科學圖書大庫

線型計劃與對局理論

譯者　鄭隆輝

徐氏基金會出版

科學1

線型計劃與對局理論

譯者　鄭隆輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日三版

線型計劃與對局理論

基本定價 1.20

譯者　鄭隆輝　國立政治大學統計系講師

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250 號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原　序

本書係以基本而完整之數學方法來介紹線型計劃與對局理論，但比一般的線型不等式的圖解方法更加深入。其中有一部分較深的代數觀念則詳加說明，討論與誘導。這些包括凸多邊形的基本極點定理，旦捷先 (Dantzig) 的單體法，基本對偶定理及馮紐曼 (Von Neumann) 的兩極定理。

關於比較困難的觀念，都以一種具體的形式與緩慢的方法來介紹，而且僅僅用一些中學或大專學生已經知道的技巧而已。然而文辭卻很精確，論證十分一般性，推理也相當完整。

我相信這是目前已有的有關線型計劃與對局理論方面最簡單的說明方法。而且很適合中學、大專學生、老師和有興趣的人。

在寫這本書時，因我從很多地方獲得靈感，所以現在無法一一對他們表示我的謝意。最多，我只能提起一些人並希望其他人多多諒解。

我特別感謝普林斯敦的柯恩 (Harold W. Kuhn) 和塔勾 (A. W. Tucker)，他們的興趣、勸告和鼓勵就如他們樂意供給的新資料與正確的消息，對我來說都是同樣重要的。還有加州大學的旦捷先也很親切地提供我一些有價值的再版書。

關於問題的形式與資料的呈列上，我從波羅克斯 (Bronx) 理科中學的學生和同事那裡獲得很多很好的觀念。其次對於閱讀我的原稿的同事寇很 (Louis Cohen)，厚得斯 (Charles Hodes)，日得曼 (Hany Ruderman) 也在此表示我的謝意。尤以他們有價值的建議和評論，消除了很多的錯誤和不清楚的地方。這本書裏，有一部分問題是採用由日特戈斯(Rutgers University)大學的葛瑞切 (Samuel L. Greitzer) 和波羅克斯理科中學的多德斯 (Irving A. Dodes) 所供給的資料。

對於這些人，還有很多其他人，我深深表示我眞誠的感謝。

1967 年 12 月　　哥里克斯曼 (A.M. GLicksman)

目　録

第一章　線型計劃之基本概念

1.　緒論

於一九四七年，美國出現了一支活潑的數學產物。在那時候，旦捷先 (George B. Dantzig) 和他的助手在美國空軍部門裡對於廣泛的各種軍事計劃的問題上發現了一個共同要素。就是使一線型形式極大或極小的純粹數學問題，但這一線型形式之變數之値則須滿足一系列的限制條件（即一些線型方程式或線型不等式）。故十分自然地命名這類數學問題為線型計劃。

很奇怪，在一九三九年，一位俄國數學家 L. V. Kantorovich 和他的助手已經研究過這一類同樣的問題，但美國人並不知道這回事。故與俄國人毫不相關，旦捷先發展了一個有系統的方法來解決線型計劃問題。這個方法，即所謂單體法，被認為是處理線型計劃問題最有效的一般方法。後來，因繼續的努力來研究改善單體法，使這一方法成為一個精確又可靠的數學工具。又因運用重疊的過程，我們很容易利用現代的高速電子計算機來處理。到目前，在理論的研究上已成為重要的方法，且已廣泛地應用在工業、農業、運輸、經濟理論以及工程學等各方面。的確，這些都是這一數學產物很出色的表現。

線型計劃的新分枝正相繼露出曙光。其中最有趣的分枝之一是早期所發現的線型計劃與對局理論之間的密切關聯。最初是由一位法國數學家波雷 (Emile Borel) 大約在一九二一年提出這一方面的理論。到一九二八年，當馮紐曼 (John von Neumann) 首先證明了兩極定理 (Minimax Theorem) 後，該理論獲得了強力的推動。由於線型計劃不斷地發展，已經使對局理論的困惑得到了相當的簡化。而下列這些人：G. B. Dantzig, L. S. Shapley, A. J. Hoffman, Philip Wolfe, David Gale, A. W. Tuku, H. W. Kuhn, S. Vajda, M. Beale, A. Charnes 等人之研究，則都使對局理論與線型計劃得到很圓滿的結果。

本書的目的在於介紹線型計劃與對局理論之中心概念及說明這些理論之

基本特性。故所用的技巧，凡是中學生或大專學生都已經熟悉的。若其他還需要什麼能力則僅僅是如何跟循一邏輯的推論。

首先我們小心地分析幾個簡單的問題，以便介紹幾個基本觀念和術語。讀者也會從他在代數學和幾何學內所熟知的一些老方法獲得一個新的觀點。當我們進一步觀察一般情形時，則很自然地說明其本身將出現在一個相當基本而精確的方法裡，如基本極點定理，單體法，基本對偶定理與其系兩極定理。有一些問題同時以擴張與縮減場面詳解之，另外一些習題（附答案）則提供給有志讀者。

2. 線型計劃問題之圖解

茲以下列相當簡單的問題做為第一個例題：

例一 某醫生為有名醫學專家，說他的革命性的三層藥丸可以醫治感冒。計分兩種：第一種藥丸包含兩粒阿斯匹林，五粒重碳酸塩，和一粒甲基嗎啡；第二種藥丸包含一粒阿斯匹林，八粒重碳酸塩，和六粒甲基嗎啡。現在，依該醫生的研究深信至少需要十二粒阿斯匹林，七十四粒重碳酸塩，和二十四粒甲基嗎啡才有效。問最少需要多少個藥丸才能滿足這些條件

分析與解答

令 x ＝第一種藥丸的個數。 y ＝第二種藥丸的個數。

這個問題受到 x 與 y 之值的限制，有一些很顯然，有一些則包含於問題之性質。例如，使 x 或 y 為負值者，則無意義，故吾人知必為

$$x \geq 0 \text{ 和 } y \geq 0$$

其次，我們得知 x 個第一種藥丸需要 $2x$ 粒阿斯匹林而 y 個第二種藥丸需要 $1y$ 粒阿斯匹林，並且這兩種藥丸之阿斯匹林之總數至少十二粒。

依此，我們得到下列之限制條件：

$$2x + 1y \geq 12$$

同樣地，重碳酸塩之總數至少七十四粒，此條件為如下：

$$5x + 8y \geq 74$$

最後一個限制為甲基嗎啡之總數至少二十四粒如下：

$$1x + 6y \geq 24$$

我們可以看出有很多的 x 值和 y 值能滿足所有這些限制條件，但我們的問題是從其中選出一對數使藥丸之個數總和 $x + y$ 盡可能的小。我們設此總和為 m。則我們可再敘述我們的問題為如下之數學形式，線型計劃問題之一般形式：

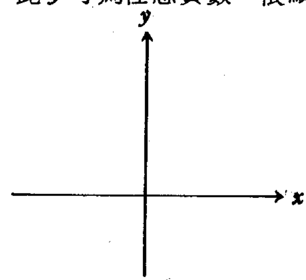
已知　$x \geq 0$ 和 $y \geq 0$

$$\begin{cases} 2x+1y \geq 12 \\ 5x+8y \geq 74 \\ 1x+6y \geq 24 \end{cases}$$

使　$m=x+y$　爲一最小值。

我們現在一步一步仔細觀察每一個限制條件。先看第一個條件，$x \geq 0$，更詳細的說，其意義爲 $x=0$ 或 $x>0$。在圖形上，$x=0$ 之解集合(Solution set)爲包含坐標形如（0，y）之所有點，此 y 可爲任意實數。很顯然這些點全部落在 y- 軸上（看圖一）。

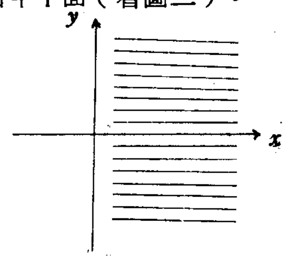
（$x=0$ 之解集合對應於 y - 軸上所有點之集合。）



(圖一)

在圖形上，限制條件 $x>0$ 爲坐標形如（p，y），（p 爲任意正實數）之所有點之集合。所有這樣的點都落在 y- 軸之"右邊"並且構成 xy-平面之"右半部分"。這樣的集合稱之爲開放右半平面（看圖二）。

（$x>0$ 之解集合對應於 y- 軸之右之所有點之集合）。



(圖二)

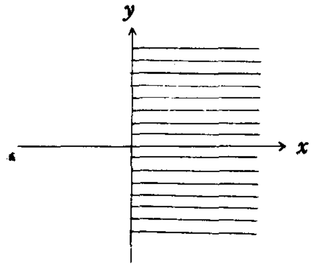
因此限制條件 $x \geq 0$ 在圖形上與該二點集合之聯集（union）對應，也就是說所有的點落在 y- 軸上或 y- 軸之右。這樣的集合稱之爲封閉半平面（看圖三）。

在我們的問題內的第二個限制爲 $y \geq 0$。依同樣的方法，知其解集合與在 x- 軸上或其上方之所有點之集合對應（看圖四）。

然而，我們所找之解爲同時滿足 $x \geq 0$ 和 $y \geq 0$。因此在圖形上這些點同時包含於圖三與圖四所描劃的集合。這兩集合之所有共同點之集合稱爲他

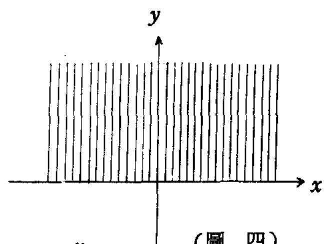
們的交集 (intersection) 。如圖五所示。

(限制條件 $x \geq 0$ 之解集合對應於 y- 軸上或其右之所有點之集合)。



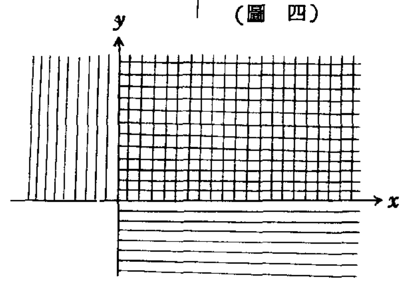
(圖三)

(限制條件 $y \geq 0$ 之解集合對應於 x- 軸上或其上方之所有點之集合)。



(圖 四)

(對應於限制條件 $x \geq 0$ 和 $y \geq 0$ 之二封閉半平面之交集)。



(圖五)

由非負之條件 $x \geq 0$ 和 $y \geq 0$，知限制這些解在第一象限內或其界上之點。我們的問題是從這個無限集合內選出一些點對應於下列之限制條件

$$2x+1y \geq 12$$
$$5x+8y \geq 74$$
$$1x+6y \geq 24$$

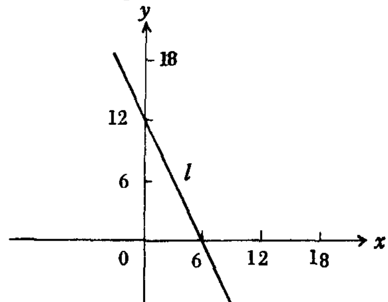
茲考慮第一個不等式。知表示

$$2x+y=12 \text{ 或 } 2x+y>12$$

$2x+y=12$ 之解集合對應於直線 $l: y=-2x+12$ 上之所有點。該直線之斜率爲 -2 並且其 y- 截距爲 12。故很容易圖示如圖六。現在，如果設 S 爲

坐標滿足 $2x+y>12$ 之點之集合，則 S 爲直線 l 上方之所有點之集合。一個合理之推論結果如下：令 x 値固定，設 $p=(x,y)$ 爲 S 上一點，並設 $Q=(x,y')$ 爲直線 l 上一點（P 和 Q 有相同之第一坐標 x）。現在

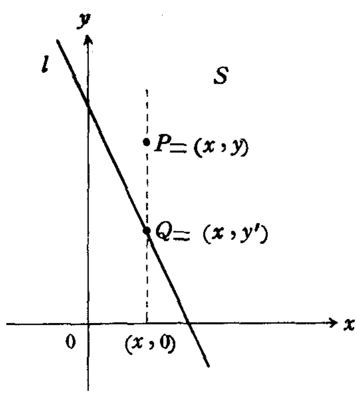
$$2x+y>12,\ \therefore y>-2x+12;$$
$$2x+y'=12,\ \therefore y'=-2x+12。$$
$$\therefore y>y'，即 P 在 Q 之上方！（看圖七）。$$



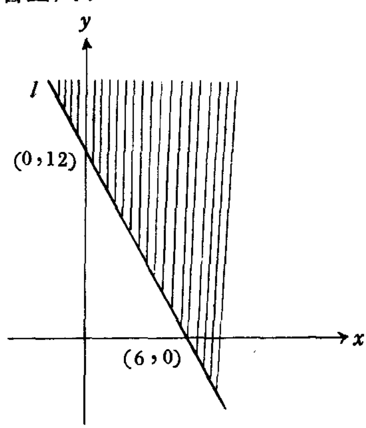
（圖六）

無論在 S 上選擇任意點 P，必在直線 l 上存在一點 Q 與點 P 有相同的橫坐標；而且 P 經常在 Q 之上方。所以說"S 之點在直線 l 之上方"。

故易知限制條件 $2x+1y\geq 12$ 之解集合爲對應於方程式爲 $2x+1y=12$ 之直線 l 上或其上方之所有點之集合（看圖八）。



（圖七）

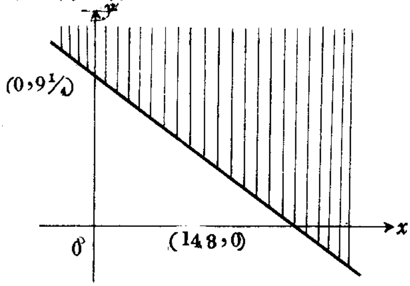


（圖八）

上述之點集合亦爲一封閉半平面之例。該直線本身稱爲該封閉半平面之界(boundary)。如果除掉該界，則剩下之點（此時這些點皆在直線 l 之上方）形成一個開放半平面。

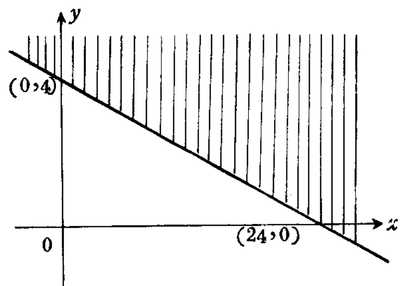
現在讓我們回過來看看我們問題中剩下的限制條件。每一個限制條件也都定義一封閉半平面（看圖九和十）。

（限制條件 $5x+8y\geq 74$ 之解集合）



(圖九)

（限制條件 $1x+6y\geq 24$ 之解集合）



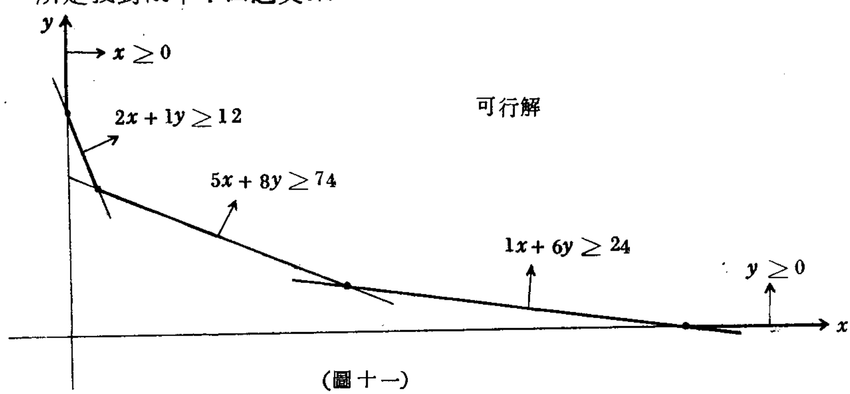
(圖十)

如果我們的問題有任何解存在的話，則這些解必對應於所有上述半平面共同包含的點。如此每一限制條件定義某一半平面，並且每一問題之解（如果有一解存在）則定義一個屬於這些半平面之交集之點。這個交集如圖十一所示。（這些箭號之方向爲從該交集之界至其內部。以減少劃出該區域之麻煩)。

限制條件：$x\geq 0$，$y\geq 0$，

$$2x+1y\geq 12,$$
$$5x+8y\geq 74,$$
$$1x+6y\geq 24,$$

所定義封閉半平面之交集：



(圖十一)

該交集之任一點稱爲可行解 (feasible solution) 。我們亦稱圖形上所劃部分爲我們的線型計劃問題之可行區域 (feasible region) 。我們的工作是從這些可行解內找出一個使 $x+y$ 爲極小者。在目前這種情形，可以用很簡單的方法來解決。設

$$x+y=m$$

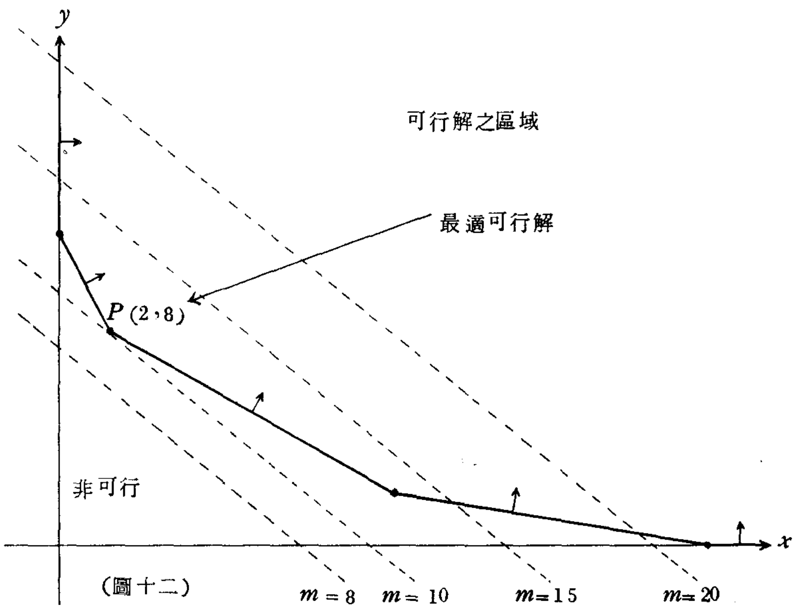
並且令 m 爲各種不同的值。例如

$$x+y=20$$

$$x+y=15$$

$x+y=8$ 等等。

我們可以在圖上劃這些方程式爲平行直線系。（因有相同之斜率－1，故平行）。在圖形上，任一直線穿過可行區域之處，其坐標 x 和 y 形成一個可行解，其和 $x+y$ 等於該直線所代入之 m 值（看圖十二）。



(圖十二)

其次，我們可以看出有些 m 值毫無可行解。當 m 值小於 10時就發生這種情形。當 $m=10$時，該直線剛好穿過可行區域之 P 點，其坐標 $x=2$ 和 $y=8$ 。所有較大之 m 值（大於 10)時之直線皆穿過可行區域並且產生的可行解使 $x+y$ 大於 10。故易知，該問題之最適（最佳）解 (optimal (best) solutior) 發生在點 P ，此處 $x=2$ ，$y=8$ 因此 $m=10$。所以在所有條件下，該醫生之處方爲兩個第一種藥丸和八個第二種藥丸爲最少之個數。很巧合，該藥方剛

好需要最少粒數的阿斯匹林和重碳酸塩，但卻形成“過分”的甲基嗎啡，即 $1(2)+6(8)=50$ 粒甲基嗎啡，遠超出最少的需要(遠大於眞正所要的最少粒數 24 !)。這種“浪費”常常當做鬆弛之部分。在這個問題上是無法避免的，除非增加藥丸之總數。

這個問題之某些特點是值得進一步討論的，因這些特點極具一般性。在有限個半平面之交集內之所有點組成了可行解之區域。該區域常常成為一個多邊形區域，或多邊形集合。一最適解即在多邊形區域之界上，事實上是在至少二界線相交處之頂點上。在下一章我們將證明這些特點是眞正十分一般性的，但在我們這樣做以前，先看看另一個問題。

例 2　有一糖菓商生產兩種糖菓。第一種每箱獲利四十分，第二種每箱獲利五十分。其過程分為混合，烹調，和包裝三種主要工作。下列之表為每箱糖菓過程中所需要的平均時間；以分鐘計算。

	混合	烹調	包裝
第一種	1分	5分	3分
第二種	2分	4分	1分

每種生產過程中，混合之設備至多只能用十二機器小時，烹調之設備至多只能用三十機器小時，且包裝設備只能用十五機器小時。在所有可用的時間內，如果機器時間可以分配給任一種糖菓時，試問該糖菓商應做每種糖菓各多少箱才能獲利最大。

分析與解答

設 x = 所做第一種糖菓之箱數。

　y = 所做第二種糖菓之箱數。

就如前題，要除掉 x 與 y 之負值，即

$$x \geq 0 \text{ 和 } y \geq 0 \text{ 。}$$

以分鐘而計，則 x 箱第一種糖菓與 y 箱第二種糖菓共計需要混合之時間為 $1x+2y$ 且不得多於 $(12)(60)=720$ 分鐘。因此

$$1x+2y \leq 720 \text{。}$$

在烹調設備上以三十機器小時為限，故得一限制條件為

$$5x+4y \leq 1800 \text{。}$$

在包裝之時間限制上則得知

$$3x+1y \leq 900 \text{ 。}$$

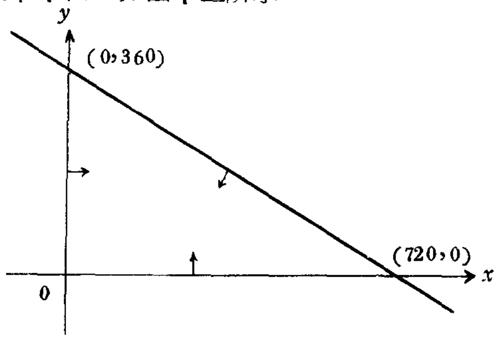
在這些限制下，是要如何使獲利之值 $40x+50y$ 為最大。設此獲利之值為 M。我們可再敍述題意如下列之形式：

已知　　$x \geq 0$ 和 $y \geq 0$

$$\begin{cases} 1x + 2y \leq 720 \\ 5x + 4y \leq 1800 \\ 3x + 1y \leq 900 \end{cases}$$

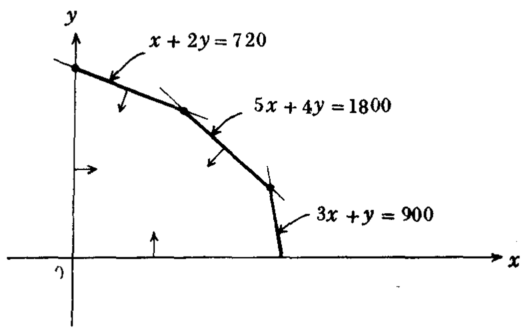
使　　$M = 40x + 50y$　爲一最大值。

就如前題所討論，非負之限制條件 $x \geq 0$，$y \geq 0$ 把可行解限制於第一象限內。限制條件 $x + 2y \leq 720$ 則代表在直線 $x + 2y = 720$ 上或其下方之所有點所成之封閉半平面。如圖十三所示。



（圖十三）

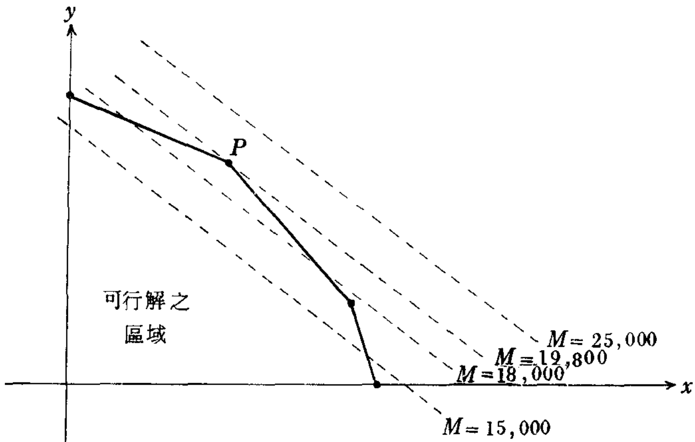
如果該三角形區域與另外兩個限制條件所決定之二半平面相交，則可得該問題之可行解之區域。這區域爲一封閉多邊形（看圖十四）。



（圖十四）

現在，我們的問題仍然要從可行區域內無限多的點選出一個“最適”點，也就是說，這樣的點之 x 值和 y 值可使獲利 M 之值爲最大。我們以各種不同的值代入參數 M，來定利潤公式 $40x + 50y = M$ 之圖形以解決此問題。亦就如上題，有些 M 值使所得之直線完全在可行區域之外，而有些 M 值使所得之直線穿過該區域。因這些直線系之直線有相同之斜率 $-\frac{4}{5}$，故皆互相平行

。其中有一直線剛好在 P 點穿過該區域。如圖十五所示。



（圖十五）

由解方程式 $x-2y=720$ 和 $5x+4y=1800$ 則易得 P 點之坐標爲

$$x=120 \text{ 和 } y=300$$

並得 $$M=40(120)+50(300)=19{,}800,$$

表示製造120箱之第一種糖菓和300箱第二種糖菓之生產計劃可獲得最大可能利潤198·00元。該計劃已完全利用了混合和烹調設備之可用時間，但在包裝部則剩下了十五分之四小時的機器時間未加利用，因3(120)+1(300)得660分鐘，剩下240分鐘的包裝機器時間未利用。這種"過剩"的時間構成了該問題之鬆弛部分。

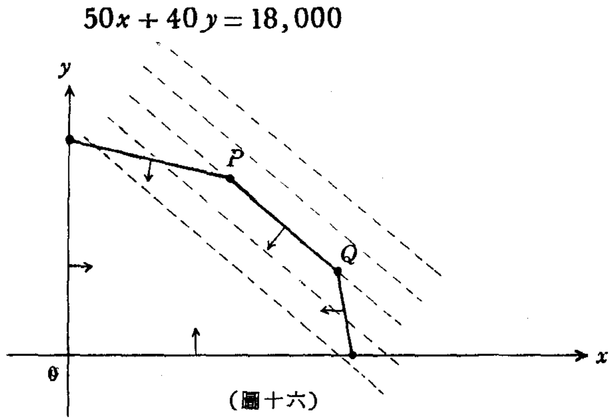
3. 交替最適解

在前節兩個例題，其最適解皆爲唯一。其意義爲任意其他可行解必定較差，也就是說成本較高或利潤較少。

現在，在線型計劃的問題中也可能發生不只一個，事實上可能有很多"同樣好"之最適解。例如，假設將上節例2中之單位利潤對換，則該糖菓商由每箱第一種糖菓可獲利五十分，而每箱第二種糖菓僅獲利四十分，則其利潤公式成爲

$$50x+40y=M$$

在這種情形，對應於參數 M 之各種不同值之平行直線系爲如圖十六所示。可行區域與圖十五相同，因爲我們仍然假設其他條件不變。現在的直線系中有一直線完全包含一界之線段 $\overline{PQ}$。該線之方程式爲



(圖十六)

其所對應之利潤值$M=180\cdot00$ 元。在線段$\overline{PQ}$上所有點都是可行點，並使M得到同樣的最適值。例如P點坐標為

$$x=120，\quad y=300，\quad 得M=50(120)+40(300)=18,000，$$

而Q點之坐標為

$$x=\frac{1800}{7}=257\frac{1}{7}，y=\frac{900}{7}=128\frac{4}{7}，得同之利潤，$$

$$M=50\left(\frac{1800}{7}\right)+40\left(\frac{900}{7}\right)=18,000\ 。$$

當然，後者之解包含了x和y之分數值。但在實際上，這些值無法被這糖菓商所採用。然而依我們所用該名詞之意義他們實爲可行值，並代表一交替最適解(alternate optimal solution)(即必發生在格子點($x\,y$)上)。

其他還有交替最適解，實際上亦爲可行的，例如

$$x=200，\quad y=200，\quad 得M=50(200)+40(200)=18,000\ 。$$

此爲對應於介於P和Q之間在線段$\overline{PQ}$上之某一點。
我們請讀者自行找出另外之交替最適可行解並在實際上是可供採用的。很顯然，像這樣的情形，該糖菓商也要從很多同樣好的生產計劃中選出一個，如此就須要用另外的標準來決定他如何採用了。

到此我們將解說另外一個簡單的線型計劃問題作爲這部分的結論。這問題同時發生唯一和多重解。

例3　某汽車公司決定提供半小時之商業電視廣播表演一喜劇和一樂隊。該公司堅持至少要有三分鐘之商業廣告。電視公司則要求分配給商業廣告之時間不得超過十二分鐘，並且無論如何不得超過分配給喜劇的時間。但半