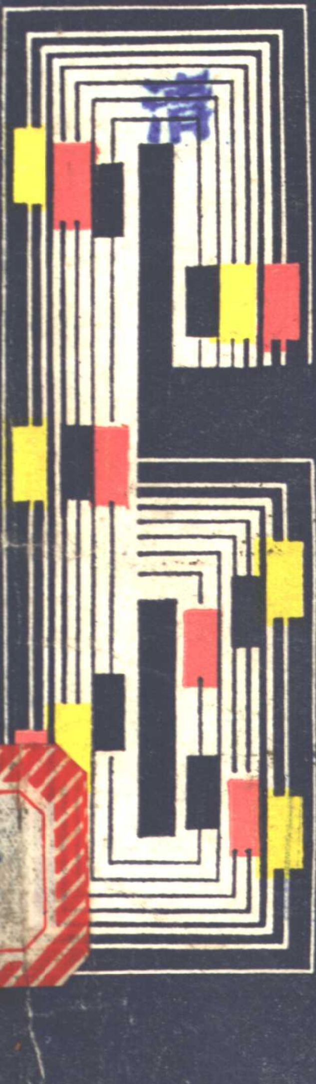
·中学生读物·

怎样解
排列组合应用题



朱匀华

广东科技出版社

中学生读物

怎样解排列组合应用题

朱匀华

广东科技出版社

内 容 简 介

排列组合是中学数学中比较难学的内容之一．本书针对初学者易犯的错误，阐述了解排列组合应用题的思想方法，并通过一定数量例题的分析，揭示解题的规律，以帮助读者提高分析问题和解决问题的能力．

本书简明扼要，通俗易懂，针对性较强．为便于初学者理解，例题分析在文字叙述上比较详细．适合高中学生、数学爱好者和准备参加高校招生入学考试的知识青年阅读，也可供中学数学教师参考．

怎样解排列组合应用题

朱匀华

*

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

广东新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 3.875印张 80,000字

1981年9月第1版 1981年9月第1次印刷

印数1—51,000册

统一书号 7182·16 定价 0.36元

编者的话

这一本小册子是根据本人在广东省数学学会举办的一次专题讲座的讲稿改写而成的。它针对了初学者易犯的错误，阐述了解排列组合应用题的思想方法，从而帮助读者加深对中学数学这部分内容的理解和掌握，以提高分析问题和解决问题的能力。

本书除引言和结束语外分为六个部分，内容如下：

第一和第二部分叙述初学排列组合时应注意的概念问题，帮助读者正确理解两个基本概念——排列和组合的概念，掌握两个基本原理——加法和乘法原理。

第三至第五部分是本书的重点，内容比较详细，实例较多，介绍解一般排列组合应用题的思想方法，着重通过例题的分析，揭示解题的规律。

第六部分除简单地归纳一般排列组合应用题的常见类型外，还简单地介绍相异元素的重复排列、环形排列、重复组合、不尽相异元素的排列与组合等类型应用题的解法。虽然这部分内容超出中学数学中排列组合的内容，但它能使读者开阔视野，还能作为中学数学课外活动小组的研究资料使用。

本书编有适量的习题，并附有答案，供读者研究和练习。

本书可作为中学生的课外读物，并适合知识青年和数学爱好者阅读，也可供中学数学教师参考。

在本书编写过程中，广州市业余大学叶世雄老师提出了许多宝贵意见和积极建议，在此表示衷心的感谢！由于编者的水平有限，编写时间比较匆促，本书一定会有不少缺点和错误，殷切希望读者批评和指正。

朱匀华

1981年春节于康乐园

两天内看完

目　　录

引　言

同学们！你们思考过这样一个问题吗？

在一个棋盘里，横竖都有九条线(图1)，由它的一个顶点A到对角顶点C，沿最短路径，有多少种不同的走法？

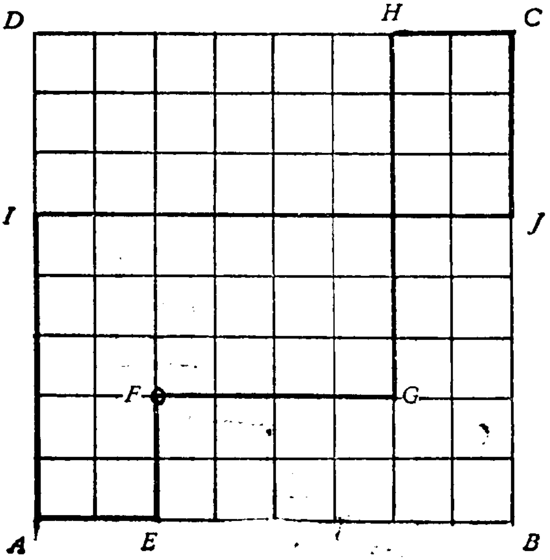


图1

这是一个富有启发性的问题。为了得到这题的答案，你也许想罗列出从A到C的所有最短路径吧！例如：

折线ABC是一条最短路径；

折线ADC是另一条最短路径；

折线$AIJC$也是一条最短路径；

折线$AEFGHC$又是另外一条最短路径.

……

这些都是从A到C的最短路径。但是，想把所有最短路径完全罗列出来是很难办到的。因为从A到C的最短路径有12,870条，这是一个不小的数字啊！

这样一种计算路径条数的问题，我们在生活中也是常常遇到的。如果住在一个棋盘形马路的城市里，假设这个城市的马路都是东西向和南北向的，东西向的马路有 6 条，南北向的马路有 5 条（图 2）。你可想到，从西南角的A点到东北角的C点，沿最短路径，有多少种不同的走法呢？

这个问题的答案是：不同的走法有126种。

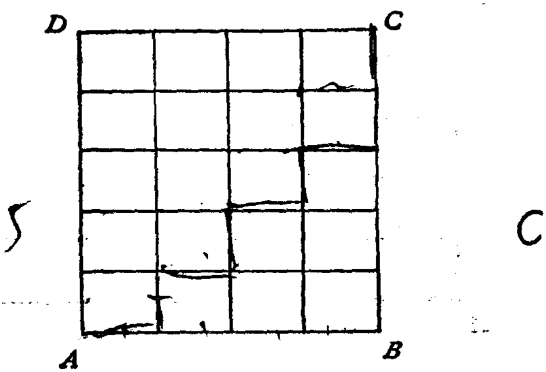


图2

上面两个问题是怎样运用排列组合的知识来解决的呢？如果你还不知道，就请读读这本书，你可以在本书的第四和第六部分中找到解答方法。

在生产实践和科学实验，以至日常生活中，我们都会遇到各种各样的可用排列组合的知识来解答的问题。比如：

(1)在产品检验时，从100件产品中任意抽取3件，一共有多少种不同的抽法？

(2)从5种规格的晶体管中选用3种，从4种规格的电阻中选用2种，组成一台电子设备，一共有多少种选择方案？

(3)在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上，需要使用多少种不同的飞机票？又有多少种不同的飞机票价？

……

你当然希望顺利地解决遇到的排列组合应用问题。但是你可能碰到困难，这是不奇怪的，因为排列组合问题的内容比较抽象，它在中学数学中，不论思想方法或者解题方法，都有一定的独特性。而且排列组合应用题的种类繁多，对于所求得的结果，往往又很难验算，甚至无法验算，因而初学者不易理解和掌握，成为中学数学中比较难教难学的一个部分。

不过，解排列组合应用题还是有章可循的，如果想知道解排列组合应用题的思想方法和解题规律，这本书也许能给你一些启示。

一、正确理解排列和组合的概念

要学好排列组合知识，首先就要正确理解排列和组合的概念，并要特别注意：排列和组合是既有联系又有区别的两个概念。请先看下面两个例子。

例1　新华、红星、前进、光明四个篮球队举行友谊赛，每两个队之间都要进行一场比赛，试问：

（1）一共要比赛多少场？

（2）冠亚军获得者，有几种可能情形？

解：（1）我们把需要进行比赛的场次列出如下：

①新华——红星；　②新华——前进；

③新华——光明；　④红星——前进；

⑤红星——光明；　⑥前进——光明。

由此可知，共要进行6场比赛。

（2）我们把获得冠亚军的可能情形列出如下：

冠军	亚军	冠军	亚军
①新华	红星	②红星	新华
③新华	前进	④前进	新华
⑤新华	光明	⑥光明	新华
⑦红星	前进	⑧前进	红星
⑨红星	光明	⑩光明	红星
⑪前进	光明	⑫光明	前进

由此可知，冠亚军获得者，共有12种可能情形。

从上面的解答可以看出：这个例子的前一个问题就是从

四个球队中，每次找出两个队并成一组，求一共有多少个不同的组。而后一个问题是从四个球队中，每次找出两个队，按照冠军在前、亚军在后的顺序排列，求一共有多少种不同的排法。这两个问题既有相同之处，又有重要区别。相同的是：都要考虑从四个球队中找出两个球队来。区别的是：因为甲队和乙队比赛也就相当于乙队和甲队比赛，因此，前一个问题与顺序无关。而甲队获得冠军，乙队获得亚军，并不等于乙队获得冠军，甲队获得亚军，因此，后一个问题与顺序有关。

例 1 的两个问题是有内在联系的，这就是：把前一个问题写出的每一组的两个球队，再按照两种顺序排列，就得到后一个问题所写出的12种可能情形。

例 2　在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上，问：

（1）有多少种不同的飞机票价？

（2）需要准备多少种不同的飞机票？

解：(1)因为飞机票价只和起点站与终点站的距离有关，例如，从北京到上海和从上海到北京，飞机票价是一样的，所以飞机票价只有下面三种情形：

北京——上海；

上海——广州；

广州——北京。

(2)这个问题和计算飞机票价的种数不同。飞机票的种数和起点站、终点站有关。例如，从北京到上海和从上海到北京，应当准备两种不同的飞机票。因此，一共要准备 6 种不同的飞机票：

起点站	终点站	起点站	终点站
北京	⟶上海；	上海	⟶北京；
上海	⟶广州；	广州	⟶上海；
广州	⟶北京；	北京	⟶广州。

从解答同样看出：这个例子的前一个问题就是从三个民航站中每次找出两个站，并成一组，求一共有多少个不同的组。而后一个问题是从三个民航站中，每次找出两个站，按照起点站在前、终点站在后的顺序排列，求一共有多少种不同的排法。与例 1 相仿，这个例子中的两个问题虽有相同之处，但有重要区别：前一个问题与顺序无关，后一个问题与顺序有关。两个问题也有内在联系，这就是：把前一个问题写出的每一组的两个民航站，再按照两种顺序排列，就得到后一个问题所写出的 6 种情形。

上面两个例子的后一个问题都属于进一步要研究的排列问题，而前一个问题都属于进一步要研究的组合问题。以后我们把问题要讨论的对象，如球队、民航站，甚至数字、字母等等统称为**元素**。这样例 2 的后一个问题就可以归结为从 3 个不同的元素中每次取 2 个元素的排列问题，而前一个问题可以归结为从 3 个不同的元素中每次取 2 个元素的组合问题。对于例 1 有类似的陈述，而一般地有下面的定义。

排列　从 n 个不同的元素中，每次取出 k 个 $(k\leqslant n)$ 不同的元素，按照一定顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中每次取 k 个不同元素的一个排列。

当 $k<n$ 时，称为**选排列**；$k=n$ 时，称为**全排列**。

组合　从 n 个不同的元素中，每次取出 k 个 $(k\leqslant n)$ 不同的元素，不管顺序怎样，并成一组，称为从 n 个不同元素中每次取 k 个不同元素的一个组合。

关于上面两个定义，需要注意一些限制条件，这就是：给出的 n 个元素是不同的，即不允许有相同的元素；而取出的 k 个元素也是不同的，即不允许重复使用元素。

例 2 中，"北京⟶上海"的飞机票就是从北京、上海、广州这三个不同元素中取出两个元素的一个排列。问题要确定有几种不同的飞机票，就是要求出从 3 个不同元素中取出 2 个元素的所有排列的个数。而"北京——上海"的飞机票价就是从北京、上海、广州这三个不同元素中取出两个元素的一个组合。问题要确定有几种不同的飞机票价，就是要求出从 3 个不同元素中取出 2 个元素的所有组合的个数。

从 n 个不同的元素中取出 k 个($k \leqslant n$)元素的所有排列的个数，简称为排列数，用符号 P_n^k 表示。

从 n 个不同的元素中取出 k 个($k \leqslant n$)元素的所有组合的个数，简称为组合数，用符号 C_n^k 表示。

例 2 中，求飞机票的种数就是求排列数，可以写为

$$P_3^2 = 6.$$

而求飞机票价的种数就是求组合数，可以写为

$$C_3^2 = 3.$$

初学者易犯一种错误，就是容易混淆排列与组合的概念。因此分清问题性质，正确判断排列或组合问题是很重要的。排列和组合的概念虽有相同之处，但有重要区别。相同的是，都要从一定数量的元素中取出若干元素来。区别的是，排列与元素的顺序有关，而组合与元素的顺序无关。例 1 和例 2 的前一个问题都与顺序无关，因此属组合问题。而后一个问题都与顺序有关，因此属排列问题。

例 3　全班有50位同学，两两握手一次，共需握多少次？又两两互赠一张照片，共需赠照片多少张？

因为甲和乙握手也就相当于乙和甲握手，因此，前一个问题与顺序无关，属组合问题，这时问题就是求组合数C_{50}^{2}。而甲赠给乙照片不等于乙也赠给甲照片，因此，后一个问题与顺序有关，属排列问题，这时问题就是求排列数P_{50}^{2}。

例4 从数字1，2，5，7中任选两个，计算它们的和与差，试问可以得到多少个不同的和与差？

因为加法满足交换律，所以计算和与顺序无关，属组合问题，这时问题就是求组合数C_{4}^{2}。而减法不满足交换律，所以计算差与顺序有关，属排列问题，这时问题就是求排列数P_{4}^{2}。

例5 全班有50位同学，选5位同学：

(1)组成一个宣传小组，有多少种选法？

(2)分别担任班长、副班长、学习委员、文体委员、生活委员，有多少种选法？

因为某5位同学组成一个宣传组时，无论他们的顺序怎样变化，仍然是同一个宣传组，所以仍属同一种选法。因此，前一个问题与顺序无关，属组合问题，这问题就是求组合数C_{50}^{5}。而选定5位同学分别担任5个职务后，只要这5人的职务分配有所变动，那就是另一种选法了。因此后一个问题与顺序有关，属排列问题，这问题就是求排列数P_{50}^{5}。

从上面几个例子可以看出在排列中要考虑元素间的顺序关系。我们说两个排列是相同的，这指的是：第一，这两个排列的元素完全相同，第二，元素的排列顺序也完全相同。如果两个排列即使元素完全相同，但这些元素的先后顺序不同，就是不同的排列。而在组合中，不考虑元素间的顺序关系。两个组合，只要元素完全相同，就是同一个组合。

我们考察从字母a、b、c、d中取出三个字母的一些

排列与组合：

对于 $a\ b\ c$ 与 $a\ b\ d$，如果作为排列，它们是不同的排列；如果作为组合，它们也是不同的组合。

至于 $a\ b\ c$，$a\ c\ b$，$b\ a\ c$，$b\ c\ a$，$c\ a\ b$，$c\ b\ a$，如果作为排列，它们都是不同的排列；但如果作为组合，则都是相同的组合。

由此可见，必须抓住“有无顺序关系”这一点，才能正确区分排列与组合。

从例 1 和例 2 的分析中已经看出，排列和组合是有内在联系的。一般地如果已经得出了从 n 个不同元素中每次取 k 个元素的所有组合，那么把每一个组合的 k 个元素，再按照一切可能顺序排列，就可以得出从 n 个元素中每次取 k 个元素的所有排列。

例如，从 a、b、c、d 四个元素中每次取出三个元素的排列与组合的内在联系如下表所示：

组合		排列
$a\ b\ c$	$\longrightarrow$	abc，acb，bac bca，cab，cba
$a\ b\ d$	$\longrightarrow$	abd，adb，bad bda，dab，dba
$a\ c\ d$	$\longrightarrow$	acd，adc，cad cda，dac，dca
$b\ c\ d$	$\longrightarrow$	bcd，bdc，cbd cdb，dbc，dcb

因此，从 n 个不同的元素中每次取出 k 个元素的排列，可以看成通过以下两个步骤来完成。

（1）从 n 个元素中取出 k 个元素；

（2）把取出的 k 个元素按一定顺序排列。

关于排列和组合的概念就谈到这里。还要附带说明一下，如果上升到集合论的角度来解释排列和组合的概念，那是比较简明的。从集合的观点看，所谓组合，就是从 n 个元素的集合中，选取 k 个元素构成一个子集合。所谓排列，就是从 n 个元素的集合中，选取 k 个元素构成一个有序的子集合（即构成子集合之后，还要对这个子集合的 k 个元素排一个顺序。注意，通常集合的元素是不考虑顺序的）。

怎样计算从 n 个不同的元素中取 k 个元素的排列数 P_n^k 和组合数 C_n^k 呢？在这一部分开头的例 1 和例 2 中，我们采用列举的方法，写出所有的排列和组合。然而在实际中，这样的方法往往是行不通的。例如，a、b、c 三个字母的全排列，只有 6 个。而四个字母的全排列就有24个，写出来已觉麻烦了。假使有十个字母，它们的全排列，就有 3,628,800 个，要把它们全部写出来，即使每秒钟写一个，也要42天才能写完。至于十一个字母呢，全排列就有近400万个，要写一年多了。且不说在每一问题中，一个个写出来不容易，有的根本不可能。即使个数比较少，要写得一个不重复，又一个不遗漏，那也是不容易办到的。

既然这样，怎样计算排列数和组合数呢？本书的第二部分将导出排列数公式和组合数公式，这要涉及两个基本原理——加法原理和乘法原理。在排列组合内容中，不论是推导公式，或是解应用问题，都常用这两个原理。因此，要学好排列组合知识，就必须切实掌握这两个基本原理。

习 题 一

1． 写出全体由数字1，2，3，4组成但数字不重复的：

(1) 二位数；$P_4^2=12$

(2) 三位数；$P_4^3=24$

(3) 四位数．$P_4^4=24$

2． 用三面分别为红、黄、蓝颜色的小旗，按不同的顺序全部升上旗杆，表示不同的信号，试列出所有可能情形． P_3^2

3． 有红、黄、蓝、白、黑五种颜色的颜料，调色时，任取三种混和，这三种颜料数量相同，试列出所有可能情形． $C_5^3=C_5^2=10$ 种

4． 判断下面所指的是排列问题，还是组合问题．

(1) 从三颗分别具有红、黄、蓝颜色的信号弹中，任取两颗，按下面两种方式发射，分别可以表示多少种信号？

①按先后顺序发射；P_3^2

②同时发射． C_3^2

(2) 同一小组里的十个同学，在假期里：

①每两人通一次电话，问总共要通多少次电话？ C_{10}^2

②每两人互通一封信，问总共要写多少封信？ P_{10}^2

(3) 平面上有五个点，其中无三点共线，试问：

①过任意两点作直线，可作多少条直线？ C_5^2

②以一点为端点，过另一点引射线，可引射线多少条？ P_5^2

(4) 从全班50位同学中选出4人到少年之家学习，在下列两种情形中分别有多少种选法？

①分别学习唱歌，跳舞，书法，画画． P_{50}^4

②都去学习唱歌． C_{50}^4