取自同一行(第三行),与定义不符,故该项不是 D 中的项.

(2)由于此项有两个元素取自同一列,故该项也不是 D 中的项.

(3)该项是 D 中的某一项,且符号为$(-1)^{\tau(54321)}=10$,取正号.

例 2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 4 阶行列式按定义应有 24 项之和，但该行列式中零元素较多，故有很多项为 0，此行列只有四个元素位于不同行不同列，故只有一项不为 0，即 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\times2\times3\times4=24$.

由此可见，在行列式的计算中，含零元素较多可使计算简单.

几个常见的行列式的计算：

1. $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

此行列式为上三角形行列式，主对角线以下的元素全为 0，行列式的值就等于主对角线元素的乘积.

2. $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. $$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

§1.2 行列式的性质

直接利用定义只能计算一些特殊的行列式，对一般的 n 阶行列式用定义计算不仅计算量大，且有一定的难度. 借助于行列式的性质，可简化行列式的计算.

性质 1 转置行列式的值不变.

将行列式 D 中的行换成列后得到的行列式称为 D 的转置行

列式，记为 D'（或 D^T），即当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

则 $D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，　此性质为 $D=D'$.

证　因 $D=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，

而 D' 中的元素下标中前一个为该元素所在的列，后一个为行，同样有　$D'=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$，

故 $D=D'$.

此性质说明，在行列式中行与列的地位是对称的，故对行成立的性质，对列也一定成立.

性质 2　行列式中某一行的元素有公因子 k，可提取到行列式前面，

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　由定义，左边$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_2}\cdots a_{nj_n}$$

$=k\cdot D=$右边.

推论　如果行列式中有一行的元素全为 0，则该行列式的值为 0，即 $k=0$ 的情形.

性质 3 互换行列式中任意两行的位置,行列式的值变号.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由定义,左边$= \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{ij_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$

$= -\sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n}$

=右边.

推论 1 如果行列式中有两行的元素完全相同,则该行列式的值为 0. 事实上,有两行相同的 D,交换这两行后有 $D=-D$,故 $D=0$.

推论 2 如果行列式中有两行的元素对应成比例,则行列式的值为 0.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 行列式中某一行的元素是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和.

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由定义,左边$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+$$
$$\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$=D_1+D_2=$右边.

性质 6 把行列式的某一行所有的元素乘上一个不为 0 的数 k 加到另一行对应元素上去,行列式的值不变.

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1}+ka_{i1} & a_{k2}+ka_{i2} & \cdots & a_{kn}+ka_{in} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

证 由前面的性质可直接得证.

此性质为行列式的保值性,是在计算行列式中常用的性质. 在

计算 n 阶行列式时，适当利用以上性质可将行列式转化为上三角形行列式来计算.

例 1 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 先引进符号，记 r_i 为第 i 行，c_j 为第 j 列，

$r_i \leftrightarrow r_s$表示互换第 i 行与第 s 行，

r_i+kr_s表示第 s 行乘上常数 k 加到第 i 行上去，等等.

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \\ 0 & -8 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+4r_2]{r_3-8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$