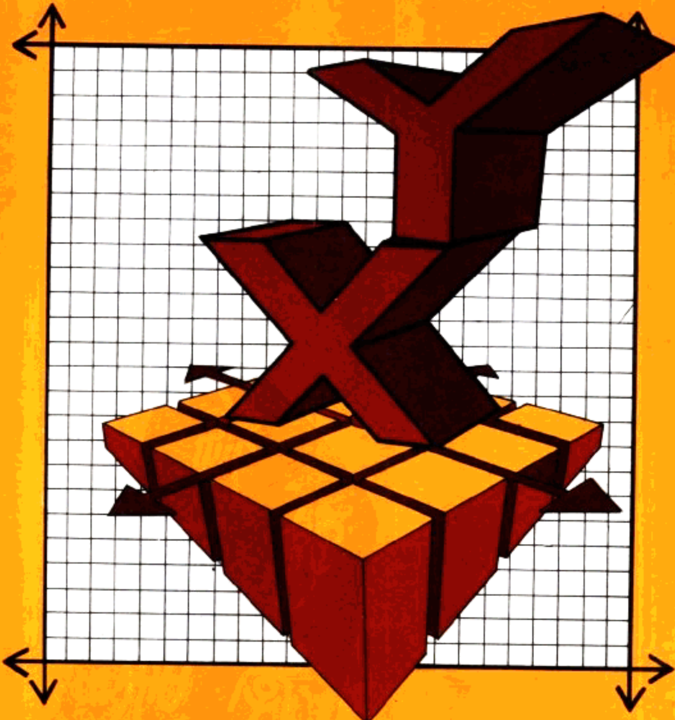
數學研究系列

特殊方程式

陳秋峰博士　編著



超級科技圖書股份有限公司

序

在工程與基礎科學牽涉到的許多問題中，如何藉用數學式子把抽象的概念（或理論）予以具體化（即數量化），並進一步解這些數學式子，是件非常重要的技巧。將概念本身互相作用的眾多因素整理成微分形式，會產生常微分方程式（只有一個主要因素在變化）與偏微分方程式（有兩個或兩個以上的相關因素在變化）。除了用普通常見的方法解這些方程式外，有時又不得不用一些特殊的方法解一些特定型式的微分方程式，而這些方程式在熱力學、流體力學、材料力學、量子力學與電磁學等領域中又常常出現。這些特殊方程式不僅是大專院校理工科系學生所必修，同時亦有益於理工科系學生進一步研究更深入專精的學科。

本書針對一般大專院校理工科系學生的需要，把特殊方程式由淺入深的介紹給讀者，期能在觀念與應用上，加深讀者的印象。本書對於求解特殊方程式的方法與技巧，亦有詳細的敍述，讀者可從這些問題與解答中，瞭解特殊方程式全盤的精髓與重點。此外，本書亦兼顧研究所入學考試中出現的特殊方程式，因此，本書對於各種考試更具有卓越的價值。

最後，作者本身能力有限，雖盡力將本書編的完備，仍不免有疏忽遺漏之處，尚請讀者見諒。

目　錄

第一章
基本理論

在利用分離變數法解偏微分方程式的過程中，經常會導致一些無法用一般函數表示的情況。此時，無窮級數常被使用成一有效的表示方式。首先考慮下述線性二次微分方程式：

$$y'' + P(x)\ y' + Q(x)\ y = 0 \tag{1}$$

其解具有下述的級數型式：

$$y = (x-a)^r \left[a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots\cdots \right] \tag{2}$$

指數 r 通常不是正整數，因此，此解通常亦非泰勒展開式（Taylor expansion）。

進一步分析此式，可以發現好幾種情況，完全視在點 $x = a$ 週圍的係數函數 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 而定。通常變數 x 與 y 以及係數函數 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 爲實數，但此節的討論包含 x, y, $P(x)$ 及 $Q(x)$ 是實數或複數的情況。

若 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 在點 $x = a$ 處是可解析的（analytic），亦即此二係數函數在點 $x = a$ 處具有泰勒展開式，此時稱 $x = a$ 爲微分方程式的「尋常點」（ordinary point）。反之，任何點若非微分方程式的尋常點，則稱爲「異常點」（singular point）。雖然 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 在異常點不具有泰勒展開式，但下述乘積：

$$(x-a)\,P(x) \text{ 與 } (x-a)^2\,Q(x)$$

可能具有泰勒展開式。若一異常點具有此一性質，則稱爲「正則異常點」（regular singular point ），否則稱爲「非正則異常點」（ irregular singular point ）。此處將把重點擺在尋常點與正則異常點。

【例 1】

對於方程式 $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x(x-1)^3}y=0$ 而言，因爲在 $x=0$ 處，$P(x)$ 與 $Q(x)$ 均變成無限大，故 $x=0$ 爲一異常點。在 $x=1$ 處，因爲 $Q(x)$ 變成無限大，故 $x=1$ 亦爲一異常點。至於其它點，則都是尋常點。由於下述二乘積：

$$xP(x)=2$$

與 $$x^2Q(x)=\frac{3x}{(x-1)^3}=3x(1-x)^{-3}=3x(1+3x+6x^2+\cdots\cdots)$$

在 $x=0$ 點是可解析的，亦即可以展開成一系列 x 的正整數冪級數，因此 $x=0$ 點爲一正則異常點。但 $x=1$ 點爲一非正則異常點，因爲在 $x=1$ 點乘積項

$$(x-1)P(x)=\frac{2(x-1)}{x}=2(x-1)[1+(x-1)]^{-1}$$

$$=2(x-1)[1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots\cdots]$$

是可解析的，而

$$(x-1)^2Q(x)=\frac{3}{x(x-1)}$$

變成無限大，故非可解析。

利用尋常點與異常點的觀念，可進一步瞭解下述定理。

【定理 1】

若 $x=a$ 是微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的尋常點，則在此點的每個解都是可解析的，亦即可表示成：

$$y=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots\cdots$$

的形式。此外，各個級數解的收斂半徑等於從點 $x=a$ 到最近之異常點的距離。

【定理2】

若 $x=a$ 點是微分方程式

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$$

的正則異常點，則在此點至少有一解具有下述的展開形式：

$$y=(x-a)^r\left[a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots\cdots\right]$$

且此級數對於 $0<|x-a|<R$ 是收斂的，其中 R 是從 a 點到最近之異常點的距離。

【定理3】

若 $x=a$ 點是微分方程式

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$$

的非正則異常點，通常在此點的解不含單獨的 $x-a$ 級數。

在利用定理1與2推導方程式(2)之冪級數的收斂半徑時，必須留意最接近（但不等於）展開點的異常點可能是複數，即使展開點是實數點。例如下述微分方程式：

$$y''+\frac{1}{1+x^2}\,y'+y=0$$

的係數函數

$$P(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad 與\quad Q(x)=1$$

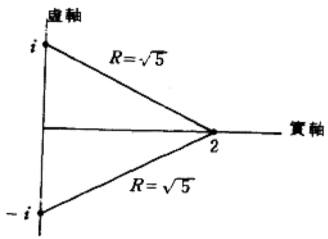


圖1-1 收斂半徑至複數異常點的距離

對於所有的實數 x 而言是可解析的。但 $P(x)$ 在 $x=\pm i$ 點不是可解析的，故這兩點是微分方程式的異常點。所以，在 $x=2$ 點之級數解的收斂半徑 $R=\sqrt{5}$

，這是由於在複數平面上從 $x=2$ 到最近之異常點 $x=i$（或 $x=-i$）的距離等於 $\sqrt{5}$。（參考圖1-1）

利用Frobenius方法可以得到方程式(2)在尋常點或正則異常點的級數解。為了計算方便起見，先改變座標軸使得展開式發生於 $x=0$ 點。此時若 $x=0$ 是尋常點或正則異常點，則 $xP(x)$ 與 $x^2Q(x)$ 是可解析的，因此可產生下式

$$xP(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$$
$$x^2Q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$$

將方程式(2)乘以 x^2，且代入 $xP(x)$ 與 $x^2Q(x)$，產生

$$\begin{aligned}&x^2y''+x(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots)y'\\&\quad+(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots)y=0\end{aligned}\tag{3}$$

假設 y 的形式為

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)\tag{4}$$

其中 $a_0\neq 0$ 以符合廣泛性。將此式代入(3)式，產生

$$\begin{aligned}&x^2[a_0r(r-1)x^{r-2}+a_1(r+1)rx^{r-1}\\&\quad+a_2(r+2)(r+1)x^r+\cdots\cdots]\\&\quad+x(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots)\\&\qquad[a_0rx^{r-1}+a_1(r+1)x^r+a_2(r+2)x^{r+1}+\cdots\cdots]\\&\quad+(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots)(a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\cdots)\\&=0\end{aligned}$$

整理成 x 的各種冪次，得到

$$\begin{aligned}&a_0[r(r-1)+b_0r+c_0]x^r\\&\quad+\{a_1[(r+1)r+b_0(r+1)+c_0]+a_0(b_1r+c_1)\}x^{r+1}\\&\quad+\{a_2[(r+2)(r+1)+b_0(r+2)+c_0]\\&\quad+a_1[b_1(r+1)+c_1]+a_0(b_2r+c_2)\}x^{r+2}+\cdots\cdots=0\end{aligned}\tag{5}$$

只有在所有係數均等於零的條件下(5)式才有單一解，因此產生下述式子：

$$\left.\begin{aligned}&a_0[r(r-1)+b_0r+c_0]=0\\&a_1[(r+1)r+b_0(r+1)+c_0]+a_0(b_1r+c_1)=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2[(r+2)(r+1)+b_0(r+2)+c_0] \\ \quad +a_1[b_1(r+1)+c_1]+a_0(b_2 r+c_2)=0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

因爲 $a_0 \neq 0$，故(6)式中的第一個式子產生

$$r^2+(b_0-1)r+c_0=0 \tag{7}$$

此一 r 的二次方程式稱爲對應於展開點之微分方程式的「指標方程式」(indicial equation)，其根 r_1 與 r_2 稱爲在該點之微分方程式的「指數」(exponents)。對於這些值而言，經常可得到類似(4)式的級數解。此外，從(6)式的逐次方程式(successive equations)，可以決定各個 a 的值。

若指標方程式具有二重根，則很明顯的無法用此一方法得到二個級數解。若指標方程式的兩個根相差一整數，此法亦不能產生第二個級數解。但上述兩種情況可以利用假設 $y=\phi(x)\,y_1(x)$ 得到第二個解，其中 $y_1(x)$ 是第一個級數解。下面例題介紹另一種常用的方法。

【例2】

求方程式 $xy''+y'+y=0$ 在原點的級數解。

由於方程式的 $P(x)=Q(x)=\dfrac{1}{x}$，可知原點爲一正則異常點。利用定理2，至少存在一解具有下述的展開形式：

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

將此式與其兩個導式代入原方程式，可得

$$x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

經整理成 x 的各種冪次後，產生

$$[a_0 r(r-1)+a_0 r]x^{r-1}+[a_1(r+1)r+a_1(r+1)+a_0]x^r$$

$$+\cdots\cdots+[a_n(n+r)(n+r-1)+a_n(n+r)+a_{n-1}]x^{n+r-1}$$
$$+\cdots\cdots=0$$

只有在所有係數都等於零的情況下，此式才有單獨解。因此可得下述方程式以決定 a：

$$a_0 r^2=0$$
$$a_1(r+1)^2+a_0=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n(n+r)^2+a_{n-1}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由於 $a_0\neq 0$，故由第一式知 $r=0$。但爲了便於計算起見，此處仍用 r 作爲一參數而暫緩用 0 取代。由此形成下述關係

$$a_0=a_0 \quad \text{，即 } a_0 \text{ 爲任意值}$$

$$a_1=-\frac{a_0}{(r+1)^2}$$

$$a_2=-\frac{a_1}{(r+2)^2}=\frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2}$$

進一步推導，可得

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{(r+n)^2}=(-1)^n\frac{a_0}{(r+1)^2(r+2)^2\cdots\cdots(r+n)^2}$$

假設 $a_0=1$，則可得

$$\bar{y}=x^r\left[1-\frac{x}{(r+1)^2}+\frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}+\cdots\cdots\right]$$

將此式代入原微分方程式，可得 x^{r-1} 的係數爲 r^2，且其它 x 次冪的係數都等於零。亦即 $\bar{y}$ 滿足下述方程式：

$$x\bar{y}''+\bar{y}'+\bar{y}=r^2x^{r-1} \tag{8}$$

若 $r=0$，則此式變成原方程式，且 $\bar{y}$ 變成下述解：

$$y_1=1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots$$

由於指標方程式 $r^2=0$ 只有一個根 $r=0$，顯然無法找到第二個冪級數解。爲了尋找具有其它形式的第二個解，假設 $\bar{y}$ 是 r 的方程式，且將(8)式對 r 作偏微分，如此產生

$$x\frac{\partial(\bar{y}'')}{\partial r}+\frac{\partial(\bar{y}')}{\partial r}+\frac{\partial(\bar{y})}{\partial r}=2rx^{r-1}+r^2x^{r-1}\ln x$$

當改變對於 x 與 r 的微分時，形成

$$x\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right)''+\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right)'+\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}=r(2+r\ln x)x^{r-1}$$

若令 $r=0$，則此式右半邊變成0，顯示 $\left.\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\right|_{r=0}$ 滿足原微分方程式，且可設定成第二個獨立解。

經過前述之微分後，產生

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}=&\,x^r\ln x\left[1-\frac{x}{(r+1)^2}+\frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2}\right.\\&\left.-\frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}+\cdots\cdots\right]\\&+x^r\left\{-x\frac{-2}{(r+1)^3}+x^2\left[\frac{-2}{(r+1)^3}\frac{1}{(r+2)^2}\right.\right.\\&\left.+\frac{1}{(r+1)^2}\frac{-2}{(r+2)^3}\right]\\&-x^3\left[\frac{1}{(r+2)^2(r+3)^2}\frac{-2}{(r+1)^3}\right.\\&+\frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}\frac{-2}{(r+2)^3}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}\frac{-2}{(r+3)^3}\Big]+\cdots\cdots\Big\}$$

最後，令 $r=0$，產生原方程式的第二個解

$$y_2=\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\bigg|_{r=0}=\ln x\left[1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots\cdots\right]$$

$$+2\left[\frac{x}{(1!)^2}-\frac{x^2}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.-\cdots\cdots\right]$$

因爲 y_2 包含 $\ln x$ 項，而 y_1 沒有，故 y_1 與 y_2 不成比例。亦即 y_1 與 y_2 是二獨立特解，其全解爲 $y=c_1y_1+c_2y_2$。

範例研習

1.試求下列方程式的異常點，並判斷是否爲正則或非正則：

(a) $y''+xy'+y=0$

(b) $e^x y''+2y'-xy=0$

(c) $x^2y''-\lambda^2 y=0$

(d) $x^2y''+y'+y=0$

(e) $(1-x^2)y''+y'+y=0$

(f) $x^2(1-x)y''+(1-x)y'+y=0$

【解答】

比較並考慮微分方程式：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

(a) $P(x)=x$，且 $Q(x)=1$，因所有的點均爲可解析的，故沒有異常點。

(b) $P(x)=\dfrac{2}{e^x}$，且 $Q(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，因任意點均是可解析的，故沒有異常點

(c) $P(x)=0$，且 $Q(x)=-\dfrac{\lambda^2}{x^2}$

可知 $x=0$ 是異常點。又 $xQ(x)=-\dfrac{\lambda^2}{x}$，$x^2Q(x)=-\lambda^2$

可知 $x=0$ 點是可解析的，故 $x=0$ 是正則異常點。

(d) $P(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 且 $Q(x)=\dfrac{1}{x^2}$

可知 $x=0$ 是異常點。又 $xP(x)=\dfrac{1}{x}$，$x^2Q(x)=1$

可知 $x=0$ 點不是可解析的，故 $x=0$ 是非正則異常點。

(e) $P(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，$Q(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

可知 $x=\pm 1$ 是異常點。

當 $x=1$ 時，$(1-x)P(x)=(1-x)\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{1+x}$

$$(1-x)^2Q(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

可知 $x=1$ 是可解析的。

當 $x=-1$ 時，$(1+x)P(x)=(1+x)\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x}$

$$(1+x)^2Q(x)=\frac{1+x}{1-x}$$

可知 $x=-1$ 是可解析的。故 $x=\pm 1$ 是正則異常點。

(f) $P(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$Q(x)=\dfrac{1}{x^2(1-x)}$

可知 $x=0$ 與 $x=1$ 是異常點。

當 $x=0$ 時，$xP(x)=\dfrac{1}{x}$，$xQ(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$，故 $x=0$ 是非正則異常點。

當 $x=1$ 時，$(1-x)P(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，$(1-x)^2Q(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，故 $x=1$ 是正則異常點。

2.試求對應於上題中之各個異常點的指標方程式。

【解答】

所謂指標方程式，係針對正則異常點而言。考慮 $x=0$ 是正則異常點的情形，此時

$$y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$xP(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots,\quad b_0=xP(x)\big|_{x=0}$$

$$x^2Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\cdots,\quad c_0 = x^2Q(x)\big|_{x=0}$$

其指標方程式爲

$$r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0$$

(c)當 $x = 0$ 時，

$$xP(x) = 0 \quad 故 \quad b_0 = 0$$

$$x^2Q(x) = -\lambda^2 \quad 故 \quad c_0 = -\lambda^2$$

∴指標方程式爲 $r^2 - r - \lambda^2 = 0$

(e)當 $x = 1$ 時，令 $\bar{x} = x - 1$，則 $x = 1 + \bar{x}$

已知 $x = 1$ 是 $(1 - x^2)y'' + y' + y = 0$ 的正則異常點。

將 $x = 1 + \bar{x}$，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\bar{x}}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{d\bar{x}^2}$

代入，可得

$$[-(\bar{x})^2 - 2\bar{x}]y'' + y' + y = 0$$

$$y'' - \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}+2)}y' - \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}+2)}y = 0$$

$$\bar{x}P(\bar{x}) = \frac{-1}{\bar{x}+2},\quad b_0 = -\frac{1}{2}$$

$$(\bar{x})^2Q(\bar{x}) = \frac{-\bar{x}}{\bar{x}+2},\quad c_0 = 0$$

故指標方程式爲

$$r^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)r + 0 = 0$$

即　$2r^2 - 3r = 0$

當 $x = -1$ 時，令 $\bar{x} = 1 + x$，則 $x = \bar{x} - 1$

經過座標變換後，可得到

$$[-(\bar{x})^2 + 2\bar{x}]y'' + y' + y = 0$$

$\bar{x} = 0$ 爲此式的正則異常點，

$$y''-\frac{1}{\bar{x}(\bar{x}-2)}y'-\frac{1}{\bar{x}(\bar{x}-2)}y=0$$

$$\bar{x}P(\bar{x})=\frac{-1}{\bar{x}-2}\ ,\quad b_0=\frac{1}{2}$$

$$(\bar{x})^2Q(\bar{x})=\frac{-\bar{x}}{\bar{x}-2}\ ,\quad c_0=0$$

故指標方程式爲

$$r^2+(\frac{1}{2}-1)r+0=0$$

即 $2r^2-r=0$

當 $x=1$ 時，

$$y''(x)+\frac{y'(x)}{x^2}-\frac{y(x)}{x^2(x-1)}=0$$

令 $x-1=\bar{x}$,則 $x=1+\bar{x}$

經過座標變換後，可得到

$$y''(\bar{x})+\frac{y'(\bar{x})}{(\bar{x}+1)^2}+\frac{-y(\bar{x})}{(\bar{x}+1)^2\bar{x}}=0$$

$\bar{x}=0$ 爲此式的正則異常點，

$$\bar{x}P(\bar{x})=\frac{\bar{x}}{(\bar{x}+1)^2}\ ,\quad b_0=0$$

$$(\bar{x})^2Q(\bar{x})=\frac{-\bar{x}}{(\bar{x}+1)^2}\ ,\quad c_0=0$$

故指標方程式爲 $r^2-r=0$

考慮下述方程式，求原點處的兩個獨立冪級數解：

3. $y''+y=0$
4. $2y''+y'-y=0$
5. $y''+xy=0$
6. $9x^2y''+(x+2)y=0$
7. $2x^2y''+3xy'+(x^2-1)y=0$
8. $2x^2y''+(2x^2+3x)y'+(x-1)y=0$