近似计算浅说

錢克仁著

江苏人民出版社

近似計算淺說

錢克仁著

●

江苏省書刊出版營业許可証出〇〇一号
江苏人民出版社出版
南京湖南路七号
新华書店江苏分店发行 江苏新华印刷厂印刷

●

开本 787×1092 耗1/32 印張 2 字数 39,000
一九五五年十一月第一版 一九五七年一月第二版
一九五七年一月南京第三次印刷
印数 6,131—20,130

統一書号： 13100·6
定 价： 二角二分

前　　言

本書是一本关于近似計算的“淺說”，內容只談及誤差的一般概念，近似值加、减、乘、除、开平方的基本运算，省略算法，以及一些近似計算的公式。对于理論的叙述，力求淺显易懂，有些証明亦不超过初中二年級学生的数学知識。

有些結論沒有作純理論的推导，只是作为归納若干例題后抽象化的自然結果。因此本書是一本普及性的小册子，可供熟練技工閱讀，可供技术学校学生作参考，亦可作初中学生的課外讀物。

本書用四舍五入法来取定一个数的有效数碼，因为在日常生活中，四舍五入法是比較最自然的。为了符合技术計算中的一般需要，本書中各种計算的精确度一般都取定在1%以內。

書中有 80 个做好了的例題，例題內容多选自日常生活及技术上实際計算中的問題，并有 37 个习題。

錢克仁

一九五五年六月

目　　录

一 近似值

我們在实际生活中所遇到的数，有兩种情况：一种是正确的数值；另一种是不正确的，但它是近似的数值。我們把第一种数称为眞值，第二种数称为近似值。当我們不可能得到眞值的时候，我們就用近似值来代替。

〔例一〕 某班上有45个学生。“45”这个数是眞值，因为学生可以一个一个地数得到的。

〔例二〕 这个齿輪上有60个齿。“60”这个数也是眞值，輪齿是可以一个一个地数清楚的。

〔例三〕 某汽車的載重量是3吨。这个“3”是个近似值，因为載重量是个“約数”，汽車上多装一、二斤貨物仍然是可以的。

〔例四〕 上海到南京的距离是312公里。这“312”是个近似值，因为測量的仪器不完全准确，停車的地方也不是每次完全絕对相同。

〔例五〕 某人跑一百米的成績是12.4秒。“12.4秒”是个近似值，因为跑表上沒有再精細的刻度，这成績可能是12.38秒、12.37秒、12.43秒等值的估計結果。

〔例六〕 圓的面积$A=\pi r^2$。r为圓半徑的長度，π是一个无穷位而不循环的小数。我們計算时，有时用3.14来代

π，有时用3.142来代π。3.14、3.142等等都是π的近似值。

由此，我們知道，当度量各种量的时候，或用数学常数的时候，我們常常用近似值来表示它們。利用近似值来計算，其結果也是近似值。度量的时候，有时精密一些，所得的誤差較小，有时粗糙一些，所得的誤差就大一些。因此，由各种度量結果計算的最后答案的近似值，也要考慮它的誤差和精确程度。

近似計算的理論要解决下列几个問題：（1）度量的精确程度如何表示？（2）怎样进行近似值的計算？（3）怎样确定在近似值計算結果中所产生的誤差？

二　近似值的表示法、有效数碼

对于近似值来說，2.5尺与2.50尺两个量是有区别的；0.02克与0.020克也是有区别的，等等。2.5尺表示某長度在量的时候能准确到十分之一尺，在寸以下的刻度就不清楚了；事实上，这个長度可能是2.51尺或是2.48尺，而我們把它記为2.5尺。2.50尺表示某長度在量的时候能准确到百分之一尺的地步（即准确到分），但分以下的刻度就不清楚了；2.50尺这个量可能是2.502尺、2.498尺的表示，但不能是2.532尺或2.481尺等的表示，因后面二数与2.50尺的相差已大于0.01尺（1分）了。

在整数的近似值的写法上，也是有区别的。我們写出542这个数的时候，就表示这个数是正确到个位数的数。例如，我

們实际的統計到学校学生的人数是542人。假若，在不必完全准确的情形下，我們有时說，学校有五百四十个学生，这是一种大約的数，是一种估計，我們用 54×10 这样的数来表示它，这就是說，这个学生数是五百四十上下，和学生的眞实数目是不会相差到五个以上的。又譬如，某城市有二十万居民，我們用20万，或 20×10^4 来表示，这就是說，在万位以下的数，我們不去算了。这城市的居民总在二十万上下，即是十九万多些，但不会到二十一万，也不会恰恰是二十万人。又如，某种产品最近的日产量是3810，3805，3811，3812，3809；我們就說，每日約生产三千八百一十件，我們用 381×10 来表示这个数。博物院里的某件古物，傳說是三千年前的东西。这里三千年是个約数，是个近似值。若是三千一百年，我們也說是三千年前的。因此，假若我們隔了十年，再去看这件古物的时候，講解員仍然只說："这是三千年前的古物"，而不会說"三千另十年前的古物"的。这件古物的年代写起来，应作："3×10^3 年前"。

一个数除去了它左边的"零"以外，我們把留下的所有的准确数碼，称为那个数的"有效数碼"。例如，2.5是兩个有效数碼的数；2.50是三个有效数碼的数；0.02是一个有效数碼的数；0.00345是三个有效数碼的数；0.003045是四个有效数碼的数；381×10 是三个有效数碼的数；3810是四个有效数碼的数。

三　四舍五入的規則

在进行計算的时候，我們常要把参加計算的近似值或眞值施行“四舍五入”，就是把这些近似值或眞值的右端的一个数碼或几个数碼割弃不要。为了保証四舍五入以后所得的数能够有最好的近似限度，我們有下面的一些四舍五入的規則。

規則1.　若是我們所要割弃部分的第一个数碼大于5，那末我們要將保留部分的最末一个数碼上加上一个單位。我們要割弃部分的第一个数碼若是等于5，而且这个5以后还有別的数碼，那末我們也將保留部分的最末一个数碼上加上一个單位。

〔例一〕　將数43.683用四舍五入法，求得一个有三个有效数碼的数。我們所要割弃部分的第一个数碼是8，8是大于5的；所以就在保留的部分43.6的最末一个有效数碼6上加上1，最后得到43.7。用43.7比用43.6更为接近43.683。

〔例二〕　將数367.253用四舍五入法，求得一个有四个有效数碼的数。我們所要割弃的数碼是53，虽然它的第一位是5，但是5后还有3，仍是大于5的；所以我們就在保留部分367.2的最末一个有效数碼2上加上1，最后得到367.3。367.3比367.2更接近于原数367.253。

規則2.　若是我們所要割弃部分的第一个数碼小于5，那末我們就用所保留部分的数碼。

〔例三〕　將数56.43用四舍五入法，求得一个有二个有

效数碼的数。我們所要割弃的第一个数碼是4，4小于5，所以我們就得56。用56比用57更为接近原数56.43。

规則3. 若是我們所要割弃部分的数碼是5，5以后沒有别的数碼，那末我們要用“近似值的偶数法則”，就是：若保留部分的末位数是偶数的話，就不必在它上面加1；若是保留部分的末位数是奇数的話，就加上1，使末位数成为偶数。

〔例四〕 將数0.745用四舍五入法，求得一个有二个有效数碼的数。因为保留部分的末位数是4，4是偶数，所以我們就割去5，得到0.74。事实上，用0.74和用0.75来表示0.745，它們与0.745的接近程度是同样的。

〔例五〕 將数8.75用四舍五入法，求得一个有二个有效数碼的数。因为7是个奇数，所以我們在保留部分的末位数碼7上加上1，得到8.8。8.8和8.7与8.75的接近程度是同样的。

〔例六〕 將数18.52，19.5，0.445，0.00255，0.00265，用四舍五入法，求得有二个有效数碼的数。根据上列規則，我們可以得到19，20，0.44，0.0026，0.0026。

我們用規則3，割弃5或在保留部分最末位上加上1，这在事实上，并不能使我們得到比較更接近于原数的近似值。若是我們規定“若保留部分末位数是偶数，那末在末位上加1；若保留部分末位数是奇数，那末就割弃那个5”，这样也是可以的；但是所得的近似值的末位数都是奇数，这在应用上沒有“偶数法則”那样方便，所以我們仍用規則3。

在一个数来看，用四舍五入法所得的近似值，有时是比原

数大些，有时是比原数小些。在許多个数的运算的时候，它們每个数中，有的用大些的近似值，有的用小些的近似值，它們之間可以相互抵償，所以仍可以保証結果的最大程度的准确性。应用“偶数法则”，对于保留部分的末位数是偶数的数，四舍五入的結果比原数小些；对于保留部分的末位数是奇数的数，四舍五入的結果比原数大些。由于保留部分的末位数为偶数或为奇数的机会是差不多一样的，所以在許多个数的計算中，有的用大些的数，有的用小些的数，它們之間也可以相互抵償，結果仍可保証有最大程度的准确性。

习 題 一

1. 試說出下列数值各有几个有效数碼：

3.14　　25.0　　25.00　　0.12　　0.104　　8704.6

245.0　　2.3×10^5

2. 用四舍五入法，將下列各数写成有二个有效数碼的数：

6.87　　24.3　　0.0152　　8.6214　　10.45

3.1416　　2.718　　0.47712　　0.365　　0.0175

3. 某城市有 807,463 人，試四舍五入这个数：

（1）到百位数；（2）到千位数；（3）到万位数。

四　絕对誤差和最大絕对誤差

某个量的近似值与它的眞値的差，称为这个近似值的“絕

对誤差”。

〔例一〕 某校有学生1783人。若我們不說出它的眞值，而說出它的近似值1800人的时候，那末就有絕对誤差：$1800-1783=17$（人）。若我們說，該校有1780人，那末此时的絕对誤差是：$1783-1780=3$（人）。

我們用a来記某个量的近似值，用x記它的眞值，用α（讀如“阿尔法”）記a的絕对誤差，卽得：

$$\alpha=a-x$$

或

$$\alpha=x-a$$

在大多数情形下，我們不会知道量的眞值的，因此我們就无法知道近似值的絕对誤差的准确数值。

〔例二〕 我們量一本書的長度，得到23.4公分。这是一个近似值。这本書的長度的眞值，我們是不知道的，所以就无法說出这長度23.4公分究竟与書長相差多少，但我們既然量得了这23.4公分，我們总可說出書的長度在23.3公分到23.5公分之間，或更精确些說，这書的長度在23.35公分到23.45公分之間。就是說，拿23.4公分这近似值来代表書的長度，它的絕对誤差α不会超过0.1公分；在后面的情形下，α也是不会超过0.05公分。因此，我們虽然不知道近似值的絕对誤差α，但可以定出絕对誤差的最大限度的。

近似值若比眞值小，那末絕对誤差α是負数；近似值若比眞值大，那末絕对誤差α是正数。为了簡便起見，我們只考慮絕对誤差α的大小，而不考慮α的正負，就是說，我們拿α的絕对值$|\alpha|$来考慮，因为眞值的不知道，α也不知道，但是

可以定出α的最大限度;所以我們总可以定出一个正值来,使$|\alpha|$总是不会超过这正值的。我們記作:

$$|\alpha|<\Delta a \quad 或卽 \quad |a-x|<\Delta a$$

这Δa(讀如"得而他"a),卽是近似值a的最大絕对誤差。上例中以23.4公分这近似值表示書的長度,那末(依照四舍五入法)它的最大絕对誤差是$\Delta a=0.05$公分。書的長度的眞值虽然不知道,但它是在$a-\Delta a=23.4-0.05=23.35$(公分)与$a+\Delta a=23.4+0.05=23.45$(公分)之間的。

在量長度、称重量等測量的时候,我們所得的結果总是經过四舍五入的;这些結果的絕对誤差是不会超过它最末一位上單位的一半的。例如23.4公分的Δa为0.05公分;86.74克的Δa为0.005克;三万六千人的Δa为五百人。

在实用上,我們又常看到下面的写法:

(1)　68.7公分　(±0.1公分)

(2)　54.30克　(±0.005克)

在(1)中,括号里的±0.1公分,就是最大絕对誤差,就是說(1)的量可能有0.1公分上下的,也就是說(1)量是在68.6公分与68.8公分之間。同理,(2)中的±0.005克是54.30克的最大絕对誤差,(2)量是在54.295克与54.305克之間。

我們是拿測量結果的最大絕对誤差来比較測量工具的精确程度的。例如,称煤的秤只准确到公斤,就是說,用它来称东西的結果,可能有1公斤上下的誤差($\Delta a=1$公斤);买菜

的秤准确到1两，此时$\Delta a = 1$两$=31.25$克；实验室的天平准确到0.01克，此时$\Delta a = 0.01$克。显然，Δa愈小，測量工具就愈准确。

在近似值的計算中，我們通常把最大絕对誤差只写成含有一个或二个数碼的数。例如，在上面的$\Delta a = 31.25$克，我們可以把它写成$\Delta a = 40$克，或$\Delta a = 32$克。这样，在計算的时候比較方便。虽然取了較大的数值，其結果仍然符合最大絕对誤差的定义。

由于眞值x是常常不知道的，因此$\alpha = x - a$的α也不可知道，我們常常要用Δa来表示近似值a的准确或不准确；所以我們以后就簡單地用"誤差不超过Δa"，来代替"絕对誤差不超过Δa"正确的說法。

五　相对誤差和最大相对誤差

測量一所房屋的長度，有最大絕对誤差$\Delta a = 1$公分，我們說，这个結果是很精确的；量一双鞋子的長度，有最大絕对誤差$\Delta a = 1$公分，我們說，这个結果却是很不精确。我們称一架机器准确到10公斤，我們說称得很准确的了，但是在实驗室里，我們在天平上称东西，却要求所得結果的最大絕对誤差不超过1克，或0.1克，或0.01克。因此最大絕对誤差本身并不表明度量工作的好或坏。另一方面，最大絕对誤差是一个名数，在度量的單位有改变的时候，絕对誤差的数值也要随之而改变的。例如，用公尺来量長度，最大絕对誤差是5公

分，用市尺来量，最大絕对誤差是 5 分，它們之間，哪一个更准确一些呢？

根据上面的理由，我們有必要采用别的量来表示我們所得近似値的准确程度；这种量便是“相对誤差”。

我們用 a 表某量的近似値，x 为它的眞値，α 为 a 的絕对誤差，我們称$\frac{\alpha}{a}$为近似値 a 的相对誤差，記如：

$$\epsilon = \frac{\alpha}{a} \qquad (\epsilon \text{ 讀如“也潑西隆”})$$

〔例一〕 我們拿 1800 人来代替 1783 人，絕对誤差是 $1800-1783=17$(人)，則相对誤差 $\epsilon = \frac{17}{1800} = 0.0094$；拿 1780 人来代替 1783 人，則相对誤差为：

$$\epsilon = \frac{1783-1780}{1780} = 0.0017$$

〔例二〕 測量 20 米寬的馬路，絕对誤差是 1 米，則相对誤差是$\frac{1}{20}=0.05$；量 500 公里的鉄路，絕对誤差是 0.1 公里，則相对誤差是$\frac{1}{5000}=0.0002$

显然，在第二种測量工作中虽然它有較大的絕对誤差，但在測量工作的質量上是远远地高过第一种測量工作的。

相对誤差是相同單位的量的比値，所以它总是个不名数。并且用不同單位去測量的时候，在相同的准确情况下，也得相同的相对誤差。在实用上，我們常用百分数(%，1%＝0.01)或千分数(‰，1‰＝0.001)来表示相对誤差。上面例一中，有 $\epsilon = 0.94\%$，$\epsilon = 0.17\%$；例二中有 $\epsilon = 5\%$，$\epsilon = 0.02\%$。

因为近似值的相对誤差是它的絕对誤差和它自己的比值，而一个近似值 a 的絕对誤差 α 不易准确的知道，所以近似值的相对誤差 ϵ 也难以得到。我們已知最大絕对誤差 $|\alpha| < \Delta a$，做

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \quad (\delta a \text{ 讀如“小得而他” } a)$$

这 δa 称为近似值 a 的最大相对誤差。

因 $\epsilon = \frac{\alpha}{a}$ 而 $|\alpha| < \Delta a$

故 $\epsilon = \frac{\alpha}{a} < \frac{\Delta a}{a} = \delta a$

卽 $\epsilon < \delta a$

因为在一般情况下，絕对誤差不易得到，我們以后用“相对誤差”一詞来代替“最大相对誤差”这个名称。

〔例三〕 求鉛笔長度 a ＝17.6公分的相对誤差。

$a = 17.6$ 公分，它的最大絕对誤差为 $\Delta a = 0.05$ 公分，

故 $\delta a = \frac{0.05}{17.6} = \frac{0.1}{35.2} = \frac{1}{352}$

$\approx 0.0028 < 0.003 = 0.3\%$

卽 $\delta a < 0.3\%$ （記号“≈”表示“近似的接近”）

〔例四〕 已知某量的近似值 a ＝41.6克，它的相对誤差 $\delta a = 0.5\%$，試求 a 的絕对誤差，并定出近似值本身的界限。

由公式 $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$

得 $\Delta a = a \times \delta a$

此最大絕对誤差为 $\Delta a = 41.6 \times 0.5\%$

$= 41.6 \times 0.005$

$$=0.208<0.21(\text{克})$$

我們知道，眞值 x 要滿足不等式：$a-\Delta a<x<a+\Delta a$ 的，因此知道，所量的量的眞值大概在 41.4克与 41.8克之間。

現在我們进一步来討論近似值所取的有效数碼的个数和它的相对誤差之間的关系。

〔例五〕 求一个有二个有效数碼的数的相对誤差。

設 a 是一个有二个有效数碼的数，z 是 a 的第一位数碼。

若	$z=1$	譬如 $a=12$
則	$\Delta a=0.5$	$\delta a=\frac{0.5}{12}<\frac{0.5}{10}=5\%$
若	$z=2$	譬如 $a=2.6$
則	$\Delta a=0.05$	$\delta a=\frac{0.05}{2.6}<\frac{0.05}{2.0}=2.5\%$
若	$z=3$	譬如 $a=\overset{3.4}{\cancel{0.34}}$
則	$\Delta a=0.005$	$\delta a=\frac{0.005}{0.34}<\frac{0.005}{0.30}<1.7\%$
若	$z=4$	譬如 $a=4.8$
則	$\Delta a=0.05$	$\delta a=\frac{0.05}{4.8}<\frac{0.05}{4.0}<1.3\%$
若	$z=5$	譬如 $a=52\times10^2$
則	$\Delta a=50$	$\delta a=\frac{50}{5200}<\frac{50}{5000}=1.0\%$
若	$z=6$	譬如 $a=68$
則	$\Delta a=0.5$	$\delta a=\frac{0.5}{68}<\frac{0.5}{60}<0.9\%$
若	$z=7$	譬如 $a=7.3$
則	$\Delta a=0.05$	$\delta a=\frac{0.05}{7.3}<\frac{0.05}{7.0}<0.8\%$

若　　$z=8$　　　　譬如　　$a=82$

則　　$\Delta a=0.5$　　　　$\delta a=\frac{0.5}{82}<\frac{0.5}{80}<0.7\%$

若　　$z=9$　　　　譬如　　$a=0.93$

則　　$\Delta a=0.005$　　　　$\delta a=\frac{0.005}{0.93}<\frac{0.005}{0.90}<0.6\%$

又如　　$a=0.99$

則　　$\Delta a=0.005$　　　　$\delta a=\frac{0.005}{0.99}\approx 0.505\%$

因此我們知道，一个有二个有效数碼的数的相对誤差总在0.5%与5%之間的。反过来問：已知 δa 在0.5%与5%之間，a 一定是一个有二个有效数碼的数嗎？我們說，不一定的，a 可以取二个有效数碼，但是有时必須要有三个有效数碼才行。由上所述，可知 δa 的大小，又是与 z 的大小有关系的。譬如，測量某長度 a 的时候，已知 a 的第一位数 $z=6$，要使 δa 不超过1%，那末我們量到二个有效数碼的数已够了。例如量一段布，已得到長度是6尺3寸的話，就保証了 δa 不会超过1%，我們可以不必去量出“分”来。但若某長度 a 的首位数 $z=3$，仍要使 δa 不超过1%，那末我們取二个有效数碼是不够的(因由上表：$z=3$ 时，$\delta a>1\%$)，此时 a 取为三个有效数碼的数才能使 $\delta a<1\%$，象第11頁上例三中鉛笔長度誤差的例子。

我們有下面的一条規則：若一个近似值 a 有 n 个有效数碼，a 的第一位数碼是 z，那末 a 的相对誤差是：

$$\delta a\leq\frac{1}{2\times z\times 10^{n-1}}$$