高等医药院校试用教材

医学应用生物数学

主编 曾照芳 赵恩昌

重庆大学出版社

高等医药院校试用教材

医学应用生物数学

（供医学、检验、药学、口腔、卫生、儿科等专业用）

主　编　曾照芳　赵恩昌

（以下以姓氏笔划为序）

副主编　范锡枝　傅华忠

编　委　王胜初　邓世俊　刘小飞

刘妮娅　伍蔚策　张天良

杨　华　苗巧云　钟漫如

覃　杰　蓝　荣

主　审　蔡乃木

重庆大学出版社

责任编辑　王　勇　李长惠　周　任
版式设计　王　勇　李长惠

医学应用生物数学
曾照芳　赵恩昌　主编
*
重庆大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
后勤工程学院印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/16 印张:22.5　字数:562 千
1994年7月第1版　1994年7月第1次印刷
印数:1—7000
ISBN　7-5624-0927-7/O・107定价:12.00元
(川)新登字 020 号

内 容 简 介

本书根据高等医药院校各专业的需要，系统地介绍了高等数学的基础理论知识和应用数学部分基础理论知识。内容包括一元微积分、多元微积分、微分方程、医用数学模型、线性代数、概率论、医用实验数据的统计分析、模糊数学、临床决策分析等。全书突出基本理论、基本方法、基本计算，取材新颖，深度和广度适宜，紧密结合医学实例。

本书可供高等医药院校医学、检验、药学、口腔、卫生等专业的本科学生及专修人员作教材，也可供硕士研究生作必修或选修教材，亦可作医药研究人员的学习和参考用书。

序

陈兰荪

自然科学的发展总要经历由定性研究到定量研究的过程，生命科学的各个领域的发展亦是如此。

医学应用生物数学是从数量上研究现代医学生物学中带有普遍性、深刻性、客观性规律的一门应用学科，它是以实际应用和计算应用为主的数学分支。

《医学应用生物数学》经过编委们数年的高等医药院校教学实践，反复增删、几番修正，现在正式出版了。本教材在突出了选材和表达上的通俗性与直观性，而且在不失其严密性与准确性的基础上，删去了较深的纯数学理论的冗长推导和论证，并注意与医学实例紧密结合。本教材既能满足医药院校各专业学生学习生物数学的基本理论和方法的需要，又为广大医务科学工作者再提高提供了一本良好读物。本书的出版将为生物数学的发展推波助澜，并且对于医药科学的数量化研究及加强我国数学工作者与医药科学工作者的紧密联系都将是大大有益的。

谨致数语为本书的序，为本书的出版作贺。并盼本书在实践中不断地完善与提高。

1994 年 春

前　言

随着现代医学科学的数量化、精确化，以及电子技术和计算机在医学领域中的广泛应用，由单纯观察、定性描述与积累经验的传统方式为主的医药科学已发展到将现代实验手段与各种数学方法紧密结合起来，应用数学模型进行研究的新阶段。因此，对临床医生和实验室专家的数学水准提出了新的更高的要求。

为适应现代医学科学发展的需要，青岛大学医学院、温州医学院、遵义医学院、新乡医学院、重庆医科大学、大理医学院、右江民族医学院等7所院校的有关教师协作编写了本教材。编者力图通过本课程的教学，使学生获得必要的数学理论知识和常用的计算方法，增强学生的数据处理能力、逻辑思维能力以及分析解决实际问题的能力；为学生学习后继课程提供必要的数学基础，帮助学生在阅读国内外有关的医学科学文献、处理科研数据、总结科研成果、撰写科研论文时能熟练使用有关的数学知识。

本教材内容丰富，覆盖了高等医药院校各专业的数学内容。在保持数学系统的完整性和逻辑的合理性的前提下，适当地与医学各专业实际相结合，既从现代医药学研究的需要出发选编了其它教材中没有的新内容，又根据各专业的需要保持必要的深度和广度。本书注重基础理论，删除了冗长的纯理论推导，例题尽力体现现代医药学应用的特点，选材新颖。内容由浅入深、前后呼应，尽可能达到教师好教、学生易学。各章后备有难度适当的各类习题，书末附有必要的附表和习题答案。

编者衷心感谢中国科学院数学研究所研究员、中国生物数学专业委员会主任、《生物数学学报》主编陈兰荪先生的热心指导，并为本书作序。编委会特请天津医科大学的蔡乃木教授任本教材的主审。在教材编写的过程中，得到浙江医科大学周怀梧教授、上海医科大学孙伟民教授、重庆医科大学康格非教授、广东医学院谢礼位同志的大力协助，谨此一并致谢。

恳请使用本教材的教师、学生和医药科学工作者们对本教材存在的问题提出宝贵意见，以便再版时修正。

编者

1993年12月

目　录

1.　一元函数微分学 …… 1
1.1　函数与极限 …… 1
1.2　导数 …… 12
1.3　导数的应用 …… 24
1.4　微分及其应用 …… 35
习题 1 …… 39

2.　一元函数积分学 …… 44
2.1　不定积分 …… 44
2.2　定积分 …… 55
2.3　广义积分 …… 65
2.4　定积分的应用 …… 68
习题 2 …… 75

3.　微分方程 …… 80
3.1　微分方程的基本概念 …… 80
3.2　一阶微分方程 …… 82
3.3　几种特殊类型的二阶微分方程 …… 88
3.4　二阶常系数线性齐次微分方程 …… 92
3.5　拉普拉斯变换 …… 99
3.6　医学中的数学模型 …… 105
习题 3 …… 113

4.　多元函数微积分 …… 115
4.1　空间解析几何的基本概念 …… 115
4.2　多元函数的极限与连续性 …… 116
4.3　偏导数和全微分 …… 120
4.4　多元函数的极植 …… 128
4.5　二重积分的概念和性质 …… 134
4.6　二重积分的计算 …… 138
习题 4 …… 145

5.　线性代数 …… 148
5.1　n 阶行列式 …… 148
5.2　矩阵及其运算 …… 155
5.3　逆矩阵及其求法 …… 161

5.4 向量的线性相关和矩阵的秩 …… 165
5.5 线性方程组 …… 170
5.6 特征值和特征向量 …… 175
习题 5 …… 178

6. 概率论初步 …… 182
6.1 随机事件 …… 182
6.2 随机事件的概率 …… 184
6.3 概率运算的基本法则 …… 186
6.4 全概率公式与贝叶斯公式 …… 190
6.5 独立重复试验概型 …… 193
6.6 随机变量及其分布 …… 194
6.7 随机变量的数字特征 …… 204
习题 6 …… 211

7. 医用实验数据的统计分析 …… 214
7.1 基本概念 …… 214
7.2 参数估计 …… 219
7.3 统计假设检验 …… 224
7.4 方差分析 …… 229
7.5 正交试验设计 …… 237
7.6 相关与回归分析 …… 247
习题 7 …… 255

8. 模糊数学 …… 258
8.1 模糊集合 …… 258
8.2 模糊关系与聚类分析 …… 262
8.3 模糊识别与综合评判 …… 270
8.4 模糊数学在医学中的应用举例 …… 273
习题 8 …… 276

9. 临床决策分析 …… 279
9.1 决策的基本概念 …… 279
9.2 临床决策的基本思想 …… 280
9.3 矩阵决策法 …… 282
9.4 决策树法 …… 286
9.5 检验诊断的决策分析 …… 289
9.6 贝叶斯决策诊断模型 …… 296
9.7 代价—效益分析 …… 303
习题 9 …… 308

附录 …… 310
1. 简明不定积分表 …… 310
2. 泊松分布表 …… 315
3. 标准正态分布临界值(u_α)表 …… 317
4. 正态分布表 …… 318
5. t 分布临界值(t_α)表 …… 319
6. χ^2 分布临界值(χ^2_α)表 …… 320
7. F 检验的临界值(F_α)表 …… 321
8. 正交表 …… 328
9. 各均数间相差显著时所需之 Q 值表 …… 335

习题答案 …… 336

主要参考文献 …… 347

1. 一元函数微分学

函数是高等数学的主要研究对象，极限是基本的研究方法，导数和微分问题构成了微分学的基本内容。在这一章里，主要介绍函数与极限、导数与微分的概念、计算及其应用。

1.1 函数与极限

1.1.1 函数

客观世界中一切事物都处在不断地运动和变化之中，而这种运动和变化往往又都是相互联系、彼此制约的。反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系，即函数关系。

(1)函数概念

定义 设在某个过程中有两个变量 x 和 y，若变量 x 在它可能取值的范围内每取一值时，按照某种规律，变量 y 都有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数。记为

$$y = f(x)$$

其中，x 称为自变量，y 则称为因变量。

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0，函数具有确定的对应值，则称函数在 x_0 处有定义。使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的**定义域**。当函数用纯粹的解析式绘出时，函数的定义域就是使该解析式有意义的自变量的一切值的集合。而在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定。

函数的定义域常用**区间**来表示。把以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记为

$$a - \delta < x < a + \delta \quad 或 \quad |x - a| < \delta$$

〔**例 1.1**〕 已知自由落体运动规律(即物体下落距离 s 和时间 t 的关系)为

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (g\ 为重力加速度)$$

假定物体着地时刻为 $t=T$，则此函数的定义域为 $0 \leqslant t \leqslant T$ 或用区间 $[0,T]$ 表示。

〔**例 1.2**〕 在一次静脉注射给药的情况下，血药浓度 c 随时间 t 的变化规律可用下式表示

$$c = A\mathrm{e}^{-\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\beta t}$$

其中，A、B 及 α、β 均为正的常数，$\mathrm{e} = 2.7182818\cdots$，是无理数。函数的定义域为 $0 \leqslant t < +\infty$，或用区间 $[0, +\infty)$ 表示。

〔**例 1.3**〕 设函数为 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$，因分母不能为零，即 $x \neq \pm 1$，所以函数的定义域为：

$$(-\infty, -1), (-1, 1)\ 及\ (1, +\infty)$$

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域中取一定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的对应值叫做函数当 $x=x_0$ 时的函数值。记为

$$f(x_0) \qquad 或 \qquad y|_{x=x_0}$$

例如，设 $f(x)=x^2-x+7$，　则　$f(2)=2^2-2+7=9$；

$$f(a)=a^2-a+7,$$

则　$f(a+1)=(a+1)^2-(a+1)+7=a^2+a+7$；

$$f(\frac{1}{a})=\left(\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+7 \qquad (a\neq 0)$$

前面所述函数是单值函数，即自变量 x 在定义域内每取一值时，y 只有一个确定的值与之对应，如果 y 有两个或两个以上的值与之对应，则称 y 是 x 的多值函数。例如：$y=x^2$ 的反函数有两个 $y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$。当给定一个 $x>0$，y 有两个确定的值与之相对应，所以 $y=x^2$ 的反函数是多值函数。又如，三角函数的反函数也是多值函数。本书所讨论的函数都是指单值函数。

(2)分段函数

在实际问题的研究中，有时需要对一个函数在自变量的不同范围内用不同的解析式表示，这样的函数叫做**分段函数**。对于分段函数求函数值时，要根据自变量所在范围代入相应的解析式计算。

〔例 1.4〕 在等温过程中，理想气体的压力 p 与体积 V 之间的函数关系分两种情况，当 V 不太小时遵守波义耳—马略特定律；当 V 相当小时，服从范德瓦尔定律，即

$$p=\begin{cases}\dfrac{K}{V}, & \text{当 } V\geqslant V_0\\[2ex] \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & \text{当 } V<V_0\end{cases}$$

其中 V_0、K、α、β 和 γ 都是常数。

〔例 1.5〕 根据实验测得血液中胰岛素浓度 $c(t)$(unit/ml) 随时间 t(min) 的变化数据，可建立如下经验公式

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), & \text{当}\quad 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25e^{-K(t-5)}, & \text{当}\quad t>5\end{cases}$$

其中 $K=\dfrac{\ln 2}{20}$，$\ln 2=\log_e 2$，以 e 为底的对数称为自然对数。

〔例 1.6〕 见图 1.1，求函数

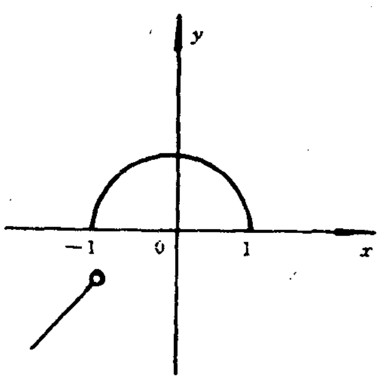

图 1.1

$$y=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & \text{当 } x<-1\\[2ex] \sqrt{1-x^2}, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

在 $x=-2$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=\dfrac{3}{2}$ 处的函数值。

解　$y|_{x=-2}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$，$y|_{x=\frac{1}{2}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$y|_{x=1}=\sqrt{1-1^2}=0$，　$y|_{x=\frac{3}{2}}=0$

(3)**复合函数与初等函数**

在中学学过的 5 种函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数，其性质与图形等在此不再赘述。

对于复合函数，先看两个例子。

〔**例 1.7**〕 以初速度 v_0 上抛物体(质量为 m)的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 而速度 v 又是时间 t 的函数：$v=v_0-gt$ 。于是，动能 E 通过 v 而成为 t 的函数 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 这时，称 E 是 t 的复合函数。

〔**例 1.8**〕 由 $y=e^u$，而 $u=-x^2$ 组成的函数 $y=e^{-x^2}$ 也叫做 x 的复合函数。

一般地，有如下定义：

定义 若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在某一区间上取值时，相应的 u 值可使 $y=f(u)$ 都有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中，u 称为中间变量。

复合函数不仅可由 2 个函数，而且可由更多个函数复合而成。

〔**例 1.9**〕 $y=(\mathrm{arctg}e^x)^2$ 可看作是由 $y=u^2, u=\mathrm{arctg}v, v=e^x$ 复合而成，其中有 2 个中间变量：u, v

同样 $y=\ln\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 可看作是由 $y=\ln u,\ u=\sin v,\ v=2x-\frac{\pi}{4}$ 复合而成。

这种把一个复合函数分解为一串简单的基本初等函数的方法是很有用的，在第二节中将介绍它的应用。

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的且能用一个数学式子所表示的函数，称为**初等函数**。例如：

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},\qquad y=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$$

等都是初等函数。初等函数是本书的主要研究对象。

(4)**曲线的直线化**

在医药科学定量研究中，常常需要寻找实验数据所遵循的函数关系——经验公式。在许多实际问题中，两个变量之间的函数关系可能不是线性的。譬如，有些生物的生长曲线，血药浓度与时间的关系曲线呈非线性，要建立经验公式首先要将它们转化为线性函数来研究，曲线的直线化是建立经验公式的一种有效方法。

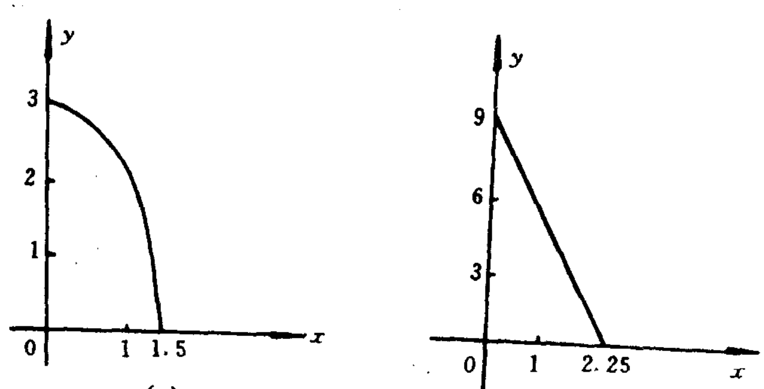

图 1.2

例如，曲线 $y^2=9-4x^2(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 的图形是椭圆在第一象限的部分，它可用描点法作图，如图 1.2(a)所示。

如果以 x^2 值作为自变量 X 值，相应的 y^2 值为因变量 Y 值，则曲线 $y^2=9-4x^2$ 变为 $Y=9-4X$ 其图形是直角坐标系 XoY 中的一条直线，如图 1.2(b)所示。

这种通过坐标变换使在旧坐标系中的曲线变成新坐标系中直线的方法叫做**曲线的直线化**。

在医学检验中，需要直线化的曲线最常见的有两种，现分别介绍如下。

1）**指数函数的曲线直线化**

指数函数 $y=ae^{bx}(a>0)$的图形是一条曲线，如图 1.3(a)所示。

对 $y=ae^{bx}$ 两边取常用对数，得

$\lg y=bx\lg e+\lg a$ 即 $\lg y=0.4343bx+\lg a$

若令 $y=\lg y$，则原方程变为直线方程：

$$Y=0.4343bx+\lg a$$

它在以 x 为**横轴**，Y 为纵轴的直角坐标系中的图形是直线，如图 1.3(b)所示。

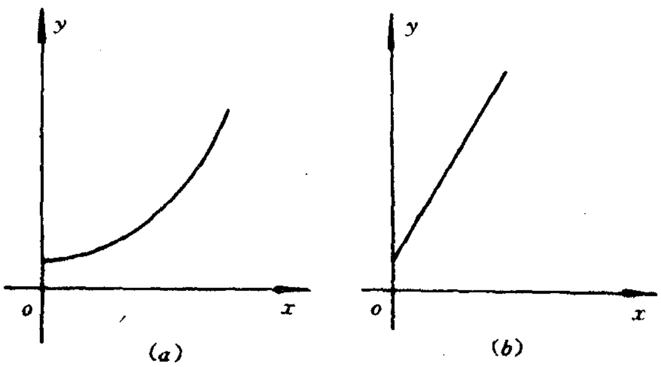

图 1.3

2)**幂函数的曲线直线化**

幂函数 $y=ax^b$。下面只讨论 $a>0$，$x>0$ 时的情形。对上式取常用对数，得

$$\lg y=b\lg x+\lg a$$

令 $X=\lg x$，$Y=\lg y$，则它在新坐标系 XoY 中为一直线：$Y=bX+\lg a$

〔例 1.10〕 作函数 $y=2x^{\frac{3}{2}}(x>0)$ 的图形，并把它直线化。

解 在直角坐标系 xoy 中作出函数 $y=2x^{\frac{3}{2}}$ 的图形，图 1.4(a)。对 $y=2x^{\frac{3}{2}}$ 两边取常用对数，得

$$\lg y=\frac{3}{2}\lg x+\lg 2$$

令 $X=\lg x$，$Y=\lg y$，则上式为

$$y=\frac{3}{2}X+\lg 2$$

它在直角坐标系 XoY 中是一条直线，参见图 1.4(b)。

曲线的直线化在医用统计及药物代谢动力学中经常用到。

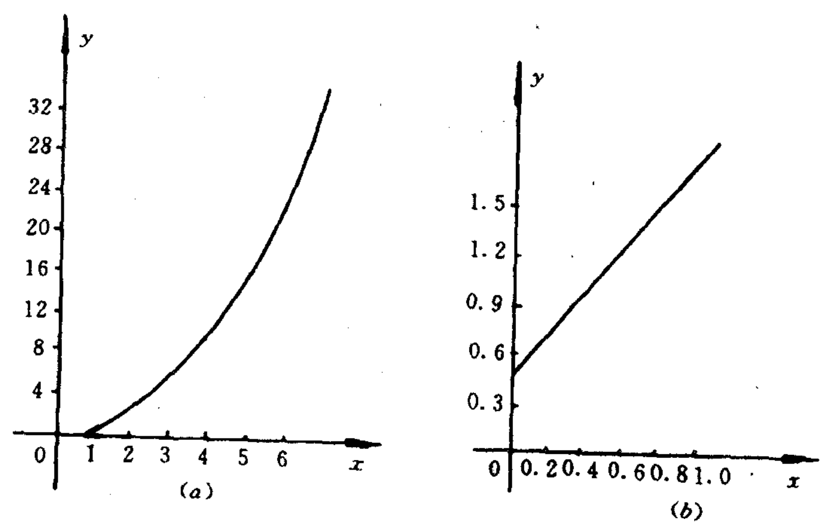

图 1.4

1.1.2 函数的极限

(1)函数极限的概念

研究函数的极限就是研究函数变化的一种趋势。函数的变化是由自变量变化引起的，所以首先要指出自变量的变化趋势。自变量的变化方式很多，这里主要讨论以下两种：一种是自变量 x 的绝对值$|x|$无限增大，记作 $x\to\infty$；另一种是自变量 x 趋向于某个定数 x_0，记作 $x\to x_0$。对于自变量变化的这两种情形，函数的极限定义如下。

定义 1 若当$|x|$无限增大时，$f(x)$的对应值无限趋近于某一常数 A，则称 A 为 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty)$$

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 有明显的几何意义，它表示当$|x|$越来越增大时，曲线 $y=f(x)$与直线 $y=A$ 无限接近，即当 $x\to\infty$时，曲线 $y=f(x)$上的点与直线 $y=A$ 上的对应点的距离$|f(x)-A|$趋于零，参见图 1.5。

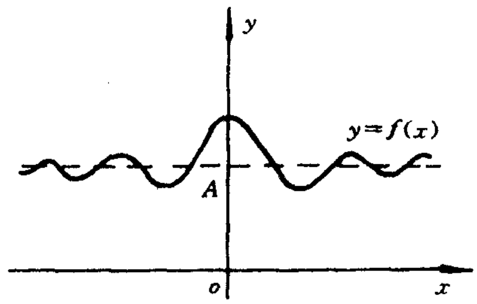

图 1.5

若定义 1 中考虑的 x 值是正的，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to+\infty)$$

若考虑的 x 值是负的，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to-\infty)$$

〔**例1.11**〕 ① $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$，但极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$ 不存在，因为$|x|\to\infty$时 $\operatorname{arctg}x$ 不趋向一个确定的常数，如图 1.6 所示。

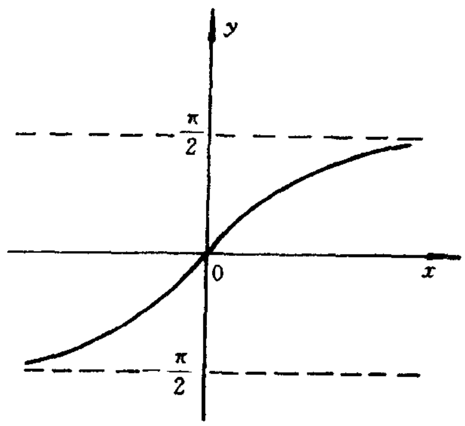

图 1.6

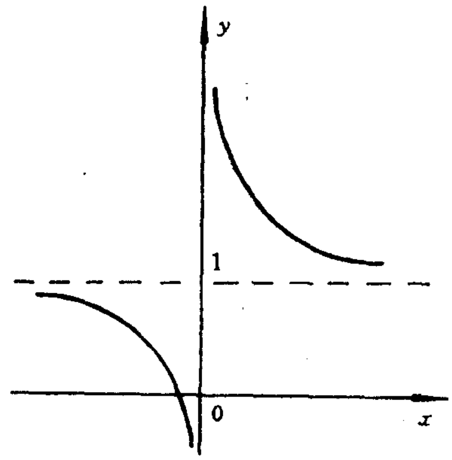

图 1.7

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ 如图 1.7 所示。

〔**例 1.12**〕 设 $f(x)=\sin x$，当 $x\to+\infty$时，对应的 $f(x)$的值总摆动于$+1$ 与-1 之间，故极限不存在。

定义 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 的邻域内有定义(但在点 x_0 可以没有定义)，若当 x 无论以何种方式无限趋近于x_0时，对应的函数值$f(x)$无限趋近于一个定数A，则称A为$f(x)$当$x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0)$$

由此定义可见：①当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$有极限 A，则必有$|f(x)-A|\to0$；②在考虑函数 $f(x)$在点 x_0 的极限时，所关心的只是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的变化趋势，函数 $f(x)$有没有极限与 $f(x)$在点 x_0 是否有定义及与点 x_0 的函数值 $f(x_0)$大小均无关，所以通常规定 $x\to x_0$ 但 $x\neq x_0$。

〔**例 1.13**〕 考虑 $f(x)=2x-1$，当 $x\to2$ 时的极限。因为$|(2x-1)-3|=2|x-2|\to0$(当 $x\to2$ 时)，所以 $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)=3$

〔例 1.14〕 考虑 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时的极限。注意函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 没有定义,但极限存在且 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。

事实上,因为 $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\to 0$ (当 $x\to 0$ 时)。所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。

〔例 1.15〕 考虑 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时的极限。因为当 $x\to 1$ 时 $x\neq 1$,故

$$|f(x)-2|=|2x-2|=2|x-1|\to 0,\ (\text{当 } x\to 1 \text{ 时})$$

所以 $$\lim_{x\to 1}f(x)=2$$

(注意:$f(x)$ 在 $x=1$ 处函数值 $f(1)=1$)

在有些问题中,往往只需要考虑 x 从 x_0 的左侧或右侧趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势,这就是所谓函数的左、右极限问题。

当 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时,如果函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 L,则称 L 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=L \quad \text{或} \quad f(x_0-0)=L$$

同样,当 x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0 时,如果函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 R,则称 R 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=R \quad \text{或} \quad f(x_0+0)=R$$

由定义 2 及左、右极限的定义,易得如下定理。

定理 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的必要和充分条件是 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 均存在且相等。

在极限存在的情况下,有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

由此可知,即使 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 都存在但不相等,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也不存在。

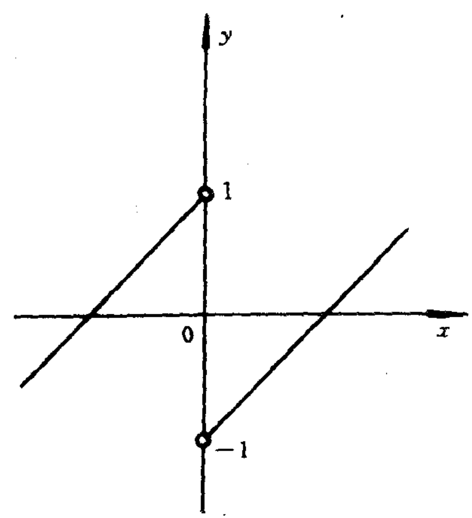

图 1.8

〔例 1.16〕 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当 } x<0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ x-1, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的左、右极限及极限。显然有

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=-1 \quad \text{见图 1.8。}$$

尽管左、右极限都存在,但不相等,故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

(2)极限的运算法则及两个重要极限

1)极限的运算法则

定理 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

1° $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

2° $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$;

3° $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$，当 $B\neq 0$ 时

4° 复合函数的极限：设 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有极限：$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$

由 2°可得下面两个推论：

推论① $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$， 其中，$C$ 为常数；

推论② $\lim[f(x)]^n=\lim[f(x)]^n=A^n$， 其中，$n$ 为正整数。

注：上述运算法则对 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 均成立，故在极限号"lim"下没有标明自变量 x 的变化趋势。

〔**例 1.17**〕 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2+3x)(x^2-1)}{6-x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2+3x)(x^2-1)}{6-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x)(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(6-x)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{6-\lim\limits_{x\to 2}x}=\frac{(2+3\times 2)\times(2^2-1)}{6-2}=\frac{8\times 3}{4}=6$$

〔**例 1.18**〕 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$。

解 由于 $x\to 1$ 时 $\frac{1}{1-x}$ 和 $\frac{3}{1-x^3}$ 的极限都不存在，故不能用法则 1°，但当 $x\to 1$ 时 $x\neq 1$，于是可将函数变形后再求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1$$

〔**例 1.19**〕 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+3}{5x^3+4x-7}$。

解 因分子、分母的极限都不存在，故不能用法则 3°，但可用 x^3 同除分子、分母再求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+3}{5x^3+4x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{2}{5}$$

2) **两个重要极限**

下面介绍两个重要极限(不证)，它们在极限的计算中起着十分重要的作用。

1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$； 2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}$

〔**例 1.20**〕 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin 3x}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x\cdot\cos x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\right]$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3}$$

〔**例 1.21**〕 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$。

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}$$

〔**例 1.22**〕 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{K}{x}\right)^x$ （K 为非零整数）。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{K}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{K}}\right]^{\frac{x}{K}\cdot K}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left[1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{K}}\right]^{\frac{x}{K}}\right]^K$

$$=\left[\lim_{\frac{x}{K}\to\infty}\left[1+\frac{1}{\dfrac{x}{K}}\right]^{\frac{x}{K}}\right]^K=e^K$$

(3)无穷小量与无穷大量

(1)无穷小量及其比较

定义 3 若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小。

例如 $f(x)=\sin x$ 是在 $x\to0$ 时的无穷小量；$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是在 $x\to\infty$ 时的无穷小量；$f(x)=2x-3$ 是在 $x\to\dfrac{3}{2}$ 时的无穷小量。

必须注意：不能把无穷小量与很小很小的数混为一谈。无穷小量是以零为极限的变量，不是数，但因为零的极限是零，所以零是可以看作无穷小量的唯一的一个常数。除此之外，任何一个很小很小的数都不能认为是无穷小量。

若函数 $f(x)$（当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时）以 A 为极限：$\lim f(x)=A$，则 $\lim[f(x)-A]=\lim f(x)-\lim A=A-A=0$，即 $\lim f(x)-A$ 为无穷小量；反之，若 $f(x)-A$ 为无穷小量，即

$\lim[f(x)-A]=0$，则由 $\lim[f(x)-A]=\lim f(x)-A=0$ 得 $\lim f(x)=A$

上述结果表明：函数 $f(x)$ 以 A 为极限的必要和充分条件是 $f(x)-A$ 为无穷小量。

若记 $f(x)-A=\alpha(x)$ （无穷小量），则 $f(x)=A+\alpha(x)$，于是上述结论还可叙述为：**具有极限的函数可表为它的极限（常数）与无穷小之和；反之，若函数能表示为一常数与无穷小之和，则此常数就是这函数的极限。**

设 $f(x)$ 是无穷小量，$\lim f(x)=0$，$g(x)$ 是有界函数：$|g(x)|\leqslant M$（M 为某个常数），由

$$|f(x)g(x)-0|=|f(x)|\cdot|g(x)|\leqslant M|f(x)|\to0$$

即 $f(x)\cdot g(x)$ 也是无穷小量。于是又得到如下结论：

有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

例如：$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}=0$，因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leqslant1$，$\sin\dfrac{1}{x-1}$ 是个有界函数，而 $(x-1)$ 当 $x\to1$ 时是无穷小量。

特别有：**常数与无穷小量的乘积是无穷小量。**