155906

湖南省中学试用课本

数 学

第 三 册

湖南省中学试用课本

数　学

第三册

湖南省中小学教材编写组编

湖南人民出版社出版
湖南省新华书店发行
湖南省新华印刷二厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：4 1/4
1970年12月第1版　1971年11月第2次印刷
书号：k7109·853　定价：三角

目　　录

第一章　一元二次方程

一　数的平方根和勾股定理

1.1 平方根……………………（1）
1.2 开平方的一般方法……（3）
1.3 平方根表………………（9）
1.4 带平方根号的数的运算……………………（14）
1.5 勾股定理………………（18）

二　一元二次方程

1.6 一元二次方程的解法…（28）
1.7 一元二次方程的应用…（36）

第二章　相似形和平板仪测量

一　相　似　形

2.1 成比例的线段…………（41）
2.2 相似三角形的概念……（47）
2.3 三角形相似的判定……（50）
2.4 相似三角形的性质……（62）
2.5 相似多边形……………（69）

二　平板仪测量

2.6 小平板仪的构造………（76）
2.7 简易平板仪的制作……（79）
2.8 平板仪测绘的基本操作……………………（80）
2.9 测绘平面图的基本方法……………………（87）

第三章　解直角三角形

一　锐角三角函数

3.1 正弦和余弦……………（96）
3.2 正切和余切……………（102）
3.3 三角函数表……………（106）

二　解直角三角形及其应用

3.4 解直角三角形…………（113）
3.5 解直角三角形的应用…（120）
3.6 测倾器的构造和使用方法……………………（132）

第一章　一元二次方程

一　数的平方根和勾股定理

1.1　平方根

工人同志响应毛主席"要节约闹革命"的伟大号召，精打细算，合理使用钢板，做一批面积为25平方厘米的正方形零件，问边长应裁多长才合要求?

设正方形的边长为x厘米，根据题意，得

$$x^2=25. \tag{1}$$

这就是要求出一个数，它的平方等于25.

因为$5^2=25$，$(-5)^2=25$. 所以方程（1）有两个根：5和-5.

由于正方形的边长的厘米数不能是负数，因此-5不合题意，所以这批正方形零件的边长是5厘米.

一个数的平方等于a，这个数叫做a的平方根.

例如，$5^2=25$，$(-5)^2=25$.

5和-5都是25的平方根.

又如3和-3都是9的平方根，4和-4都是16的平方根.

从这里　　　　　　　　　　　　　　　两个平

方根的绝对值相等，符号相反（或者说，是一对互反数）.

因为任何正数、任何负数以及零的平方都不会是负数，所以负数没有平方根. 例如，-4没有平方根.

因为 $0^2=0$，所以零的平方根是零.

如果 $a\geq 0$，我们把 a的平方根记为$\pm\sqrt{a}$，符号“$\sqrt{\ }$”读作根号，a叫做被开方数. $+\sqrt{a}$ 表示正数a的正平方根，$-\sqrt{a}$表示正数a的负平方根. $+\sqrt{a}$可以省写成$\sqrt{a}$.

例如，9的平方根是3和-3，分别用$\sqrt{9}=3$和$-\sqrt{9}=-3$表示，也可以记为：$\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

求一个数的平方根的运算叫做开平方.

“开平方”是“平方”的逆运算，利用平方运算可以求出一些数的平方根.

例 求下列各数的平方根：

（1）49； （2）$\frac{81}{100}$； （3）0.0004.

解 （1）$\because$ $(\pm 7)^2=49$，

$\therefore$ 49的平方根是± 7；

（2）$\because$ $\left(\pm\frac{9}{10}\right)^2=\frac{81}{100}$，

$\therefore$ $\frac{81}{100}$的平方根是$\pm\frac{9}{10}$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

(3) $\because$ $(\pm 0.02)^2 = 0.0004$,

$\therefore$ 0.0004的平方根是± 0.02.

练 习 一

1. 求下列各数的平方根：

(1) 64； (2) 121；

(3) $\frac{49}{121}$； (4) 0.0016.

2. 填出下面括号内的数：

(1) $(\quad)^2 = \frac{4}{9}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = (\quad)$；

(2) $(\quad)^2 = 0.25$, $-\sqrt{0.25} = (\quad)$；

(3) $(\quad)^2 = 10000$, $\pm\sqrt{10000} = (\quad)$；

(4) $(\quad)^2 = a^2$, $\sqrt{a^2} = (\quad)$. $(a>0)$

1.2 开平方的一般方法

我们利用"平方"运算容易知道$\sqrt{64} = 8$，但是如$\sqrt{2}$、$\sqrt{1156}$就不太容易知道它们等于多少.

现在就来介绍劳动人民在实践中总结出来的数的开平方的一般方法.

由于正数的两个平方根是一对互反数，因此只介绍求一个正数的正平方根的方法就可以了.

例1 计算 $\sqrt{1156}$.

解

$$\begin{array}{rl|l}
 & & \begin{matrix}\text{初}&\text{次}\\ \text{商}&\text{商}\end{matrix} \\
 & & \ \ \ 3\ \ \ 4 \\
 & & \sqrt{11'56} \\
 & & \ \ \ 9 \\ \cline{3-3}
\text{试除数}\rightarrow & 20\times3=60 & \ \ \ 2\ 5\ 6 \leftarrow\text{第一余数} \\
 & \underline{+\ \ 4} & \\
\text{完全除数}\rightarrow & 20\times3+4=64 & \ \ \ 2\ 5\ 6 \\ \cline{3-3}
 & & \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}$$

把1156从个位起向左每隔两位用一个撇号分开，得11′56. 求出平方不超过左边第一段11的最大整数，得初商3. 在根号上面对着左边第一段11写上平方根的最高位上的数3（实际表示30）；$3^2=9$（实际是$30^2=900$），写在11下面. $11-9=2$（实际是$1100-900=200$），把第二段56移下得第一余数256，在竖线左边写上3的2倍6（实际是$2\times30=60$，所以在6的右边要留出一位写平方根的个位上的数，在以后的计算中，我们把2×30看作20×3）；256除以60商4，在根号上面对着第二段56写上次商4，同时在竖线的左边6的右边也写上4. 因为$64\times4=256$，$256-256=0$，所以$\sqrt{1156}=34$.

由例1可以得出整数开平方的步骤如下：

1. 把要开平方的整数从右向左每两位用撇号分开.

2. 从左边第一段求出平方根的最高位上的数叫做

初商.

3.从左边第一段内减去初商的平方，在差的右边移下第二段，叫做第一余数.

4.把初商20倍做试除数，试除第一余数，所得的商的整数部分作为次商（如果这个整数部分大于或者等于10，就用9做次商）.

5.初商20倍加次商叫做完全除数，用完全除数乘次商，如果它的积大于第一余数时，把次商减1再试，直到积小于或者等于第一余数为止，这个次商就是平方根的第二位上的数.

6.用同样的方法，继续求平方根的其他各位上的数.

例2　计算　$\sqrt{32041}$.

解

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccc}\text{初商} & \text{次商} & \\ 1 & 7 & 9\end{array} \\
 & \sqrt{3'2\,0'4\,1} \\
 & 1 \\
\text{试除数}\rightarrow 20\times 1=20 & 2\,2\,0 \quad \leftarrow\text{第一余数} \\
+7 & \\
\text{完全除数}\rightarrow 20\times 1+7=27 & 1\,8\,9 \\
\text{试除数}\rightarrow 20\times 17=340 & 3\,1\,4\,1 \leftarrow\text{第二余数} \\
+\ 9 & \\
\text{完全除数}\rightarrow 20\times 17+9=349 & 3\,1\,4\,1 \\
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{32041}=179.$$

在例 2 中，220除以 20 商11，但是次商只能是一位数，所以改商7.

如果被开方数是小数，就从小数点起向左、向右（纯小数只向右）每隔两位用撇号分开，如果小数部分的最后一段只有一位，就添零补成两位.其开平方方法和整数开平方一样，但要特别注意所得的平方根里小数点的位置.

例 3 计算 (1) $\sqrt{0.3249}$； (2) $\sqrt{316.4841}$.

解 (1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\ \ 0.\ 5\ \ 7 \\
 & \sqrt{0.3\ 2'4\ 9} \\
 & \qquad\ \ 2\ 5 \\
\hline
20\times 5=100 & \qquad\quad 7\ 4\ 9 \\
+\ \ \ 7 & \\
\overline{\quad 107} & \qquad\quad 7\ 4\ 9 \\
\hline
 & \qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{0.3249}=0.57$；

(2)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 1\ \ \ 7.\ \ 7\ \ \ 9 \\
 & \sqrt{3'1\ 6.4\ 8'4\ 1} \\
 & \ \ 1 \\
\hline
27 & \ \ 2\ 1\ 6 \\
 & \ \ 1\ 8\ 9 \\
\hline
347 & \quad 2\ 7\ 4\ 8 \\
 & \quad 2\ 4\ 2\ 9 \\
\hline
3549 & \qquad 3\ 1\ 9\ 4\ 1 \\
 & \qquad 3\ 1\ 9\ 4\ 1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{316.4841}=17.79.$

例 4 计算 $\sqrt{2}$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\;\; 1.\;\;4\;\;\;1\;\;\;4\;\;\;2\;\;\;1 \\
 & \sqrt{2.0\;0'0\;0'0\;0'0\;0'0\;0} \\
 & \quad\;\; 1 \\ \hline
24 & \quad\;\; 1\,0\,0 \\
 & \quad\;\;\;\; 9\,6 \\ \hline
281 & \quad\;\;\;\;\; 4\,0\,0 \\
 & \quad\;\;\;\;\; 2\,8\,1 \\ \hline
2824 & \quad\;\;\;\;\; 1\,1\,9\,0\,0 \\
 & \quad\;\;\;\;\; 1\,1\,2\,9\,6 \\ \hline
28282 & \quad\;\;\;\;\;\;\; 6\,0\,4\,0\,0 \\
 & \quad\;\;\;\;\;\;\; 5\,6\,5\,6\,4 \\ \hline
282841 & \quad\;\;\;\;\;\;\;\;\; 3\,8\,3\,6\,0\,0
\end{array}
$$

$\therefore \quad \sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$

因为 $1^2<2<2^2$，所以$\sqrt{2}$不是一个整数，而是比 1 大比 2 小的一个小数. 但无论计算到小数哪一位，总不能使余数得零(因为有限小数的平方不会是整数)，因此只能用有限小数表示$\sqrt{2}$的近似值.

从上面计算可知：1，1.4，1.41，1.414，……都小于$\sqrt{2}$. 分别在这些数的末一位上加1，就得到：2，1.5，1.42，1.415，……. 这些数都大于$\sqrt{2}$.

因为 $1<\sqrt{2}<2$，所以$\sqrt{2}$与 1 或 2 的差的绝对值都不超过 1. 我们说 1 和 2 分别是$\sqrt{2}$精确到 1 的不足近似值和过剩近似值. 同样，1.4和1.5分别是$\sqrt{2}$精

确到0.1的不足近似值和过剩近似值，1.41和1.42分别是$\sqrt{2}$精确到0.01的不足近似值和过剩近似值.

按四舍五入法取得的某一精确度的近似值，是同精确度的不足近似值和过剩近似值中的一个. 如取1.4作为$\sqrt{2}$精确到0.1的近似值，取1.41作为$\sqrt{2}$精确到0.01的近似值. 因此，求一个数的近似平方根时，应该比指定的精确度多算出一位，再把这位上的数四舍五入.

例5 求25.6的近似平方根(精确到0.01).

解

```
              5.  0    5    9
           √2 5.6 0'0 0'0 0
            2 5
  1 0 0 5 |     6 0 0 0
          |     5 0 2 5
    1 0 1 0 9 |   9 7 5 0 0
              |
```

∴ 25.6的近似平方根是±5.06.

例6 求近似数5.91的平方根.

解

```
            2.  4   3
          √ 5.9 1'? ?
            4
    4 4 | 1 9 1
        | 1 7 6
  4 8 3 |  1 5 ? ?
        |  1 4 4 9
```

∴ 近似数5.91的平方根是±2.43.

从例6可以看出，已知数有三个有效数字，它的平

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

方根的第四个数字就不能确定，所以也取三个有效数字.

在通常情况下，已知数有多少个有效数字，它的平方根也取同样多个有效数字.

练习二

1. 计算下列各题：

(1) $\sqrt{361}$；　　(2) $\sqrt{841}$；

(3) $\sqrt{9025}$；　　(4) $\sqrt{0.4489}$；

(5) $\sqrt{0.000625}$；　　(6) $\sqrt{7.29}$；

(7) $\sqrt{3}$（精确到0.001）；　　(8) $\sqrt{5}$（精确到0.001）.

2. 求下列各数的平方根：

(1) 289；　　(2) 2.5（精确到0.01）.

3. 求近似数3.14的平方根.

1.3 平方根表

《数学用表》中的平方根表是由1.00到99.9之间有三个数位的数的近似平方根编成的.

表中标有 a 的竖行和横行的数，分别是已知数的前两位数和第三位数，表中间的数是各个已知数的平方根（一般是近似值，它的第四位是由四舍五入得到的），表右边的部分是修正值.

求1.00到99.9之间三位数的平方根，可以直接从表中查出；求1.000到99.99之间四位数的平方根，则可通

过修正值得到.

例 1 求$\sqrt{42.3}$.

解 先在表中标有 a 的竖行里找出前两位数42，然后在横行里找出第三位数3，42所在的横行与3所在的竖行的交叉地方的数 6.504 就是 42.3 的正平方根（见下表）.即

$$\sqrt{42.3}=6.504.$$

平 方 根 表

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·	·	·	·	│	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	│	·	·	·
·	·	·	·	↓	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	↓	·	·	·
42	——	——	——→	6.504	——	——	——	——	——	——	——	——	——	——	——→	5	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

例 2 求$\sqrt{42.36}$.

解 先查表得$\sqrt{42.3}=6.504$，然后横着向右，在修正值部分顶上标有 6 的那一行与42所在的横行交叉的地方找到修正值 5，把它（如果修正值有两位，就把它的最后一位）和6.504的最后一位对齐再相加：

$$\begin{array}{ll} \sqrt{42.3} & =6.504 \\ \text{修正值} & \quad\;\cdots\cdot 5 \quad (+ \\ \hline \sqrt{42.36} & =6.509. \end{array}$$

怎样求小于 1 或大于100的数的平方根呢？

我们来研究下表：

a	0.04	0.4	4	40	400	4000
$\sqrt{a}$	0.2	0.6325	2	6.325	20	63.25

比较第一、三、五行或二、四、六行可以看出，已知数扩大 100 倍，它的平方根扩大10倍；反过来，已知数缩小 100 倍，它的平方根缩小10倍．也就是说，已知数的小数点向右或者向左移动两位，它的平方根的小数点相应地向右或者向左移动一位．根据这个规律，我们就可以查小于 1 或者大于 100 的各数的平方根．在查这些数的平方根时，应当特别注意，小数点的位置必须两位两位地移，移到使要查的数成为有一位或者两位整数的数．

例 3　求$\sqrt{1458}$．

解　先把 1458 的小数点向左移两位，得14.58，由查表得$\sqrt{14.58}=3.819$．因为1458是把14.58的小数点向右移两位所成的数，所以 1458 的平方根，是把14.58的平方根3.819的小数点向右移一位所成的数38.19，即$\sqrt{1458}=38.19$．

上面的方法可简单表明如下：

$$
\begin{tikzcd}
\sqrt{1458} \arrow[r, "\text{小数点向左移2位}"] \arrow[d, equal] & \sqrt{14.58} \arrow[d, "\text{查表}"] \\
38.19 & 3.819 \arrow[l, "\text{小数点向右移1位}"']
\end{tikzcd}
$$

请同学们填下面的括号：

$$\begin{array}{ccc}\sqrt{0.1458} & \xrightarrow{(\qquad\qquad)} & \sqrt{(\qquad)} \\ \Big\| & & \Big\downarrow \text{查表} \\ (\qquad) & \xleftarrow{(\qquad\qquad)} & (\qquad)\end{array}$$

查表求五位数或者五位以上的数的平方根时，可以先四舍五入成四位数再查表.

例 4 求（1）$\sqrt{1350921}$；（2）$\sqrt{0.103425}$.

解 （1）把 1350921四舍五入成1351000，把小数点向左移六位得1.351，查表

$$\sqrt{1.351}=1.162，那么$$

$$\sqrt{1351000}=1162,$$

$$\therefore\quad \sqrt{1350921}\approx 1162;$$

（2）把0.103425四舍五入成0.1034，把小数点向右移两位得10.34，查表$\sqrt{10.34}=3.215$，那么$\sqrt{0.1034}=0.3215$，

$$\therefore\quad \sqrt{0.103425}\approx 0.3215.$$

求分数的近似平方根，可以先把分数化成小数再查表，如果化出的小数超过四个数位，就把它四舍五入成四个数位.

练 习 三

1. 查表求下列各数：

(1) $\sqrt{1.28}$； (2) $\sqrt{53.5}$；

(3) $\sqrt{45}$； (4) $\sqrt{3.852}$；

(5) $\sqrt{90.17}$； (6) $\sqrt{56.028}$；

(7) $\sqrt{2384}$； (8) $\sqrt{439}$；

(9) $\sqrt{0.0086}$； (10) $\sqrt{0.086}$；

(11) $\sqrt{2\frac{7}{25}}$； (12) $\sqrt{\frac{1}{11}}$.

2. 伟大的列宁当年曾以极大的愤怒痛斥沙皇**"象野兽一样"**侵略中国的罪行，沙皇政府通过强加在中国人民头上的不平等条约及其他卑鄙手法霸占了我国大量领土．苏修新沙皇，继承老沙皇的衣钵，他们的胃口比老沙皇还大．下表是沙皇俄国把我国的领土**"一块一块地割去"**的记录．填出表中的空格，看新老沙皇侵占我国领土的罪行！

沙皇侵占我国领土记录	被侵占的领土面积	被侵占的领土折合成正方形的边长
«中俄瑷珲条约»	600000平方公里	
«中俄北京条约»	400000平方公里	
通过«中俄北京条约»和«中俄勘分西北界约记»	440000平方公里	
«中俄伊犁条约»	70000平方公里	
越过不平等条约侵占	21000平方公里	
合 计	1531000平方公里	

1.4 带平方根号的数的运算

伟大领袖毛主席教导我们："**矛盾不断出现，又不断解决，就是事物发展的辩证规律。**"在实际问题中，我们会用到带平方根号的数的运算.

1. 计算：(1) $\sqrt{4\times9}$；(2) $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$.

解 (1) $\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6$；

(2) $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6$.

由此可知 $\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$.

一般地有 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.$(a\geq0,\ b\geq0)$

这就是说，乘积的正平方根等于各个因数的正平方根的乘积(因数可以为零).

进一步可以推出：

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}.(a\geq0, b\geq0)$$

这就是说，被开方数中的因数，如果开得尽方，可用它的正平方根代替，移到根号外面.

例 1 把下列各数中根号内的因数移到根号外面 $(a\geq0,\ b\geq0)$：

(1) $\sqrt{8}$； (2) $\sqrt{20}$；

(3) $\sqrt{144\times169}$； (4) $\sqrt{a^4b^2+a^2b^4}$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com