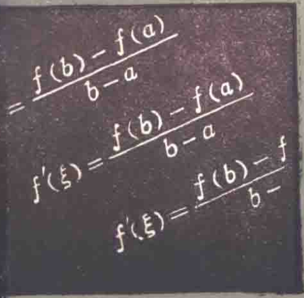

中学数学辅导丛书

导数的应用

孙偉旺　　编

黑龙江科学技术出版社

导数的应用

Daoshu De Yingyong

孙倬旺 编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁　元

导数的应用

孙倬旺　编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32·印张 3.5·字数 70 千
1984 年 8 月第一版·1984 年 8 月第一次印刷
印数：1—45,000

书号：13217·109　　定价：~~0.45~~元

前　　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲(草案)》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容，为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们编辑了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　　录

一、预 备 知 识

本书着重介绍利用导数研究：（一）中值定理（罗尔定理、拉格朗日定理、哥西定理）和泰勒公式；（二）函数的性态（增减性、凹凸性、极值和拐点）；（三）求不定式的极限；（四）解最大值和最小值问题；（五）判定方程的根及近似根的求法；（六）解决初等数学中的某些问题（如证明等式和不等式等）.

我们从读者已经掌握了下述的有关概念出发，作为本书的起点。

这些概念是：

1. 邻域　以点 x_0 为中心的任意一个开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$，叫做点 x_0 的一个邻域. 它是“在点 x_0 附近”的数学上的具体表达.

2. 极限与函数的同号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（$A$ 为有限数），且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，对这个邻域内的 x，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）. 意思是：有极限的函数，若极限为正（或负）的，那么在 x_0 的一个邻域内的函数值也是正（或负）的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且在 x_0 的一个邻域内的一切 x（$x\neq x_0$）所对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant 0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant 0$）.

3. 函数的极限

如果当 x 从 x_0 左侧（即 $x<x_0$）无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，就称 A 是 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

如果当 x 从 x_0 右侧（即 $x>x_0$）无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，就称 A 是 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

如果当 x 无限趋近于 x_0（x_0 可以为无穷大）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

4. 连续

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 左边（或右边）某一邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$），则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续（或右连续）。

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则说 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续。

若函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，在 (a,b) 内连续，在左端点 a 右连续，右端点 b 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

5. 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 上具有最大值和最小值。

介值定理 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，k 为 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个数，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)=k$。若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少有一点 c，使 $f(c)=0$。

6. 导数

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当 $\Delta x\to 0$ 时，若 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在，则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，这一极限叫做 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的左极限（或右极限）存在，就把左极限值（或右极限值）$\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\left(\text{或}\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ 叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左（或右）导数，记作：$f'(x_0-)$（或 $f'(x_0+)$）。

$f'(x_0)$ 存在的充要条件是：$f'(x_0-)$，$f'(x_0+)$ 存在且相等。

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 有无穷导数。这是导数定义的推广。$f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数的几何定义是，曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的切线垂直于 x 轴，其方程是 $x=x_0$。

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导。

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，在左端点 a 存在右导数，在右端点 b 存在左导数，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。

$f(x)$ 在点 x_0 可导和在点 x_0 导数存在指的是一个意思。说导数存在，我们指的是导数为有限数；说导数不存在指的是无穷导数和 $f'(x_0-)\neq f'(x_0+)$，甚至 $f'(x_0-)$，$f'(x_0+)$ 之中一个或都不存在。

二、中值定理

中值定理是微分学的基本定理之一，是研究导数应用的理论根据。

（一）中值定理

定理 1 （**罗尔中值定理**）若函数$f(x)$满足：(1)在闭区间$[a,b]$上连续；(2)在开区间(a,b)内可导；(3)$f(a)=f(b)$，则至少存在一点ξ，$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$。

证明因为在$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必取得最大值M和最小值m，分以下两种情况来证明：

1. 若$M=m$，则$f(x)$在$[a,b]$上为常数函数，于是它的导数在该区间上必恒为零，即$f'(x)=0$。因此，在(a,b)内的任意一点都可取作ξ，使$f'(\xi)=0$。

2. 若$M>m$，由定理的条件(3)$f(a)=f(b)$，可知M、m中至少有一个不等于$f(a)$，也就是说在(a,b)内至少有一点ξ，使$f(\xi)=M$（或$f(\xi)=m$）。

设$f(\xi)=M$，我们证明$f'(\xi)=0$。

$\because$ M是$f(x)$的最大值，即对(a,b)内的所有x，都有 $f(x)\leqslant f(\xi)$ (1)

$\therefore$ 当$\xi+\Delta x\in(a,b)$时，由(1)式有

$$\Delta y=f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0$$

从而，当 $\Delta x>0$ 时，有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0$，由函数的极限与函数的保号性，在点$\xi$的右导数

$$f'(\xi^+)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0 \tag{2}$$

当 $\Delta x<0$ 时，有$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$，同理，左导数

$$f'(\xi^-)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0 \tag{3}$$

另一方面，由定理的条件(2)可知 $f'(\xi)$ 存在，所以，$f'(\xi)=f'(\xi^+)=f(\xi^-)$，由此式结合(2)、(3)式可得

$$f'(\xi)=0$$ 证毕。

罗尔定理的几何意义是：若光滑曲线段 $\overset{\frown}{AB}$（指一段连续且除两端点外处处都有切线），两端点的坐标相等，则在两端点 A、B 之间的曲线段上至少有一点，在该点处的切线平行于 x 轴或者说有水平切线（图 2-1）。

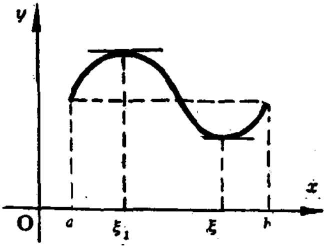

图 2-1

说明 1. 罗尔定理的条件(1)、(2)、(3)是结论 $f'(\xi)=0$ $(\xi\in(a,b))$ 的充分条件。三个条件中若缺少一个，就失去充分性。这可以从下面的例子看出：

1) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (0\leqslant x<1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$ 2) $g(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$

3) $\varphi(x)=x$, $x\in[-1,0]$

$f(x)$不满足条件（1），$g(x)$不满足条件（2），$\varphi(x)$不满足条件（3）。因此对它们不能应用罗尔定理。事实上，它们在给定的区间内，没有ξ，使$f'(\xi)=0$。

2. 罗尔定理的条件（1）、（2）、（3）不是结论$f'(\xi)=0$（$\xi\in(a,b)$）的必要条件，也就是说不全满足条件(1)、(2)、(3)的函数不能断定没有使$f'(\xi)=0$成立的点ξ存在。

如函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}\right)\\ \cos x & \left(\dfrac{3\pi}{4}<x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}\right)\end{cases}$$

罗尔定理的三个条件都不满足，然而有$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$f'(\pi)=0$（图 2-2）。

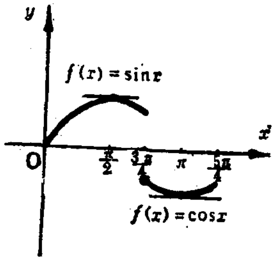

图 2-2

3. 罗尔定理中，$f(x)$在$[a, b]$上连续的条件，不能减弱为在(a,b)内连续，如

$$f(x)=\begin{cases}x & (-1<x<1)\\ 3 & (x=\pm 1)\end{cases}$$

$f(x)$在$(-1,1)$内连续、可导，且$f(-1)=f(1)=3$。但在$x=\pm1$不连续，即不满足“$f(x)$在$[-1,1]$上连续”这一条。事实上，$f(x)$在$(-1, 1)$内$f'(x)=1$，不存在ξ，使$f'(\xi)=0$。

4. 罗尔定理结论中说“至少有一点ξ，使$f'(\xi)=0$”，也就是说起码有一个ξ，也可能有多个，甚至有无穷多个。如：

1) $f(x)=x^2, x\in[-1,1]$，有一个 $\xi=0$，使 $f'=(\xi)=0$；

2) $f(x)=\sin x$，$x\in[0,n\pi]$，有 n 个 $\xi=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，…，$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$，使 $f'(\xi)=0$；

3) $f(x)=C$（常数），$x\in[a,b]$，(a, b)内任意实数均为所求ξ，有无穷多个ξ，使 $f'(\xi)=0$。

定理 2 （拉格朗日中值定理） 若函数 $f(x)$满足：(1)在闭区间$[a,b]$上连续；(2)在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少有一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

在证明之前，我们先看一看定理的几何意义。

因为$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$是过曲线 $y=f(x)$上两点$A(a,f(a))$、$B(b, f(b))$ 的弦 AB 的斜率（图 2-3），而 $f'(\xi)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在横坐标为ξ处点的切线斜率。所以拉格朗日定理的几何意义是：闭区间上的连续曲线，如果两端点之间的每一点都有不垂直于x轴的切线，那么在此曲线的两端点之间至少有一点，曲线在该点的切线平行于连两端点的弦。由罗尔定理与拉格朗日定理的条件和几何意义看出，前者是后者的特殊

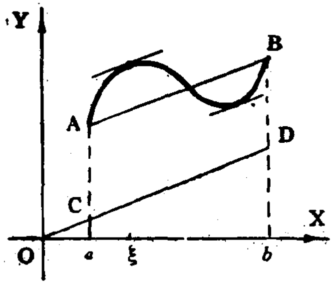

图 2-3

情形，而后者是前者的推广。由此可以看出，如果能够根据定理 2 的条件，设法将函数 $y=f(x)$ 转化为另一个函数 $\varphi(x)$，使 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 的两端点的函数值相等，即 $\varphi(a)=\varphi(b)$，问题就可能得到解决。

由图 2-3 可以看出：只要过原点作平行于弦 AB 的直线，分别交直线 $x=a$，$x=b$ 于 C、D 点。则 $ABDC$ 为平行四边行。于是 $AC=BD$，OD 的方程是

$$y=l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

另外，由图 2-3 可以看出：

$$AC=Aa-Ca=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a$$

$$=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a};$$

$$BD=Bb-Db=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b$$

$$=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

可见，如果曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=l(x)$ 纵坐标之差作为辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

就可以使 $\varphi(a)=\varphi(b)$，$\varphi(x)$ 也满足罗尔定理的其他条件，于是利用罗尔定理就可以推导出拉格朗日定理的结论。

证明 引辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

因为函数 $f(x)$、$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ 在$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，根据连续函数的性质导数的运算法则，可知 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导．又

$$\varphi(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=\varphi(b)$$

由罗尔定理可知，在(a,b)内至少有一点ξ，使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

为便于应用，拉格朗日定理的结论，还可以写成以下几种形式：

1） $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$。这个公式叫做**拉格朗日中值公式**。

2） $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$，$\xi$在$x$和$x+\Delta x$之间。

3） $\because\ x<\xi<x+\Delta x$，$\therefore$ 可令$\frac{\xi-x}{\Delta x}=\theta$，于是$\xi=x+\theta\Delta x$，其中$0<\theta<1$。则

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \qquad (0<\theta<1)$$

2）、3）是拉格朗日中值公式的另外两种形式，也叫做**有限增量公式**。

推理 若在区间 (a,b)内，$f'(x)\equiv 0$，则函数 $f(x)$ 在(a,b)内为常数函数。

证明 在(a,b)内任取两点x_1,x_2，由拉格朗日定理有

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$（$\xi$在$x_1$与$x_2$之间）。由于$f'(x)\equiv 0$，有$f'(\xi)=0$，又$x\neq x_2$。故$f(x_2)-f(x_1)=0$，即$f(x_2)=f(x_1)$。

而x_1，x_2是(a,b)内的任意两点，可知在(a,b)内为常数函数。

说明 1.关于引辅助函数证明定理，同证明几何题引辅助线类似。其思路是：结合要证明定理的条件，构造一个函数$\varphi(x)$，使它既包含要证明定理中所给函数$f(x)$和一个简单函数（一般说线性函数为最简），又要满足已知定理的条件，从而通过$\varphi(x)$由已知定理导出要证定理的结论。对于证明拉格朗日定理，可以从待定系数法进行分析，或从几何意义进行分析，找出辅助函数。《六年制重点中学高中数学课本微积分（征求意见本）》（以后简称《微积分》课本）就是用待定系数法寻找辅助函数的。

从上述引辅助函数的思路出发，于是想到引入辅助函数的可能形式为$\varphi(x)=f(x)+kx$。这样构造函数，$\varphi(x)$包含$f(x)$和简单函数kx。由于$f(x)$、kx在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，所以$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导。再考虑选择适当的待定系数k，使$\varphi(x)$满足罗尔定理的条件(3)，为此令$\varphi(a)=\varphi(b)$，则必须且只需使$f(a)+ka=f(b)+kb$，即

$$k=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是构造出辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

这个函数与我们在证明拉格朗日定理时，通过几何上的分析得出的辅助函数相一致。

正如证明平面几何题时引辅助线的方式不同一样，证明拉格朗日定理也可以引多个辅助函数。

从几何上分析，（见图 2-3），曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=f(x)$，弦 AB 的方程为 $y=L(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，为使 $\varphi(a)=\varphi(b)$，注意到两曲线相交于 A、B 两点，因而两曲线在点 A、B 的纵坐标分别相等。如果我们以同一个 x 对应的 $y=f(x)$ 与 $y=L(x)$ 的纵坐标之差作为辅助函数 $\varphi(x)$，即

$$\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

便能使 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$。显然，$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的其他条件。

同样，可以对同一个 x 所对应的曲线 $y=f(x)$ 与过点 $(a,0)$，且平行于弦 AB 的直线 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 纵坐标之差作为辅助函数，即

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

同样，可以对同一个 x 所对应曲线 $y=f(x)$ 与过点 $(b,0)$，且平行于弦 AB 的直线 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-c}(x-b)$ 纵坐标之差作为辅助函数，即

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

一般地，只要过点 $(a,k_1f(a))$ 或 $(b,k_2f(b))$，$k_1,k_2\in R$，且平行弦 AB 的直线记为 $y=L(x)$，以 $\varphi(x)=f(x)-L(x)$，