全国著名考研辅导班强力推荐

名师导学系列

2004年考研数学复习指导(经济类)

主编 严守权

权威专家主笔

紧扣考试大纲

系统复习指导

提炼思路技巧

中国人民大学出版社

2004年考研数学复习指导

（经济类）

主　编　严守权
撰稿人　严守权　张学贞　褚永增

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2004年考研数学复习指导(经济类)/严守权主编. 5版
北京：中国人民大学出版社，2003

ISBN 7-300-03109-9/G·579

Ⅰ. 2…
Ⅱ. 严…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第020209号

2004年考研数学复习指导(经济类)
主　编　严守权

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街31号　邮编100080)
邮购部:62515351　门市部:62514148
总编室:62511242　出版部:62511239
本社网址:www.crup.com.cn
人大考研网:www.easyky.com
经　销:新华书店
印　刷:北京鑫鑫印务有限公司

开本:787×1092毫米 1/16　印张:41.75
1999年4月第1版
2003年4月第5版　2003年4月第1次印刷
字数:960 000

定价:49.00元

前　言

《考研数学复习指导（经济类）》是在考研数学实行统考以来国内出版最早并具有一定影响的考研辅导书之一——《经济类考研数学复习指南》的基础上邀请作者编写的，本次修订时，在2002年对该书作较大修改的基础上结合2003年考研情况又做了调整，并校正了前版的错漏之处。为广大经济类考生提供一本最好的数学辅导书，一直是我们不断追求的目标。多年来，我们十分注意对考研大纲和命题的研究，跟踪变化趋势，力求准确把握定位；始终保持与广大考生的联系，反馈读者信息，不断改进我们的工作；积极参与研究生入学考试的辅导和阅卷工作，及时总结经验，主动融入和吸纳新的体验和成果。我们先后对本书做了多次较大的修订再版，本次修订主要在每个章节增加了考研试题的重点难点说明，并按内容对例题类型做了进一步归纳，使内容更为充实，结构更为完善，形式上既便于自学也便于用做培训班教材。值得欣慰的是，我们的努力得到了广大考生的认同和回报，本书已经成为受历届考生欢迎的考研必备参考书和许多考研辅导班的首选教材。借此，对于广大读者给予我们的厚爱，表示衷心的感谢。

本书的特色如下：

一是在全书的结构安排上尽可能地适应考生系统复习考研数学的需要。由于历年考研数学从整体看成绩不高，在考生中存在一种误解，似乎考试辅导书选题难度越大越好，技巧越多越好，忽略考试大纲所确定的要求标准，有些考生甚至花很大精力去钻研考纲之外的内容，其结果未必理想。本书始终坚持要原原本本地尽可能准确地介绍考研大纲划定的内容及题型和必备公式、重点难点，为此还提供了近几年统考试题及其解析，使考生具体地了解考研命题的特点。书中通过精选大量具有代表性的例题和练习题，帮助考生系统复习并掌握所需知识，提高解题能力。为了帮助考生对所做练习结果进行检验，我们对每道练习题提供了题解简答或详细的提示说明。

二是在内容上能准确体现出经济学硕士研究生数学入学考试的要求、重点、难点。本书十分注重对大纲划定的基本概念、基本定理和基本公式的理解和掌握，且作者认为这是考生必须具备的基础。以往考生往往花费很大精力去做超出大纲的技巧性过强的偏题怪题，而忽视大纲的基本要求，以致遇到一些基本题时，似懂非懂，似会非会，该得分的未能得分，这是应该尽量避免的。同时，我们还十分注意对考试的难点、重点和考生较为普遍存在的弱点进行讲解，并侧重于对基本概念、基本定理和基本公式的扩展和延伸，以及它们之间的交叉和综合应用，适度加大了相关题型的覆盖面和难度，其中标准化试题、综合性试题、经济应用题和论证题占有较大比重。

三是全书构想最终落脚于提高考生的应试能力，也就是贴近考试，强调实战训练。主要体现在：例题讲解时，强调的是解题的思路，而不是最终的结果；在行文表述符号引用时，力求规范严谨；加强了习题的选配，使之更具代表性、多样性。

为了给广大考生提供更多的综合训练和实战的机会，我们这次修改将原书中的模拟试题从15套增至20套，并附有详细解答，在此基础上加强了对考试试卷的综合分析。考虑到更多考生的需要和本书篇幅限制，这部分内容单独成册，书名为《2004年考研数学模拟考场（经济类）》，欢迎大家选购。

根据历届考生提供的复习经验，要使本书在考研中发挥更大的作用，建议读者将全书读两遍：第一遍主要是了解和掌握考研数学的内容和一般方法；第二遍要在此基础上温故而知新，对书中例题和练习题举一反三，总结归纳出规律和思路，提高解题速度和准确性、规范性。

本书中加“*”内容，对数学四考生不作要求。

由于数学考试大纲的基本内容与国家教委审定的财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲基本相同，因此，本书不失为高等院校财经类专业本科生学习“经济数学基础”课的一本较好的参考书。本书部分内容与MBA（工商管理硕士）数学入学考试高等数学部分相似，也可作为该类考生复习参考书。

曾经多年从事经济类考研数学命题工作的龚德恩教授自始至终指导和帮助这本书的出版，并仔细审阅了全部书稿；张南岳教授、王新民教授、莫颂清副教授帮助审阅了部分书稿；李赛时、刘力、蔡明、王建生老师参加了部分初稿的编写；中国人民大学出版社的有关同志为本书的出版做了大量工作。在此，我们一并表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，若有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2003年2月

目　　录

第一篇　经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第二篇　统考试题分类解析

第一篇 经济学硕士入学考试数学考试大纲的内容和要求

第一章 微积分

一、函数、极限、连续

内容提要

1. 函数概念

函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性.

函数的几何特性.

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略).由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为 $C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$.一般地,$C(x)=$ 固定成本 + 可变成本;$R(x)=px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为销量;$L(x)=R(x)-C(x)$.商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限概念

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,总有不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

设有函数 $f(x)$ 和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时,$f(x)\to A$,则称 A 为 $x\to x_0^+$(或 $x\to$

x_0^-)时，函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限). 记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ (或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$). 类似地可定义 $x \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时，$f(x) \to A$ 的极限概念.

函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+(+\infty)} f(x) = \lim_{x \to x_0^-(-\infty)} f(x) = A$$

无穷小与无穷大：有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量. 若 α, β 为同一变化趋势下的无穷小量，且 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \rho$，则当 $\rho = 0$ 时，称 β 为比 α 高阶的无穷小量，当 $\rho = \infty$ 时，称 β 为比 α 低阶的无穷小量，当 $\rho = c \neq 0$ 时，称 β 为与 α 同阶的无穷小量，特别地当 $\rho = 1$ 时，称 β 为与 α 等价的无穷小量，记作 $\alpha \sim \beta$.

$\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有运算法则：

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

两个重要的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{\varphi(x) \to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

罗必塔法则：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

(1) $x \to a$ (或 $x \to \infty$)时，

$f(x) \to 0$(或∞)，

$g(x) \to 0$(或∞)；

(2)在点 a 某空心邻域内(或存在正数 M，当 $|x| > M$ 时)，$f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x) \neq 0$；

(3)极限 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$(或$\infty$)或 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$(或$\infty$)，

则有 $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty)$$

3. 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则

(1)$f(x)$在$[a,b]$上取到最大值和最小值(最值定理);

(2)$f(a)\neq f(b)$时,对介于 $f(a)$和 $f(b)$之间的任一实数 c,必存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$(介值定理).

重点难点

1. 函数概念

(1)函数概念中,定义域和对应法则是两个基本要素.两个函数只有在定义域和对应法则都相等的情况下相等.要熟练掌握函数定义域的计算,尤其要养成在定义域内考虑和求解问题的习惯.

(2)函数关系中最常见的复合函数关系.对于复合函数形式:$f(\varphi(x))=\Psi(x)$,通常要考虑的基本问题是:

已知 $f(x)$,$\Psi(x)$,求 $\varphi(x)$及其定义域;

已知 $f(x)$,$\varphi(x)$,求 $\Psi(x)$及其定义域;

已知 $\varphi(x)$,$\Psi(x)$,求 $f(x)$及其定义域.

以上函数关系的转换,是考研解题的一种基本方法,应熟练掌握.

(3)初等函数、分段函数、变上限积分函数和经济函数是经济类考生应重点掌握的函数类型.其中,初等函数是基础,应熟练掌握基本初等函数的性质和图形特征.对分段函数,处理相关问题时,要注意分段开区间分段用公式或用规则一般处理,分段点处要利用左、右极限为工具,单独处理.对变上限积分函数,首先要分清自变量、积分变量,其次是要掌握其性质,并熟练掌握求导运算.在经济函数中,应主要掌握成本函数 $C(x)$,收益函数 $R(x)$,需求和供给函数 $X_d(p)$,$X_s(p)$,利润函数 $L(x)$的结构和经济含义.

2. 函数的单调性与对称性

函数性质中应重点掌握函数的单调性和对称性.

(1)函数的单调性是考研试题中常见题型.一是若干单调函数复合后单调性的讨论;二是单调性的判别和证明,其主要工具是导数,最终归结为 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)的证明和判断.

(2)函数的对称性在微分和积分中都有广泛的应用.

函数对称性主要有三种形式:若 $y=f(x)$是偶函数,则函数曲线关于 Y 轴对称;若 $y=f(x)$是奇函数,则函数曲线关于原点对称;若 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$互为反函数,则两曲线关于直线 $y=x$ 对称.

在微分学中,经常用几何直观来讨论函数的性质.如,对于奇、偶函数,可以由函数在 $x>0$ 时的单调性、凸性等反推 $x<0$ 时的单调性和凸性等.讨论时只要利用几何图形的翻转即可作出判断.

在积分学中,通常可利用对称性简化积分运算.

3. 函数极限概念

(1)函数极限是自变量在一个特定变化过程中函数取值的变化趋势,即当自变量变化

足够大时，函数的所有取值都与定常数之差的绝对值任意小．函数极限的存在，与趋向点 x_0 处函数取值无关，在极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 下，$x\neq x_0$；且自变量趋向方式是任意的，不能加以限定；在同一极限号下，变量各部分同步变化．

(2)函数极限存在，有惟一性、有界性和保号性，其中保号性是指函数极限值符号与变化邻域内函数取值符号的一致性．即：

若 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A>0$（或 <0），则必存在 x_0 的某空心邻域（或区域 $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$），在该区域内，$f(x)>0$（或 <0）．

若函数 $f(x)\geqslant 0$（$\leqslant 0$），则 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）．

保号性在判断极值问题时有应用．

4．极限的收敛性

(1)极限的收敛性通常出现在未定式的定值问题中，最终取决于无穷小量趋于零，或无穷大量趋于无穷大的速度问题，即阶的概念．就无穷大量而言，大体有五个不同的速度层次：

$$\ln n,\ n^{\alpha}(\alpha>0),\ a^{n}(a>1),\ n!,\ n^{n}$$

(2)在作极限运算时，先考虑阶的问题，在能区分高低阶的情况下，应有所取舍，只考虑能最终确定其变化速度的项．

(3)在同阶情况下未定式定值，在连乘或连除的情况下可以用等价代换，使问题化简，常用的等价无穷小关系式在 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$．

(4)确定未定式的基本方法是罗必塔法则．注意法则只适用“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其他类型未定式均要化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，其中必有一种形式最为简便．要注意选择，运用法则时如果结合无穷小等价代换，适当化简，更为简便．

5．函数的连续性

(1)函数的连续性是由定义点的连续推广到区间连续的．讨论函数的连续性，即证函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限值等于函数 $f(x_0)$，在解题时应完整表述．

(2)函数的间断点问题涉及较多的是可去间断点，即函数在点 x_0 极限存在，但不连续的点；无穷间断点，即 x 至少在一侧趋向 x_0 时，极限为无穷大的点．前者通常涉及的是：通过求极限重新定义 $f(x_0)$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续．后者是涉及铅直渐近线的问题，即若 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点，则 $x=x_0$ 必为其铅直渐近线．

(3)必须强调的是，在运用导数讨论函数单调性和凸性时，只限于连续区间范围内．如一般情况下，在定义域内有 $f'(x)>0$，并不能推出 $f(x)$ 单调增．因此，在讨论相关函数单调性和凸性时，应找出函数 $f(x)$ 的连续区间，然后再在每个区间，一一判别．

(4)闭区间上连续函数的性质，常用的是零值定理．即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$（$\leqslant 0$），则必存在一点 $x_0\in(a,b)$（$[a,b]$），使得 $f(x_0)=0$．通常用于方程 $f(x)=0$ 的解的讨论．应注意的是 x_0 的取值范围，是开还是闭区间主要取决于乘积

$f(a)\cdot f(b)$是否严格地小于零.

例题解析

1. 函数概念

[例 1]填空.

(1)已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $f(x)$的定义域为______.

(2)设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\dfrac{x-1}{x}$,$a^2\neq 1$,$a\neq 0$,则 $f(x)$的值域为______.

(3)设 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数,且当 $0<x\leqslant 2$ 时,$f(x)=x^2-1$,则在 $(-3,-1]$上,$f(x)=$______.

(4)已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间$(0,1]$内为正,则 a 的取值范围为______.

解析:(1)求函数 $f(x)$的定义域时,一般应求出 $f(x)$的解析式.本题解析式可直接配置得到,即由 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$,有 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$ 从而知 $f(x)$定义域为$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

(2)先求出 $f(x)$解析式,为此,设法找出 $f(x)$与 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$之间的转换关系.若设 $\dfrac{x}{x-1}=t$,则有 $x=\dfrac{t}{t-1}$,于是有

$$\begin{cases} af(x)-f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\dfrac{x-1}{x} \\ f(x)-af\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \quad \text{解得 } f(x)=\frac{1+a(x-1)}{x(1-a^2)}$$

又 $f(x)$的值域即为其反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-a}{-a+x(1-a^2)}$ 的定义域,因此,$z_f=\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{a}{1-a^2}\right\}$.

(3)周期函数问题可利用定义式由平移法处理.当 $-3<x\leqslant -2$,即 $1<x+4\leqslant 2$ 时,有 $f(x)=f(x+4)=(x+4)^2-1$,当 $-2<x\leqslant -1$,即 $0<x+2\leqslant 1$ 时,有 $f(x)=f(x+2)=(x+2)^2-1$,因此,有解析式

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2-1, & -3<x\leqslant -2 \\ (x+2)^2-1, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

(4)本题可借助几何直观图形.如图 1—1.当 $a=0$ 时 $y=4x$,显然满足要求;当$a>0$时,要使 $f(x)>0$,交点 $x^*=\dfrac{2(a-4)}{3a}$必在原点左侧,即$\dfrac{2(a-4)}{3a}\leqslant 0$,解得$0<a\leqslant 4$;当 $a<0$ 时,要使 $f(x)>0$,交点 x^*必在 $x=1$ 右侧,即$\dfrac{2(a-4)}{3a}>1$,即 $-8<a<0$,综上讨论 $-8<a\leqslant 4$,即$(-8,4]$.

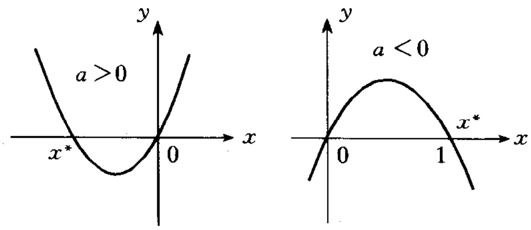

图 1—1

[例 2]单项选择题.

(1)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$,则 $x\leqslant 0$ 时, $f[g(x)]=$ (　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

(2)下列解析式中,(　　)非初等函数.

A. $y=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ |x|<1$　　B. $y=\arcsin(e^{x^2}+1)$

C. $y=\begin{cases}x-2x^2 & x<-1\\ 3x & -1\leqslant x<2\\ 2x^2-x & 2\leqslant x\end{cases}$　　D. $\int_0^x x(x-1)\mathrm{d}x$

答:(1)C　(2)B

解析:(1)分段函数在各开区间内要分段处理,再单独讨论分段点取值.在本题中,当 $x<0$ 时, $g(x)=-2x>0$,故对应于 $f(x)=x^2$,有 $f[g(x)]=[g(x)]^2=4x^2$,又 $g(0)=0$, $f[g(0)]=0^2=0$,综上所述,当 $x\leqslant 0$ 时, $f[g(x)]=4x^2$,故取 C.

(2)考察一个函数时,应考虑它的多种等价表现形式,选项 A,C,D 分别等价于 $y=\frac{x}{1-x}$, $y=x(|x-2|+|x+1|)$, $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$,均可判定为初等函数,而 $e^{x^2}+1>1$, $\arcsin(e^{x^2}+1)$ 不构成函数关系,故取 B.

[例 3]求 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

解:求解方程,反解得

$$x=y\pm\sqrt{y^2-1},\quad y^2\geqslant 1$$

由单值对应关系,当 $y\geqslant 1$ 时, $x=y+\sqrt{y^2-1}$;当 $y\leqslant -1$ 时, $x=y-\sqrt{y^2-1}$,从而得到反函数为

$$y=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\\ x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\end{cases}$$

2. 函数性质

[例 1]单项选择题.

(1)设函数 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数,则有(　　).

A. $f(x),\varphi(x)$ 均为单调函数

B. 若 $f(x)$单调增,则 $\varphi(x)$也必单调增

C. 若 $f(x)$单调增,则 $\varphi(x)$必单调减少

D. 若 $f(x)$单调,$\varphi(x)$未必单调

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数,可导,且 $F(x)=\int_0^x(x-2f'(t^3))f(-t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$是(　　).

A. 偶函数

B. 非奇非偶函数

C. 奇函数

D. 既为偶函数又为奇函数

答:(1)B　(2)A

解析:(1)存在反函数的函数关系是一一对应关系,未必单调. $f(x)$与 $\varphi(x)$曲线关于直线 $y=x$ 对称,由几何容易看到 $f(x)$与 $\varphi(x)$有相同单调性,故取 B.

(2)由 $f(x)$为偶函数,知 $f(-x)$为偶函数,$f'(x^3)$为奇函数. 又 $F(x)=x\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t-2\int_0^x f'(t^3)f(-t)\mathrm{d}t$,其中由$\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为奇函数,知 $x\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,由 $f'(x^3)f(-x)$为奇函数,知$\int_0^x f'(t^3)f(-t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,综上讨论可知 $F(x)$为偶函数,故取 A.

[例 2]给出函数 $y=\arccos(x^2+3x+2)$的单调增区间.

解:由函数 $y=\arccos x$ 单调减,知所求区间应由抛物线的单调减区间复合得到. 由直观图 1—2,$y=x^2+3x+2$ 的单调减区间为$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$,又因$|x^2+3x+2|\leqslant 1$,求解方程 $x^2+3x+2=1$,得 $x^*=\dfrac{-3-\frac{\sqrt{5}}{2}}{2}$,从而知所求函数单调增区间为$\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$.

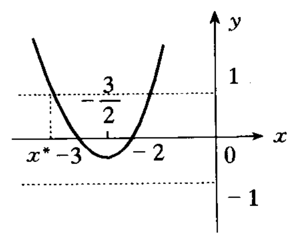

图 1—2

3. 函数的极限

[例 1]填空.

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \tan x\cdot\arctan t^2\mathrm{d}t+x^5}{x^k}=C\neq 0$,则 $k=$______,$C=$______.

(2) 已知 $f(x)$在 $x=0$ 可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=100$,则 $f'(0)=$______.

(3) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right)=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______.

(4) 设极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$,则$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$______.

(5) 已知曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴交点为$(\xi_n,0)$,则

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) =$ ______.

(6) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$可导，且$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)]$，则 $c =$ ______.

解析：(1) $x\to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$t\to 0$ 时，$\arctan t^2 \sim t^2$，因此

$$\int_0^x \tan x \cdot \arctan t^2 \mathrm{d}t = \tan x \int_0^x \arctan t^2 \mathrm{d}t \sim x\int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^4,$$

可知 x^k 与 $\frac{1}{3}x^4$ 同阶，故取 $k = 4$，且 $c = \frac{1}{3}$.

(2) $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x^2} - 1 \sim x^2$，可以推得 $f(x)\tan x \to 0$，从而$\sqrt{1+f(x)\tan x} - 1 \sim \frac{1}{2}f(x)\tan x$，因此，

$$\text{原极限} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = 100,$$

即有 $f'(0) = 200$.

(3) 利用无穷小先构造 $f(x)$ 的解析式，再求极限. 于是由

$$\text{原极限} = \lim_{x\to 0}\frac{x(f(x)-1)+\sin 2x}{x^2} = 2,$$

知 $\quad x(f(x)-1) + \sin 2x = 2x^2 + 0(x^2)$，

即 $\quad f(x) = 2x - \dfrac{\sin 2x}{x} + 1 + \dfrac{0(x^2)}{x}$

因此有 $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

(4) 由已知$\lim\limits_{x\to\infty}(4f(x)+5)$存在，从而知$\lim\limits_{x\to\infty}3xf(x)$存在，并进一步知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = 0$，因此

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}(4f(x)+5) = \frac{5}{3}$$

(5) 曲线 $y = x^n$ 在$(1,1)$处切线为 $y = n(x-1)+1$，得 $\xi_n = \dfrac{n-1}{n}$，从而

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$$

(6) 由微分中值定理，$f(x) - f(x-1) = f'(\xi)$，ξ 介于 $x, x-1$ 之间.

$$\text{于是，原等式左边} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x} = \mathrm{e}^{2c}$$

$$\text{原等式右边} = \lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)] = \lim_{\substack{x\to\infty\\ \xi\to\infty}} f'(\xi) = \mathrm{e}$$

从而知 $\quad c = \dfrac{1}{2}$

[例 2] 单项选择题.

(1) 设 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在$(a-\delta, a)$和$(a, a+\delta)$内有定义，如果条件(　　)成立，则 $f(x)$ 在 $x = a$ 极限存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A(A \neq \infty, x$ 为有理数)

B. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在，且 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定义

C. $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a + \dfrac{1}{n}\right) = f(a)$

D. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a + x) - A}{\sqrt[3]{x}} = 0$ （A 为常数）

(2) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（　　）.

A. 存在且一定等于零　　　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　　　　　　D. 不一定存在

(3) 设数列 x_n, y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则有（　　）.

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必收敛

B. 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

C. 若 x_n 无界，则 y_n 必为无穷小

D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 也必为无穷小

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\tan x + b(1 - \cos x)}{c\ln(1 - 2x) + d[(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - 1]} = 2$，其中 $a^2 + c^2 \neq 0$，则有（　　）.

A. $a + 4c - 2d = 0$（b 为任意实数）

B. $a + 4c = 0$（b, d 为任意实数）

C. $b - 2d = 0$（a, c 为任意实数）

D. $2a + b + 8c - d = 0$

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x + \sin x}{x\ln x^2 + f(x)} = \dfrac{1}{2}$，则 $f(x) =$（　　）.

A. $\cos x$　　B. $\ln 2x$　　C. x^2　　D. $\tan x$

(6) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则（　　）.

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

答：(1)D　(2)D　(3)D　(4)B　(5)C　(6)B

解析：(1)A，C是 $x \to a$ 的子过程，不能说明 $x \to a$ 的函数极限的存在性，B未明确左右极限是否相等，故仅 D 正确.

(2) 由已知，$0 \leqslant f(x) - \varphi(x) \leqslant g(x) - \varphi(x)$，又当 $x \to \infty$ 时，$g(x) - \varphi(x) \to 0$，所以有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - \varphi(x)] = 0$，但由于未知 $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)$ 的存在性，故推出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，故取 D.

(3) 对于抽象形式出现的极限只能依据相关定理判定. 由已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\dfrac{1}{x_n}}=0$, 知 y_n 是比 $\dfrac{1}{x_n}$ 高阶的无穷小, 故取 D.

(4) 由于 $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1-2x)\sim-2x$, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2$, 知原极限最终取决于 $a\tan x$ 与 $c\ln(1-2x)$ 比值的变化趋势, 即有原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\dfrac{a}{-2c}=2$, 也即 $a+4c=0$(b,d 为任意常数), 故取 B.

(5) $x\to0$ 时, $\sin x$ 为比 $x\ln x$ 高阶的无穷小, 因此, 分子极限趋向取决于 $x\ln x$, 又 $x\ln x^2=2x\ln x$, 若要极限值为 $\dfrac{1}{2}$, $f(x)$ 只能是比 $x\ln x$ 高阶的无穷小, 故取 C.

(6) 由反证法, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k\neq0$, 不妨设 $k>0$, 则必存在 x_0, 当 $x>x_0$ 时, 有 $f'(x)>\dfrac{k}{2}$, 从而有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{k}{2}(x-x_0),\text{其中 }\xi\in(x_0,x)$$

因而推得: 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 与已知矛盾. 故取 B.

[例 3] 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-\sin x)}{\sec x-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt[3]{x}\sin x}{(x^2+x)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a>0,b>0$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}\right]^2$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$, $x\neq0$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t}{x^{2n}}$, 其中 $f'(0)$ 存在, 且 $f(0)=0$

解: (1) 原极限整理为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$, 由 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$, $e^{\sin x}\to e^{\sin0}$, 所以原极限 $=1$

(2) "$\dfrac{0}{0}$" 型, 但直接用法则十分烦琐. 若先整理后计算, 则十分简便. 即

$$原极限=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x-\sin x-x\sin x)}{\sin^2x\cdot\sec x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x-x\sin x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-\sin x-x\cos x}{2x}=-1$$

(3) 式中 $\sin x$ 为有界变量, 不能直接用罗必塔法则. 分项, 其中