初中自然科学补充讀物

几何定理和証題

許莼舫著

中国青年出版社

几何定理和証題

許莼舫著

*

中国青年出版社出版

北京东四12条老君堂11号

北京市書刊出版業營業許可証出字第036号

公私合营西四印刷厂印刷

新华書店总經售

*

787×1092 1/32 4 3/16印張 87,000字

1951年8月第1版 1954年2月北京第3版

1958年6月北京第15次印刷

印数326,001—377,500

統一書号 13009·38

定价(8)四角二分

初中自然科学补充讀物

几何定理和証題

許蒓舫著

中国青年出版社

1958年·北京

內 容 提 要

定理和証題是几何学的主要內容。本书分三部分。第一部分用具体而淺显的实例来說明有关于定理和証題的基本知識。第二部分依証題的种类，分别举出有正軌可循的法则，並提出代表性的范例。第三部分列举一些活用的实例，启发讀者象定理和証題法来灵活运用。

修訂題記

从1952年秋季开学起，全国初、高中平面几何教材已普遍採用东北人民政府教育部編譯的新教科書．这書是根据苏联十年制学校教科書編譯的，無論在內容和質量上，或編写的方法和形式上，都明显地表現了各方面的优越性．

現在为了要使採用新教科書的讀者得到参考上的更多便利，特地把本書作了一次修訂．

新教科書着重联系实际，証明題多数包含在計算題里，所以純粹的証明題並不多，仅約佔全部習題的百分之十五．本書原有范例、研究題和活用的例子都很多，門类也很广，学習新教科書的同学們要想找些参考材料和补充習題，在这里是可以得到一些收获的．新教科書对於有关比例的和利用計算的証明題都很重視，还包含一些定值問題和極大極小問題等，所以本書在第二章里增加了几节，借此同它取得更多的联系．

本書經修訂后，一定还存在許多缺点，希望讀者指正．

許莼舫　1953年9月

作者的話

一般同学在学習平面几何学的时候，总或多或少会感覺到一些困难。推究原因，主要有以下的四点：(1)同学对於基本观念了解得不够清楚。(2)依照理論系統編排的教科書，不易兼顧到归納类化，因而使初学者难於掌握解題的方法。(3)教科書中的例題太少，引导和啓示得不够，难收观摩之效。(4)同学只知死記定理和法則，不会把它們灵活运用。作者看到了这一点，所以就編了这么一套小書。这套書分“几何定理和証題”、“几何作圖”、“軌跡”和“几何計算”四册。內容主要是帮助同学們了解教科書中的材料，指导同学們运用定理和法則，掌握解題的正确方法，使他們从这些个方面去提高自己对几何学的理論認識。所以，本書是和教科書相輔为用的，也可以說是补助教科書的不足的。

这一册是“几何定理和証題”，定理和証題是全部几何学中最主要的部分，初学的人必須先把这部分基本观念認識清楚，才能收到学習效果。因此，本書第一章里对这些基本观念作了詳細的解釋。为了避免解釋流於空泛，尽量用具体而淺显的实例来說明，一面使同学們获得深刻的印象，一面又可以增加他們学習的兴趣。

在第二章里，依証題的种类，分别举示有正軌可循的法則。每一法則必有一二代表性的范例。范例中首列“思考”或

“解析”一項，启示思索的过程，培养同学們的思考能力，以加强他們解决問題的眞实本領。

本書每講述一个証題法以后，就选录能与范例密切配合的“研究題”若干則，以备同学們習作。对於其中較难的題目，都作了适当的“提示”，借以啓發思路，使同学們乐於尝試。

几何証題非常繁多，証法也千变万化，学習者除掉对有一定法則可循的証題法必須熟練外，还要發揮創造的能力，拿定理和証題法来灵活运用。所以，本書第三章里就列举了一些活用的实例。讀者若能細心研討，在这方面一定会得到显著的进步。

本書每遇到同学們易犯錯誤的地方，就特别指出，促起注意。題材可以推闡，或証法可以变通的，就提供資料，鼓励同学自动研究。在这些地方，希望同学們特别留意，养成細心和深入鑽研的習惯。

本書在編写时虽經仔細斟酌，但錯誤之处还恐难免，希望讀者多多指正。

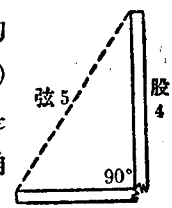
許蒓舫　1951年8月

目　次

一 基本知識

什么是几何定理和証明題

中国最古的一部算書，大概是战国以前的作品，名叫“周髀算經”。在这本書里，記載着商高回答周公的話，有一段說：“把直尺折成一个直角(就是 90° 的角)，假使勾(就是較短的一段)長三，股(就是較長的一段)長四，那末弦(就是尺的兩端間的距离)一定是長五。”意思是說：“假使直角三角形(有一个角是直角的三角形)的兩条直角边的長是三和四，那末斜边(直角所对的边)的長是五。”



在古代埃及建造庙宇时，必須依照一定的方向，他們先观察天上的星，决定南北方向以后，再取一条繩子，按照 3:4:5 的連比，打兩个結，然后沿着結折成一个三角形，放在地上，使一条短边沿南北的方向，那末另一条短边所取的方向一定是东西向。这一件事实，是說明“假使三角形的三边成 3:4:5 的連比，那末兩条短边夾的角是直角”。这些关系，又經过后人的推广，在中国有陈子所說的“把勾，股各自乘，兩数相加(例如 $3^2+4^2=25$)，开平方就得弦(例如 $\sqrt{25}=5$)”；在西洋有希臘人畢达哥拉斯(Pythagoras)所証明的“在直角三角形中，兩条直角边的平方的和，等於斜边的平方(例如 $3^2+4^2=5^2$)”。像这样，用来显示圖形的性質的每一个敍述，它的眞确性須經証明的，就是几何学中的**定理**。

几何学中的系，又叫**推論**，也是定理的一种。譬如說"在直角三角形中，从斜边的平方减去一条直角边的平方，等於另一条直角边的平方"，这是可以从畢氏定理（以后統称商高定理）立刻推得的，所以是該定理的系；其实就是附屬的定理。

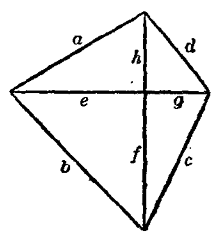
几何学中又有許多要我們証明的習題，通常称做**証明題**，或簡称**証題**，其实也是定理。在教科書里面把証明詳細記下的定理，是在証明别的定理或習題时必須用作根据的，又叫基本定理；至於其余在証定理或習題时不常用，留着給学者作証明的練習的定理，就是証明題。例如前举的商高定理，在几何教科書中都有它的証明，將来在証題上用得很多，所以是基本定理。若另有一定理："四边形的兩条对角綫互相垂直（就是相交而成直角），那末一双对边平方的和等於另一双对边平方的和。"这是要根据商高定理，先确定

$$a^2=e^2+h^2,\quad c^2=f^2+g^2,$$

相加得 $a^2+c^2=e^2+f^2+g^2+h^2,$

同法得 $b^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2,$

就能証明 $a^2+c^2=b^2+d^2.$



这一条定理在証其他定理时不需要用作根据，所以算作証明題，普通都列在習題里面。

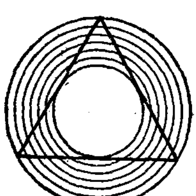
在有些几何教科書中，往往把重要的定理也放在習題里面，譬如"直角三角形的斜边的中点，距离三个角頂一样远"，在証題上用途很大，但常被列在習題里，学者应特别注意。

总之，不論定理，系或証明題，实际都是定理，以后我們統称做定理就是。但"証題"兩字以后常指証明定理的手續而說。

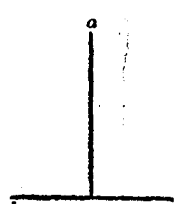
最后要附帶談及的，中国的"周髀算經"里記載的都是关於天文方面的計算，古代人民为了在农業的劳动生产上的需要，必須研究天文，於是發見許多几何定理。埃及人为了解决住的問題，在建筑工程上也發見許多几何定理；又因尼罗河的定期泛濫，須在水退后重行丈量土地，分别耕种，又發見各种圖形求积的定理。从这些事实，証明了几何学的發生和發展，是以生产条件为基础的。人类要生活，就需要劳动生产，一定的生产方式，决定一定的社会形态，同时决定了对形狀和数量上的一定認識。可見几何学同其他的数学或自然科学一样，都是劳动的产物。

几何定理为什么要証明

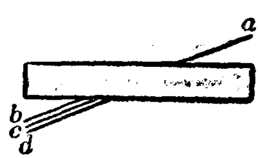
下面有三幅圖，可以用来試試你的眼力。請你先看圖(1)，就"形狀"来观察一下，其中有一个三角形，它的三条边不是都向内弯曲嗎？繼續比較一下圖(2)中 a, b 兩綫段的"大小"，不是一看就覺得 a 比 b 長嗎？最后再就圖(3)中各綫的"位置"来观察，你不是要說 a 綫段同 c (或 d)綫段是在一直綫上的嗎？其实你是完全看錯了！不相信的話，可以用一根尺



(1)



(2)



(3)

来量一下，就知道(1)的三角形的各边都是直綫，(2)的 a, b 兩綫段一样長，(3)的 a 綫段同 b 綫段在一直綫上。

这事实可以說明，我們研究圖形的形狀、大小和位置等性質，不能單靠眼睛，因为有时候眼睛要發生“錯覚”。

但是我們要注意，这里並非是說研究圖形不可以或不需要用眼睛来观察，只是說單憑观察还是不够的。

人們認識一切事物，必然要通过实踐。在实踐中由於感官的覚察，看到各个事物的現象方面，看到各个事物的片面，看到各个事物間的外部联系。这样看到的虽然还是一些粗糙的东西，有时会造成錯覚，但是它畢竟是由人們的意識和客观現实接触而来，是知識的一个开端。这种由感覚来認識事物，是認識的基本阶段，叫做感性認識。

在实踐的繼續中，人們运用腦子，想上一想，加了一番判断和推理的工夫，就把認識推进了一大步。这时能够抓住事物的本質，事物的全面和事物的內部联系。好比粗糙的玉石經过了琢磨，已經晶瑩可照，纖毫畢露了。这是認識的發展阶段，叫做理性認識。

几何学是从感性認識發展到理性認識的，也就是理論和实际联系的。

因为几何学只抽出物体的一部分性質——形狀、大小和位置，作为研究的对象，而且是發展到理性認識的，所以可舍去物体，就物体所占的空間部分用理論来演繹。所謂演繹，就是从已知的理逐步推演而得未知的理，借此找出一个正确的結論。这种离开了物体，而就物体占据过的空間来想像的（即

抽出形狀、大小和位置来研究的)，就是几何学的抽象性。

几何定理的証明，就是用理論演繹的方式，来断定圖形的眞实性質的記敍。証明的主要任务是在於要我們說明为什么在一定条件之下必然产生一定的結論，卽要我們提出根据，証实結論的眞确性，揭發它們之間的內在联系。

几何定理的論証，必須以若干公理为基础(詳見下节)，这些公理是从实踐得来的，与客观事实相符的。从这里出發，推証而得种种定理，这些定理又可与实际生活上遇到的事物互相参証，卽理性認識是符合於感性認識的。可見几何学是根据現实，又从現实發展成一理論体系，轉过来又指导我們对現实作进一步的認識。这样从現实而抽象，再从抽象而指导現实，循环往复以至無穷，可說完全是唯物辯証的。

因此，几何定理的証明决不是純粹抽象的理論，而是与現实結合，卽理論与实踐趋於一致的。

定理的基础

你遇到了喜欢寻根究底的人，不是常被問得啞口無言嗎？这也不能怪你缺乏辯才，因为各种事物的理由，虽然初时是不难解釋的，但是繼續不断地解釋下去，終究会达到一个無法解釋的地步；这时候除掉回答說“这是当然的”以外，再也沒有相当的理由了。譬如在春天的乡間，过去常見在青葱可爱的麦田里面，被人家踏成了一条斜徑，假使我問你：为什么他們不去走田岸，要損坏了麦苗，去走斜徑呢？我想你一定会回答說：这是为了要节省时間的緣故。那末怎样会节省时間呢？你

回答說：因为走斜徑比从田岸上轉弯过去来得近，距离愈近，时間就愈省。那末为什么斜徑的距离比較近呢？这时候你被逼着，只好說“这是当然的”了。其实这一件事实，不但我們人类知道它是当然的，卽使是一条狗，看見你丢下一根肉骨，它也会依着一直綫奔过来，你曾看見过繞着圈子走过来搶肉骨的笨狗嗎？ 可見这“兩点間的距离以直綫为最短”的一句話，可說是自然的眞理，为人人所公認，卽使不加理由——事实上已無法給以明确的理由——也不会使人怀疑的了。

几何学旣然是理論演繹的科学，那末必須依据邏輯的推理法則，去寻求空間的一般性質。所謂邏輯的推理，就是每一句話都有确切的理由；每一理由又須有其所以成立的緣故。这样寻根究底，一定要同上举的实例一样，有一个起点，用来作立論的基础。 因此有些理由只能根据經驗或直覚，肯定它成立，就是認为已極眞确，無可怀疑，以作基本的眞理，这就叫做公理。

譬如我們在几何学中要証 a, b 兩綫段的相等，往往先去寻出另一綫段 c，然后根据种种理由，逐步推得 $a=c$ 和 $b=c$，到这时候，要断定 $a=b$，已經沒有相当的理由可以根据，於是只能作一个“等於同量的量相等”的假定，認为 a, b 二量旣然都等於 c 量，那末这二量的相等已經是自然的眞理，不必再怀疑了。像这样的假定，就是最基本，不必再加理由而可以認为成立的公理。

不論哪一种科学，都有若干專門的名詞。 我們知道了这些名詞的意义，就是对这些名詞有了一个概念，才能着手研究

这一門科学． 每一概念必須解釋它的特殊性質，借此同別的概念有所区別；这样的解釋，就是这一概念的**定义**．几何学上的許多定义，就是在証題时必須使用的概念的解釋，所以也是証題的根据．

譬如我們要想証明前举的商高定理，必先具有“直角三角形”的一个概念．“有一角是直角的三角形，叫做直角三角形”，就是直角三角形的定义． 但是要完全了解这一个定义，又須先有“角”“直角”“三角形”等比較基本的概念，在这几个基本概念的定义里面，再包含着更基本的概念，这样探究下去，就有几个最为基本的概念，像“点”“綫”“面”“体”等类，是構成一切几何圖形的**基本元素**．

上述的公理和定义，都是几何証題时最原始的根据． 有了这一个基础，就可以推演而得一切的空間性質，構成一个几何学的理論体系．

几何学上所用的公理和定义，在初高中的几何教科書里都已詳載，同学們在初学几何时就已熟習，这里不再举示了．

定理的兩半段

諸位假使要請工匠来做家具，一定先要把材料交給他，然后再告訴他所要做的是什么家具，这样他才好动手去做． 材料的种类很多，譬如用木料和竹头都可以做桌子，但是做法各不相同，用的工具也是兩样．你告訴了他是哪一种材料，他才能計划做的方法和准备必需的工具． 家具的种类也很多，譬如桌子和箱子都可以用木料来做，但做法和工具也有不同，一

定先要知道了家具的种类，才可以計划和准备一切。

几何定理的証明，好比是做家具，所以在定理的敘述中間，一定要先把已有的材料告訴出来，然后再把所要做的东西告訴出来，才好确定用什么去做。譬如在定理

(1) 对頂角相等，

(2) 等腰三角形的底角相等

中，所要証明的同是"兩角相等"，但給我們的在(1)是"兩个对頂角"，在(2)是"等腰三角形的兩个底角"，这好比是做同一的家具，但用的是兩种不同的材料。又如在定理

(3) 直角三角形的兩个銳角互为余角，

(4) 直角三角形的兩条直角边的平方的和等於斜边的平方

中，所給我們的同是"一个直角三角形"，但要我們証明的在(3)是"兩个銳角互为余角"，在(4)是"兩条直角边的平方的和等於斜边的平方"，这好比是用同一的材料去做兩种不同的家具。

照上面所举的例子看来，可見不論哪一条几何定理，都可以分做兩半段，前半段可比作已有的材料，是假定这样的，叫做假設，也就是已知这样的，所以又称**已知**；后半段可比作要做的东西，是施以推理所生的結果，叫做終結，也就是初时不知道是否成立，必經証明后才能成立的，所以又称**求証**。

要想証明一条定理，必先把定理的假設和終結分別清楚，好比是認清用什么材料和做什么东西一样，这当然是一件最重要的事情。但是初学几何的人，对於这一点往往感覺困难，这里应該要来詳細說明一下。

定理的一般形式,可写成

$$\underbrace{\text{假使}A\text{是}B}_{\text{假設}},\underbrace{\text{那末}C\text{是}D}_{\text{終結}}.$$

其中的前半段"假使……",有时用"若……"或"已知……",都是假設.又后半段"那末……",有时用"則……"或"求証……",都是終結.

例如:

$$\text{假使}\underbrace{\text{三角形的二边}}_{A}\text{是}\underbrace{\text{相等的}}_{B},\text{那末}\underbrace{\text{这二边所对的角}}_{C}\text{是}\underbrace{\text{相等的}}_{D}.$$

$$\text{假使}\underbrace{\text{两个鄰角的外边}}_{A}\text{是}\underbrace{\text{一直綫}}_{B},\text{那末}\underbrace{\text{这两角}}_{C}\text{是}\underbrace{\text{补角}}_{D}.$$

通常定理的敍述都很簡略,要辨别它的假設和終結,必須依照原意,把写法改换一下.改换的方法,不过是加上几个虛字,使它的意义更明显一些罢了.譬如"对頂角相等"的定理,可改写做一般的形式如下:

$$\text{假使}\underbrace{\text{二角}}_{A}\text{是}\underbrace{\text{对頂角}}_{B},\text{那末}\underbrace{\text{这二角}}_{C}\text{是}\underbrace{\text{相等的}}_{D}.$$

有些定理的假設比較复杂,一般的形式是

$$\left.\begin{array}{l}\text{假使 }A\text{ 是 }B,\\ \text{又}\quad E\text{ 是 }F,\end{array}\right\}\text{那末 }C\text{ 是 }D.$$

例如"等腰三角形頂角的平分綫,必平分底边",可改成

$$\left.\begin{array}{l}\text{假使}\underbrace{\text{一个三角形}}_{A}\text{是}\underbrace{\text{等腰的}}_{B},\\ \text{又有}\underbrace{\text{一直綫}}_{E}\text{是}\underbrace{\text{平分这三角形的頂角的}}_{F},\end{array}\right\}\text{那末}\underbrace{\text{这直綫}}_{C}\text{是}\underbrace{\text{平分底边的}}_{D}.$$