# 小波分析及其在电力系统中的应用

Wavelet Analysis and Applications to Power Systems

任震 黄雯莹 黄群古 何建军 杨桦

电力科技专著出版资金资助项目

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

# 前 言

小波分析是20世纪数学研究成果中最杰出的代表之一。由于它在理论上的完美性和应用上的广泛性，受到了科学界和工程界的高度重视，并很快在众多学科领域中取得了重大进展。小波分析的理论发展和工程应用是紧密地联系在一起，而且是相互促进的。小波理论指导下的每一次成功的应用，又反过来促进小波理论的上升和发展。小波分析是一种时域—频域分析，它在时域和频域同时具有良好的局部化性质。由于对频率成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长，因此它可以聚焦到对象（函数、信号、图像等）的任意细节，并加以分析。它在信号的分解与重构、信号和噪声的分离、特征提取、数据压缩等工程应用中，显示出巨大的优越性。而这些正是近200年来大量应用于诸多工程领域的傅立叶分析（Fourier Analysis）所无法做到的。掌握这样一种高性能的分析方法，无疑将使自己的研究工作提高到一个新水平。小波分析这一冉冉升起的新星，为辛勤耕耘的科学家和改造自然的工程师，展示了一片美好的新天地。

尽管小波分析在诸多学科领域得到了很大的发展和成功的应用，然而国内外有关小波分析在电力系统中应用的研究工作才起步不久，还处在一个初级阶段。有幸的是，我们课题组在两项国家自然科学基金项目“小波分析及其在电力设备状态监视中的应用”和“基于小波分析的电力系统突变信号处理”，广东省自然科学基金项目“小波分析在电动机故障检测中的应用”以及华中电力集团公司和广东省电力局等科研项目的资助下，开展了研究工作，取得了初步成果。几年来，我们还培养了4届博士生和两届硕士生。他们的敏锐思维、开拓精神和辛勤劳动，已经在小波

分析在电力系统的应用这一研究领域中取得了重要的研究成果，尤其感到欣慰的是，他们已经成为这一研究领域的生力军。通过几年来的研究，我们深刻地体会到，小波分析在电力系统的下列诸方面，有着无比广阔的应用前景：电力设备的状态监视和故障诊断、电力系统谐波分析、电力系统暂态稳定、电力系统动态安全分析、神经网络和专家系统、抗电磁干扰、电力系统继电保护、输电线路故障定位、电力系统短期负荷预测以及高压直流输电和系统故障检测等。

为此，我们撰写本书的目的是为了把小波分析这个强有力的数学工具介绍到电力系统中来，让更多的高等学校的师生和企业、公司的工程师掌握这一技术，更好地解决电力学科的理论问题和电力工程的实际问题。同时，也是为了把我们的初步研究成果介绍给广大的读者，起到抛砖引玉的作用。我们期待本书的出版能够使得小波分析在电力系统中得到更快、更多、更好的应用。

本书共分八章，其中第一至第四章由任震教授、黄雯莹教授执笔（黄群古博士参加了第四章部分工作）；第五章由黄群古博士执笔；第六章由何建军博士执笔；第七、八章由杨桦博士执笔，全书由任震教授、黄雯莹教授统稿。参加研究工作的还有：管霖副教授、杨浩博士、胡国胜博士、吴国沛硕士、王渝红硕士和石志强硕士等。

在本书的撰写过程中，得到了清华大学卢强院士、中国电力科学研究院周孝信院士、浙江大学韩祯祥院士、华北电力大学杨奇逊院士、西安交通大学王锡凡教授、国家电力公司调度通信中心赵遵廉主任、华中电力集团计划部周宏主任和林涛博士、广东省电力集团公司生技处廉建华副处长等的关心、支持和帮助，我们在此谨表深切的谢意。本书的出版还得到华南理工大学电力学院张尧教授、蔡泽祥教授、蒋金良书记等的支持和帮助，在此一并致谢。

我们还要感谢中国自然科学基金委员会材料工程学部、广东

省自然科学基金委员会、华中电力集团公司、广东省电力集团公司等单位的支持和帮助。还要特别感谢中国电力出版社，除了他们为本书付出了辛勤的劳动之外，本书还荣幸地得到中国电力出版资金的资助。

由于作者学识有限，书中不妥之处恳请读者不吝赐教。

作者谨识

# 符 号 表

$L^2(R)$：平方可积函数空间

$L^1(R)$：可积函数空间

$f(t)$：时间信号

$\hat{f}(\omega)$：Fourier 变换

$g(t-\tau)$：窗函数

$G(\omega,\tau)$：加窗 Fourier（傅立叶，简称短时傅氏）变换

$\Psi(t)$：小波母函数

$\phi(t)$：尺度函数

$\delta(t)$：冲击函数

$\Psi_{a,b}(t)$：小波的伸缩和平移

$\Psi_{j,k}(t)$：小波的二进伸缩和平移

$W_f(a,b)$：积分小波变换

$t_\Psi^*$：小波时窗中心

$\Delta_\Psi$：小波时窗宽

$\omega_{\hat{\Psi}}^*$：小波频窗中心

$\Delta_{\hat{\Psi}}$：小波频窗宽

$V_i$：尺度空间

$W_i$：小波空间

$h_n$：尺度滤波器系数

$g_n$：小波滤波器系数

$H(\omega)$：$h_n$ 的 Fourier 变换或传递函数

$G(\omega)$：$g_n$ 的 Fourier 变换或传递函数

$P_1f$：$f$ 在空间 $V_1$ 上的正交投影

$Q_1f_1$：$f$ 和 $P_1f$ 之间的信息差

$S_m$：基数样条空间

$N_m$：$m$ 阶基数 B 样条

$T_s$：采样时间间隔

$f_s$：采样频率

$T$：信号周期

$SNR$：信噪比

$i(t)$：电流

$u(t)$：电压

# 目录

# 第1章 绪论

## 1.1 引言

小波分析（Wavelet analysis）是20世纪数学研究成果中最杰出的代表之一。它作为数学学科的一个分支，汲取了现代分析学中诸如泛函分析、数值分析、傅立叶分析（Fourier Analysis，简称傅氏分析）、样条分析、调和分析等众多分支的精华。由于小波分析在理论上的完美性以及在应用上的广泛性，在短短的几年中，受到了科学界、工程界的高度重视，并且在信号处理、图像处理、模式识别、量子场论、天体识别、地震预报、矿产勘测、流体湍流、故障诊断、状态监视、电子对抗、机器视觉、CT成像、话音识别、彩色复印、数字电视、音乐合成、雷达扫描、刑事侦破等十几个学科领域中得到（或即将得到）广泛的应用。小波分析为20世纪现代分析学作了完美的总结。

小波分析方法的提出，可以追溯到20世纪初，但作为一种比较成熟的理论，则是在20世纪80年代中叶才逐步形成和日臻完善的，特别是现代小波理论的奠基者——Y.Meyer、I.Daubechies等人做出了重大的贡献。小波分析的理论发展和工程应用是紧密地联系在一起的，并且是相互促进的。小波理论指导下的每一次成功的应用，又反过来促进小波理论的上升和发展。1990年，I.Daubechies在美国作了关于小波分析的系列讲座——著名的“小波讲座”（Ten Lectures on Wavelets），极大地推动了小波理论研究和工程应用的发展。从此，“小波热”就迅速地传播

到世界各国。

小波分析是一种时域——频域分析，介于纯时域的方波分析和纯频域的传统傅氏分析之间。它在时域和频域同时具有良好的局部化性质（localization nature）。它可以根据信号的不同频率成分，在时域或频域自动调节取样的疏密：频率高时，则密；频率低时，则疏。由于对频率成分采用逐渐精细的时域或频域取样步长，因此可以聚焦到对象（函数、信号、图像等）的任意细节，并加以分析。从这个意义上讲，小波分析被誉为数学显微镜（mathematical microscope）。因此，它在信号的分解与重构（decomposition and reconstruction）、信号和噪声分离技术（techniques of separation noise from signals）、特征提取（characteristic extraction）、数据压缩（data compression）等工程实际应用中，显示出巨大的优越性。而这些正是近 200 年来大量应用于诸多工程领域的傅氏分析所无法做到的。

现代电力系统集发电、变电、输电、配电和用电于一体，涉及的范围广，且元件繁多，结构复杂。为了确保电力系统的安全、可靠、经济运行，以及一旦发生故障后，能快速的消除或隔离故障，尽快恢复正常运行，在电力系统中需要大量的高新技术。因此，小波分析在电力系统的下列诸方面具有无比广阔的应用前景：电力设备状态监视和故障诊断、电力系统谐波分析、电力系统暂态稳定、电力系统动态安全分析、神经网络和专家系统、抗电磁干扰、电力系统继电保护、输电线路故障定位、电力系统短期负荷预测、高压直流输电系统故障检测等。

## 1.2 小波分析的发展历史梗概

在大约 100 年前的 1900 年 8 月 8 日，法国数学家 D.Hilbert 在法国巴黎的国际数学家大会上作了题为数学问题的演讲。这是一篇划时代的数学宣言，它拉开了 20 世纪数学发展的序幕。

Hilbert 在他的演讲中满怀激情地说：“我们当中有谁不想揭开未来的序幕，看一看在下一个世纪里我们这门学科发展的前景

和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪会带来什么样的新方法和新成就?”

今天，回顾数学发展的历程，100 年来数学发展所追求的目标是：数学理论的完美性和数学应用的广泛性。

在这两项目标的追求上，现代分析学的两个分支即在 20 世纪初创立的泛函分析学和近些年才发展起来的小波分析学取得了突出的成就。

小波分析汲取了诸如泛函分析（function analysis)，数值分析(numerical analysis)，傅氏分析（Fourier analysis)，样条分析(spline analysis)，调和分析（harmonic analysis）等众多数学分支的精华，并又包罗了它们的许多特色。小波分析为 20 世纪的现代分析学作了完美的总结。

1910 年，数学家 Harr 提出了“小波”规范正交基（orthonormal basis)，即 Harr 基。1938 年，Littlewood · Paley 提出了二进频率分组（dyadic frequency resolution）以及按此 Fourier 变换的相位变化本质上不影响函数的 L－P 理论。1975 年，Calderon 用他早年提出的再生公式（reproduction formula）给出抛物型空间上 $H^p$ 的原子分解，它的离散形式已经接近小波展开。1981 年，Strömberg 对 Harr 系进行了改进，证明小波函数的存在。1982 年，Battle 在构造量子场论中使用了类似 Calderon 再生公式的展开。1984 年，法国地球物理学家 Morlet 在分析地震波的局部性时，发现 Fourier 变换难以达到要求，因此把小波的局部化性质应用于信号分解，取得了满意的结果。随后，理论物理学家 Grossman 对 Morlet 的这种信号分解方法进行了理论研究，提出了伸缩和平移（dilation and translation）特性，建立了按一个确定函数 $\Psi$ 的伸缩平移系 $\left\{|a|^{\frac{1}{2}}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right): a, b\in R, a\neq 0\right\}$ 展开的理论。这无疑为小波分析的形成开了先河。

现代小波分析开始于 1986 年，法国数学家 Y.Meyer 创造性

地构造出了一个具有一定衰减特性的光滑函数（smooth function），它的二进制伸缩和平移系$\{\Psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\Psi(2^{-j}-k):j,k\in Z\}$构成$L^2$（$R$）的规范正交基，实现了信号在时频空间同时局部化的正交分解。在那之前，人们或许认为具有如此优良特性的小波函数是不存在的。他为小波理论的形成和完善做出了重大贡献，是小波理论的奠基人之一。同年，继 Mayer 提出的小波变换之后，Lemarie 和 Battle 又分别独立提出了具有指数衰减（exponention ）性质的小波函数。1987 年，Mallat 巧妙地将计算机视觉领域内的多尺度分析（multiresolution analysis）引入到小波分析中，从而成功地统一了在此之前的 Strömberg、Meyer、Lemarie 和 Battle 等提出的各种具体的小波函数的构造。同时，他的重要贡献还在于，通过研究小波变换的离散化问题，形成了著名的 Mallat 塔式算法。由于该算法显著地减少了计算量，又能保持较高精度，因此，至今仍被广泛地应用，而且使小波分析的工程应用前景更加明朗。

1988 年，另一位小波理论的奠基人，女数学家 I. Daubechies 构造出了具有紧支撑（compactly supported）的正交小波基。它在数字信号的小波分解过程中提供有限的从而更实际、更具体的数字滤波器。她的最大贡献还在于积极推动了小波理论在工程中的应用。1990 年，她的著名的“小波十讲”极大地推动了小波理论研究和工程应用的发展。从此，“小波热”也就开始了，并迅速传播到世界各地。1988 年，Arneodo 和 Grasseau 等人将小波理论应用到混沌动力学以及分形理论，以研究湍流及分形生长现象。1990 年，著名学者崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的单正交小波函数，并讨论了具有最佳局部化性质的生成函数与小波函数。同时，崔锦泰在具有线性相位的 B－小波理论与应用研究、小波及框架的特征化与稳定性研究以及非线性正交小波包研究等方面均取得了大量研究成果。1991 年，Wicherhanser 等人将 Mallat 算法进一步深化，提出小波包（wavelet packets）算法，取得了信号的最佳时频分解。

小波分析在国内外引起了极大的关注，特别在一些工业国家尤为重视。美国数学学科委员会（Committee of Mathematical Science）对小波理论的重要性予以高度评价，并把小波列为 90 年代美国应用数学 8 个前沿课题之一；美国国防部认为小波变换将对未来国防关键技术中的信号处理产生重要影响，因此把小波列为美国国防关键技术计划；英国皇家数学会也将小波分析列为 90 年代重点发展十大方向之一；法、德两国也投入大量人力和奖金来进行研究。

国内的小波分析开始于 80 年代后期，当时大多是消化吸收国外的小波理论，所进行的主要是基础理论研究。进入 90 年代以来，国内一些高等院校相继开展了小波理论的工程应用研究，而且发展很快，先后在电子技术、机械工程、信息科学、计算机科学、采矿工程、电力系统工程等领域开展了研究，取得了一批研究成果。中国国家自然科学基金委员会也非常重视小波分析的研究工作。除了给小波分析的基础研究予以支持外，90 年代以来，也对小波分析在多个学科领域的工程应用，给予有力的支持。

从以上小波分析的发展历程，可以看出，小波分析的历史是数学家和工程师共同创造的。是理论和实践紧密结合的范例和典型。小波理论在工程实际应用中，得到了印证和升华；工程实际问题又是在小波理论的指导下，获得圆满的解决，形成了良性循环。这也是小波分析在短短的几年中，在那么多国家，在那么多学科领域受到如此重视的一个主要原因。

## 1.3 小波分析在电力系统中的应用

由于小波分析在时域和频域上同时具有良好的局部化性质，能对不同的频率成分采用逐渐精细的采样步长，聚焦到信号的任意细节，这对于检测高频和低频信号均很有效，特别适用于分析奇异信号，并能分辨奇异的大小。小波分析还能准确地反映故障发生的时间、位置等信息，因此能对设备或整个系统进行实时、有效

的状态监视和故障诊断。此外小波分析在信号的分解和重构技术、特征提取技术、信号和噪声分离技术等方面的优异特点,也决定了它在电力系统谐波分析、神经网络和专家系统、输电线路故障定位、电力系统短期负荷预测等领域,具有重要的工程应用价值。现将谐波分析在电力系统中的具体应用作如下简要分析。

### 1.3.1 电力设备的状态监视和故障诊断

电力设备的状态监视和故障诊断也就是分解和处理电力系统基本设备在运行中产生的各种电磁、机械等物理信号，实时地判别其状态，以期在故障初期或在故障时（有的甚至在故障前有异常情况时）发出警报。电力设备在正常运行时发出的电磁信号较为平稳，一旦状态异常，则必然出现奇异信号。运用小波分析理论对所得的奇异电磁信号做多分辨分析（MRA），将信号分解到不同的尺度上，每个尺度上的分量反映了原信号的不同频率成分，可以很明显地表现出故障信号，从而达到状态监视和故障诊断目的。上述原理在电动机转子断条及发电机故障诊断中已得到成功的应用。

### 1.3.2 电力系统谐波分析

电力系统在正常运行和发生故障时，都伴随着产生各次谐波。在高压直流输电系统中，换流站的换相以及故障也将产生大量的谐波。为了避免这些谐波的不良影响，有必要对其进行分析和抑制。小波分析将此类信号变换投影到不同的尺度上会明显地表现出这些高频、奇异高次谐波信号的特性，特别是小波包具有将频率空间进一步细分的特性。运用小波分析理论进行谐波分析，有较高的精度和分辨率，为更好地分析和抑制谐波，提供了可靠的依据。此外，小波分析为电力系统非整次谐波的分析和研究，创造了有利条件。这方面的工作还处在探索阶段。

### 1.3.3 电力系统暂态稳定

当电力系统受到大扰动时，表征系统运行状态的各种电磁信号参数均会发生急剧变化和振荡。对这一类突变信号的处理，小波分析无疑是一个最好的选择。小波分析捕捉和处理微弱突变信

号的能力，正是它的一个突出的优点。运用它的局部细化与放大的特性，能辨别和追踪系统中各个变量的微弱突变，进而精确地推断出引起突变的局部故障时间和地点，从而提高电力系统暂态稳定预测的实时性和准确性。

### 1.3.4 电力系统动态安全分析

当电力系统受到扰动时，会造成系统电压波动，影响电力系统运行稳定性，严重时可能发生电压雪崩。因此，在研究电力系统电压的动态响应时，利用小波分析，可以将系统受到扰动后所产生的电压突变信号，分解到不同的尺度上，再分别分析该突变信号的幅值和相位，从而判别电力系统动态安全运行状况。

### 1.3.5 神经网络和专家系统

小波分析应用于神经网络和专家系统，主要是利用它对奇异信号敏感性和局部化等特性。神经网络具有学习功能，它可对输入的数据通过自学习作出智能性质的判断。通过采样得到的描述电力系统运行行为的各种参数（如故障等奇异信号）经小波分解，去掉一些不需要的成分（将与之相关的小波系数置为零）再经小波重构，获得需要的信号，并作为神经网络的输入。此外，可采用收敛性好的小波系数作为神经网络分层结构间的联系纽带。这样处理后的神经网络具有迅速收敛性、抗干扰性等优点。

专家系统的推理机根据以往专家经验而形成的知识库来进行推理。小波分析主要体现在知识库的形成上。由于小波变换的模极大值点能描述一个信号的奇异性，这样，小波分析可将电力系统的某些典型信号加以特征提取，形成电力系统某方面的专家系统知识库。此外，通过存储小波变换的模极大值点和去掉奇异信号后剩余光滑信号的平均值，并通过 Mallat 塔式算法重构小波信号，可实现数据压缩，大大节约存储量，有利于知识库的实现和维护，为推理机的快速、准确工作创造条件。

### 1.3.6 抗电磁干扰

电力网产生大量的电磁干扰信号对提取电力设备运行行为的特征信号的提取造成一定的困难。对于包含系统特征信号和电磁

干扰信号的混合信号，可通过小波变换分解到不同的尺度上，将与干扰信号相联系的小波系数置为零（即清除干扰信号），再应用重构公式构造出所需的信号，也就是实现了所需信号和干扰信号的分离，达到抗电磁干扰的目的。利用小波分析滤去信号中的白噪声，已有了成功的应用。

### 1.3.7 输电线路故障定位

电力系统大部分故障都发生在输电线路上，因此，对输电线路的故障定位就要求及时、准确。虽然，现有的故障测距方法和故障定位仪已能实现这一功能，但在定位的精度以及对故障信号的处理还存在一些问题。如果运用小波变换对具有奇异性和瞬时性的电流、电压信号进行分解，在不同的尺度上明显地反映出故障信号，由此可构造出距离函数（distance function），进而推断出引起此突变信号的故障地点，最终反映到故障距离上，达到故障定位的目的。这样将提高故障定位的精度。

### 1.3.8 电力系统短期负荷预测

目前，电力系统负荷预测方法主要有时间序列法，神经网络法等，主要的模型是 ARMA。由于电力负荷具有特殊的周期性，负荷以天、周、年为周期发生波动，大周期中嵌套小周期。小波变换能将负荷序列分别按照其波动的程度投影到不同的尺度上（即子序列），从而更加清楚地表现出负荷序列的周期性。在此基础上，对不同的子负荷序列分别进行预测，然后通过序列重构，得到完整的小波负荷预测结果，其精确性和准确性都大为提高。

# 第2章 小波变换

## 2.1 引言

在数学中，所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变为另一个函数的运算，一般是含有参变量 $\alpha$ 的积分

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t$$

它的实质就是把属于某函数类 A 中的函数通过上述积分运算变为另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$。其中 $K(t,\alpha)$是一个确定的二元函数,称为积分变换核。采用不同的变换核得到不同的变换。

常见的 Fourier 变换定义为

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{2-1}$$

而相应的 Fourier 逆变换如下式所示

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2-2}$$

从 Fourier 变换问世以来，其应用的广泛性和重要性有目共睹，实际上，这是一种域变换，把时间域（简称时域）和频率域（简称频域）联系起来，即化时域函数为频域函数，在许多情况下，在时域内难以观察的现象和规律，往往在频率域内能较清楚地显示出来。通常所谓的频谱分析，实际上对 $\hat{f}$（$\omega$）进行加工、分析和滤波等处理。

然而，在许多工程技术领域，常见的是时变频率信号、突变信号，例如，地震信号、音乐、雷达回波、电动机故障信号等，