初等数学专题选讲

北京市西城区教育教学研究中心 编

中国农业机械出版社

初等数学专题选讲
北京市西城区教育教学研究中心

中国农业机械出版社出版
北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号
沈阳市第二印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
新华书店经售

*

787×1092 32开 9 $^{4}/_{16}$印张 205千字
1982年12月北京第一版 · 1982年12月沈阳第一次印刷
印数：00,001—55,300 定价：0.78元
统一书号：7216·46

前 言

为使学生掌握坚实的数学基础知识和基本技能，不断地发展智力，提高分析问题和解决问题的能力，我们将我区近几年来举办的数学课外小组讲座资料分成专题，加以系统整理，在教学大纲的基础上适当提高，使学生能更深入地理解教学大纲中所要求的内容。

为便于学生阅读和教师参考，对题目的解法侧重于 明思路和分析解题方法，每个专题后面并配有练习题和解答。

参加本书编写工作的有：北京三中陈萃联、北京六中孙家钰、北京八中蒋文蔚、北京十三中李林森、北京四十二中俞裕安、北京四十四中张振江、北京一一〇中孟令尧、北京一六一中肖淑英、北京师大附属实验中学于宗英，张锦斋、北京师大附属第二中学陈俊辉、张自文、北京西城区教育教学研究中心李振纯、欧阳东方、李松文等同志。

由于我们的水平有限，错误在所难免，希望读者批评指正。

北京市西城区教育教学研究中心

一九八二年二月

目 录

一、方　　程

北京一六一中　肖淑英

方程是中学代数的重点内容之一，它在数学中占很重要的地位，方程的知识不仅用于解决数学本身的三角、几何、解析几何方面的问题，而且在解决物理、化学和实际问题时也是重要的工具。中学阶段所学的方程有整式方程、分式方程、无理方程、指数方程、对数方程和三角方程等，掌握有关基础知识是解这些方程的基础。解方程的理论依据是方程变形定理。解方程的基本思路是将高次方程向低次方程转化，多元方程向一元方程转化，化难为易，化繁为简。由于方程的内容很多，仅以下列几方面的题目为例。

（一）设辅助未知数解方程

这是一个重要的解方程的方法，它可以起到化难为易，化繁为简的作用。

例1　解方程　$x^4+(x-4)^4=626$

分析：若展开 $(x-4)^4$ 则得四次方程，求这个方程的解较复杂，但若解方程 $(y-a)^4+(y+a)^4=m$，则展开 $(y-a)^4$、$(y+a)^4$ 后，可整理得一个双二次方程，求解简便。取原方程中的两个底 x 和 $x-4$ 的等差中项 $x-2$，令 $x-2=y$ 代入，则可得后一形式的方程。

解：设　$x-2=y$，则 $x=y+2$，代入原方程，

得　$(y+2)^4+(y-2)^4=626$，展开整理后，得

$$y^4+24y^2-297=0,\ (y^2-9)(y^2+33)=0$$

$\therefore\quad y=\pm 3,\quad y=\pm\sqrt{33}\,i$

$\therefore\quad x_1=5,\ x_2=-1,\ x_3=2+\sqrt{33}i,\ x_4=2-\sqrt{33}i$

例 2　解方程$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0$

分析：若将方程的左边展开，再整理为三次方程的标准式，计算过程比较繁。由于这个方程的特点是关于 a、b、c 的对称式，令$x+a+b+c=y$，可以简化解题过程。

解：设　$x+a+b+c=y$，代入原方程，得

$(y-a)(y-b)(y-c)+abc=0$，整理后，得

$y^3-(a+b+c)y^2+(ab+ac+bc)y=0$

$y[y^2-(a+b+c)y+(ab+ac+bc)]=0$

$$y=0,\ y=\frac{1}{2}[(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)}]$$

$\therefore\quad x_1=-(a+b+c)$,

$$x_2=-\frac{1}{2}[a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)}],$$

$$x_3=-\frac{1}{2}[a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)}]$$

例 3　解方程$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x=6$

分析：这是个指数方程，

$\because\quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$

$$\therefore\quad \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$

因此用辅助未知数可将原方程转化为一元二次方程求解。

解：设　$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=y$，代入原方程，得

$$y+\frac{1}{y}=6,\ y^2-6y+1=0,\ y=3\pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=3+2\sqrt{2}$时，$\frac{x}{2}=1$， $x=2$

$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=3-2\sqrt{2}$时，$\frac{x}{2}=-1, x=-2$

$\therefore$ $x_1=2, x_2=-2$是原方程的解。

小结：用换元法可解的方程，必具有特殊性，引用辅助未知数后，将原方程转化为易解的方程。因此观察方程的特点，熟练掌握几种基本形式的方程的解法，是使用换元法的首要条件。

（二）有关一元二次方程的根的判别式问题

一元二次方程的根的判别式，是实数系数的一元二次方程有无实数根的充要条件，应用比较广泛。

例 1 方程$(1-m^2)x^2+2mx-1=0$的两个根都在 0 和 1 之间，求实数m的范围。

分析：根据方程的两个根都在 0 和 1 之间，可知原方程为一元二次方程，$1-m^2\neq 0$，且方程的根为实数。故应在方程有实数根的条件下，用m 的代数式表示方程的两个根，再根据两个根的范围求m的值。

解：方程的根的判别式$\Delta=(2m)^2-4(1-m^2)(-1)=4$

$\therefore$ $m\neq\pm 1$ 时方程有两个不相等的实数根。

$$x_1=\frac{-2m+2}{2(1-m^2)}=\frac{2(1-m)}{2(1+m)(1-m)}=\frac{1}{1+m},$$

$$x_2=\frac{-2m-2}{2(1-m^2)}=\frac{-2(1+m)}{2(1+m)(1-m)}=\frac{1}{m-1}.$$

$\because$ 方程的两个根均在 0 和 1 之间，

$$\therefore \begin{cases} 0<\dfrac{1}{1+m}<1 & ① \\ 0<\dfrac{1}{m-1}<1 & ② \end{cases}$$

由①得 $m>0$，由②得 $m>2$，

∴ $m>2$ 是不等式组的解。

答：$m>2$ 时原方程的两个根均在 0 和 1 之间。

例 2 设 m、n 分别是正系数二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根的等差中项和等比中项，并且 m、n同号，求证：

（1）$m<n$ 时，方程有两个不相等的实根；

（2）$m>n$ 时，方程没有实根。

分析：正系数的一元二次方程有无实数根决定于方程的根的判别式 b^2-4ac的值。本题要证明在m、n不相等的条件下确定根的情况，就需要先确定方程中各项的系数 a、b、c与m、n之间的关系，以便用 m、n 表示判别式，从而确定方程的根的情况。

证：设 x_1、x_2为方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，则x_1+x_2

$$=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

∵ m、n分别为方程$ax^2+bx+c=0$的两个根的等差中项和等比中项，

∴ $x_1+x_2=2m$，$x_1\cdot x_2=n^2$

∴ $-\dfrac{b}{a}=2m$，$\dfrac{c}{a}=n^2$，即$b=-2am$，$c=an^2$

∵ a、b、c均为正数，m、n同号。

∴ $m<0$，$n<0$，方程的根的判别式：

$\varDelta=b^2-4ac=(-2am)^2-4a\cdot an^2=4a^2(m+n)(m-n)$，

此式中 $a^2>0$，$m+n<0$

（1）若 $m-n<0$，即 $m<n$ 时，则 $\Delta>0$，∴ 原方程有两个不相等的实数根。

（2）若 $m-n>0$，即 $m>n$ 时，则 $\Delta<0$，∴ 原方程没有实数根。

例 3 已知 a、b 是任意整数，试证方程 $x^2+10ax+5b+3=0$ 和 $x^2+10ax+5b-3=0$ 都没有整数根。

分析：这两个一元二次方程都是二次项系数等于 1 的整数系数方程，若有有理数根，其根必为整数，此时根的判别式的值为完全平方数。今要证明它们都没有整数根，只需证明这两个方程的根的判别式的值都不是完全平方数，故从方程的根的判别式入手。

证：方程 $x^2+10ax+5b+3=0$ 的根的判别式：

$$\Delta_1=(10a)^2-4\ (5b+3)=4(25a^2-5b-3)$$

方程 $x^2+10ax+5b-3=0$ 的根的判别式：

$$\Delta_2=(10a)^2-4\ (5b-3)=4(25a^2-5b+3)$$

一个整数是完全平方数的必要条件是末位数字为0、1、4、5、6、9之一。

∵ $25a^2-5b\pm3=5(5a^2-b)\pm3$，$a$、$b$ 为整数时 $5(5a^2-b)$ 的末位数字为 5 或 0。

∴ $5(5a^2-b)+3$ 的末位数字为 8 或 3；$5(5a^2-b)-3$ 的末位数字为 2 或 7。

∴ 无论 a、b 为任何整数时，Δ_1 和 Δ_2 的值的末位数字都不是 0、1、4、5、6、9 之一，即原来两个方程的根的判别式的值都不是完全平方数。∴ a、b 为任何整数时，原来的两个方程都没有整数根。

小结：在什么条件下使用根的判别式是比较明显的，但

在解题时要注意两点：

（1）其条件是对实数系数的方程而言，即方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中a、b、c为实数。

例 解方程$x^2+(1+2i)x-3+i=0$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(-3+i)=9$$

$$x=\frac{-(1+2i)\pm3}{2},\ x_1=1-i,\ x_2=-2-i$$

$\because$ 方程的系数是虚数，虽其判别式的值为正数，但方程的解并非实数，而是虚数。

（2）判别式是对二次方程而言，故不能忽视二次项的系数不等于0这一条件。

例 k是什么实数时方程$(k-1)x^2-(2k+1)x+k+3=0$有两个不相等的实数根？

解：$\Delta=(2k+1)^2-4(k-1)(k+3)=-4k+13$

要使方程有两个不相等的实数根，其判别式的值必为正数。

$\therefore\quad -4k+13>0,\ k<3\frac{1}{4}$

$\because$ 原方程为二次方程，$\therefore\quad k\neq1$

$\therefore\quad k<3\frac{1}{4}(k\neq1)$时原方程有两个不相等的实数根。

若在结论中答$k<3\frac{1}{4}$，那么$k=1$时虽符合$k<3\frac{1}{4}$，但对原方程来说就是一次方程$3x-4=0$，就不会出现方程有两个实根的结论。

（三）一元n次方程的根与系数间的关系问题

如果一元n次方程$na_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ ($a\neq0$)的根是x_1、x_2、x_3、$\cdots x_n$，则根与系数间有下列关系：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots\cdot x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

一元n次方程的根与系数间的关系，是解有关方程的重要理论依据，有时也应用这个关系解特殊的方程组。

例 1 如果二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的和、两个根的平方和与两个根的立方和成等比数列，求 a、b、c 之间的关系。

分析： ∵ 方程的两个根的和、平方和、立方和可以用系数 a、b、c 表示，本题将两个根的和、平方和与立方和成等比数列的关系式转化为两个根的和或积的关系，即可求得 a、b、c 之间的关系。

解： 设α、β为方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，则$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

根据已知条件，得 $(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)$，变形为

$$[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2=(\alpha+\beta)^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+4\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta)^2[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$$

$$\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta]=0$$

将 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$代入上式，得

$$\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2-4ac}{a^2}=0 \quad \therefore \quad c(b^2-4ac)=0$$

$\therefore\quad c=0$或$b^2-4ac=0$

例 2 已知实数系数方程 $x^3+mx^2+33x-65=0$ 的一个虚根的模数等于$\sqrt{13}$，求m值，并解方程。

分析：因原方程为实数系数方程，若有虚根$a+bi$，必有另一虚根 $a-bi$，又知 $|a+bi|=\sqrt{13}$，$\therefore$ $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=13$，故由三个根的乘积等于 65 可以求出第三个根，由此可以确定m的值和方程的其余两个根。

解：$\because$ 原方程为实数系数方程，且有虚根，$\therefore$ 可设方程的三个根为$a+bi$、$a-bi$和α，则

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+\alpha=-m\\(a+bi)(a-bi)+(a+bi)\alpha+(a-bi)\alpha=33\\(a+bi)(a-bi)\alpha=65\end{cases}$$

整理后，得

$$\begin{cases}2a+\alpha=-m & ①\\a^2+b^2+2a\alpha=33 & ②\\(a^2+b^2)\alpha=65 & ③\end{cases}$$

$\because$ $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$，$\therefore$ $a^2+b^2=13$，代入③，得$13\alpha=65$，$\alpha=5$。将 $a^2+b^2=13$、$\alpha=5$ 代入②，得 $a=2$。

$\therefore\quad 2^2+b^2=13$，$b=\pm3$

将 a、α 的值代入①，得 $m=-9$

$\therefore\quad 2+3i$、$2-3i$、5为原方程的解，$m=-9$

例 3

解方程组 $\begin{cases}a^3-a^2x+ay-z=0\\b^3-b^2x+by-z=0\\c^3-c^2x+cy-z=0\end{cases}$

分析：原方程组可整理成三元一次方程组

$$\begin{cases} a^2x - ay + z = a^3 \\ b^2x - by + z = b^3 \\ c^2x - cy + z = c^3 \end{cases}$$

一般用行列式或消元法解，但计算过程较繁，这个方程组的特点是由 a、b、c 分别与x、y、z 组成三个形式相同的三个方程组成的方程组。可以把它们看做是某一个三次方程的根，x、y、z 为该方程的系数，根据方程的根与系数的关系求出 x、y、z 的值。

解：设 a、b、c 是三次方程$X^3 - xX^2 + yX - z = 0$ 的根，则 $-x$、y、$-z$ 分别为此方程的二次项系数、一次项系数和常数项。根据一元n次方程的根与系数的关系，得 $x = a + b + c$、$y = ab + bc + ca$、$z = abc$。

$$\therefore \quad \text{原方程组的解是} \begin{cases} x = a + b + c \\ y = ab + ac + bc \\ z = abc \end{cases}$$

小结：根据一元 n 次方程的定义：方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$，其中 n 是自然数，a_0、a_1、a_2、$\cdots a_n$是任何复数，$a_0 \neq 0$，叫做x的一元n次方程。那么方程根与系数间的关系就不限于实数系数的方程，系数为虚数时也成立。例如方程$x^2 - (3-2i)x + 5 - 5i = 0$的根$x_1 = 2 + i$，$x_2 = 1 - 3i$，则$x_1 + x_2 = 3 - 2i$，$x_1x_2 = 5 - 5i$，满足方程的根与系数间的关系。

在使用根与系数的关系解方程时，要注意除给出方程外，还要具有其他条件时方能使用（如例 2），不能直接用来解方程。例如，

解方程 $x^3+bx^2+cx+\frac{1}{8}(4bc-b^3)=0$

解：设 x_1、x_2、x_3 为方程的根，根据方程的根与系数间的关系，得方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b & ① \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c & ② \\ x_1x_2x_3=-\frac{1}{8}(4bc-b^3) & ③ \end{cases}$$

由② $x_1x_2+(x_1+x_2)x_3=c$ ④

由① $x_1+x_2=-b-x_3$ ⑤

由③ $x_1x_2=-\frac{1}{8x_3}(4bc-b^3)$ ⑥

将⑤⑥代入④，得 $-\frac{1}{8x_3}(4bc-b^3)+(-b-x_3)x_3=c$，

去分母，整理后得方程 $x_3^3+bx_3^2+cx_3-\frac{1}{8}(4bc-b^3)=0$。

此方程与原方程相同，故不能用根与系数间的关系直接解方程。

（四）求方程的整数解

在解决实际问题时，经常通过列方程求解，而有些问题中的未知量必须用整数或正整数表示。怎样求方程的整数解？现举例如下：

例 1 k 是哪些整数时，二次方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 的两个根都是正整数？

分析：因为二次方程的两个根都是正整数，可知 $k^2-1\neq0$，且应在判别式 $\Delta\geqslant0$ 的条件下求出方程的两个根 x_1 和 x_2，然后确定使根为正整数的 k 值。

解：根的判别式 $\Delta=[-6(3k-1)]^2-4\times72(k^2-1)=$

$36(k-3)^2$，∵ $k^2-1\neq0$，∴ $k\neq\pm1$的实数时，原方程都有两个实数解。

$$x_1=\frac{12}{k+1} \quad ①$$

$$x_2=\frac{6}{k-1} \quad ②$$

若 x_1 为正整数，则①中 $k+1>0$，且 $k+1$ 为12的约数，即 $k+1=1$、2、3、4、6、12时，k 值分别为0、1、2、3、5、11。若x_2为正整数，则②中$k-1>0$，且$k-1$为 6 的约数，即$k-1=1$、2、3、6时，k值分别为2、3、4、7。

∴ 当$k=2$或$k=3$时，x_1、x_2同时为正整数。

答：$k=2$或$k=3$时，原方程的两个根都是正整数。

例 2 求方程$4x^2-4xy-3y^2=5$的整数解。

分析：这是二元二次 $Ax^2+Bxy+cy^2=D$ 形式的方程，从几何意义上看，因为方程的判别式 $B^2-4AC=(-4)^2-4\times4\times(-3)=64>0$，所以图象为双曲线，双曲线上的整数点即为所求。如何通过代数法求解，则需根据整数的性质。

解：∵ $4x^2-4xy-3y^2=(2x-3y)(2x+y)$

∴ $(2x-3y)(2x+y)=5$

∵ x、y 均为整数，∴ $2x-3y$、$2x+y$ 均为整数，且它们之积等于5，因此 $2x-3y$、$2x+y$ 均为 5 的约数，由此得下列方程组：

(1) $\begin{cases}2x-3y=1\\2x+y=5\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y=5\\2x+y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x-3y=-1\\2x+y=-5\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x-3y=-5\\2x+y=-1\end{cases}$

$\therefore\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\ \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\ \begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\ \begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ 为原方程的整数解。

例 3 我国古代问题《百鸡术》：公鸡一只值钱五，母鸡一只值钱三，小鸡三只值钱一。今有一百钱，买鸡一百只，问公鸡、母鸡、小鸡各买几只？

分析：原古书中的解法是从母鸡每减少 7 只，就要增加 4 只公鸡和 3 只小鸡出发的，是一个凑合相当的算法。现从布列方程考虑，系求方程组的正整数解的问题。

解：设买公鸡 x 只、母鸡 y 只和小鸡 z 只，依题意列方程组：

$$\begin{cases}x+y+z=100 & ①\\5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 & ②\end{cases}$$

由② $15x+9y+z=300$ ③

③－① $14x+8y=200$，$7x+4y=100$

$$y=\frac{100-7x}{4}=25-\frac{7}{4}x$$

$\because$ x、y都是正整数，$\therefore$ $0<x<14\frac{2}{7}$，且x为 4 的倍数，$\therefore$ 当 $x=4$、8、12时，y 值分别等于18、11、4。将 x，y 的值代入①，得方程组的解：

$$\begin{cases}x=4\\y=18\\z=78\end{cases}\qquad\begin{cases}x=8\\y=11\\z=81\end{cases}\qquad\begin{cases}x=12\\y=4\\z=84\end{cases}$$

答：共有三种买法：买公鸡 4 只、母鸡 18 只、小鸡 78 只；或买公鸡 8 只、母鸡11只、小鸡81只；或买公鸡12只、

母鸡4只、小鸡84只。

例4 计划把一条长 60cm的铁丝截成几段，其中最长的一段是15cm，有一段长为12cm，除去 12cm 这段外，其余各段长恰成等差数列，问可截成多少段？每段各长多少？

分析：题中除去 12cm 这段外，其余各段的长成等差数列，因此题中的已知条件为：一个等差数列的末项为15，各项的和为48，求项数和各项的值。

解：设把长为 48cm 的铁丝分为 n 段，这 n 段的长成等差数列，最短的一段长为 $a_1$cm。根据等差数列前n项和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，得

$$\frac{n(a_1+15)}{2}=48,\quad n(a_1+15)=96$$

$\because$ n为正整数，且$n>1$，$0<a_1<15$

$\therefore$ $3<n<7$，只有$n=4$、5、6时符合题意。

当$n=4$时，共截得5段，它们的长分别为9cm、11cm、12cm、13cm和15cm。

当$n=5$时，共截得6段，它们的长分别为4.2cm、6.9cm、9.6cm、12cm、12.3cm和15cm。

当$n=6$时，共截得7段，它们的长分别为1cm、3.8cm、6.6cm、9.4cm、12cm、12.2cm和15cm。

小结：求方程的整数解问题类型较多，解法多样。以上例题仅结合课内所学的知识，一种是含有参数的方程，一种为不定方程，其解法的共同点均利用整数的性质、约数、倍数等概念。如能分析每个问题的特点，掌握有关基础知识，将问题转化为用整数的性质解决的问题，那么，这类问题就可以较顺利地得到解决。