PING MIAN SAN JIAO JIE TI
YU SI LU FEN XI

高登岳 张碧莲 编

魏庚人 校

平面三角解题与思路分析

平面三角解题与思路分析

高登岳　张碧莲　编

魏庚人　校

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

平面三角解题与思路分析

高登岳　张碧莲　编

魏庚人　校

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　西安新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张10.25　字数220,000

1983年7月第1版　　1983年7月第1次印刷

印数1—18,000

统一书号：7202·76　　定　价：0.86元

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化教学参考读物，陆续出版。

前　　言

为了适应中学数学教学及知识青年自学的需要，我们根据全日制十年制学校统编教材中有关平面三角的基本内容，编写了《平面三角解题与思路分析》。在编写过程中，我们既注意了基础知识，也注意了如何运用这些知识分析问题和解决问题。

在选题上，我们坚持了由易到难，难易得当的原则。全书共选编356题，这些题一般都是与基础知识有关的常见题；也选编了历年来综合性较强、有一定难度的高考试题，对这些题，我们都作了细致分类，对每类题都指出了解题要点。

在解法上，力求简明、多样，对部分有代表性的题作了分析，以寻找证明或解题的途径；同时注意了不同的解法，以开阔读者的思路。

本书可作为中学数学教学参考；也可作为具有高中文化程度的知识青年自学之用。

西安市八十三中臧海亭同志对原稿提了好多宝贵意见，在此致以谢意。

由于我们的教学实践与业务水平有限，本书不当或错误之处在所难免，恳望读者批评指正。

编　者

1980年3月于陕西师范大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

一 基本知识

在平面三角中，不论是求值；或是证明恒等式、不等式；或是解三角形、三角方程等等，都要熟悉基本公式和基本定理，并且要善于运用基础知识分析问题和解决问题，因而有必要将解题所需的基本知识予以归纳和整理。

三角函数

同角三角函数间的基本关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.　　$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.　$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$.　　$1+\mathrm{ctg}\alpha^2=\csc^2\alpha$.

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$.　　$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

诱导公式

设α为任意角，n为整数。

(1) 凡$2n\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值，等于$\alpha$的同名函数的值，前面放上把$\alpha$看作是锐角时，原来函数在相应象限内的符号。

(2) 凡$(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数值，等于$\alpha$的相应余函数的值，前面放上把$\alpha$看作锐角时，原来函数在相应象限

内的符号。

（2）和（1）可简要地概括为“奇变偶不变，符号看象限”，以便于记忆。

三角函数的定义域和基本性质

函数	定义域	奇偶性	最小正周期	递增区间	递减区间	有界性
$y=\sin x$	一切实数	奇	2π	$[-\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi]$	$[\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{3\pi}{2}+2n\pi]$	有
$y=\cos x$	一切实数	偶	2π	$[\pi+2n\pi, 2\pi+2n\pi]$	$[2n\pi, \pi+2n\pi]$	有
$y=\mathrm{tg}\,x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	奇	π	$[-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi]$		无
$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x\neq n\pi$	奇	π		$(n\pi, \pi+n\pi)$	无

特殊角的三角函数

函数＼角	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

两角和与差的三角函数及其推论

两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}.$$

倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

积化和差公式

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$.

$2\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

其他公式

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.\qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

若令$t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，则有

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}.$$

这个公式通常叫做“万能公式”。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

三角形各元素间的关系

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$（R为外接圆的半径）。

余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$；$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$。

射影定理

$a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$；　　$b=c\cdot\cos A+a\cdot\cos C$；

$c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$。

正切定理

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}.$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin C-\sin A}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}.$$

半角公式

设　$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};\qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}};$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

若设r为内切圆半径，且$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$，则有

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a};\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b};\qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

面积公式

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B;$$

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs.$$

反三角函数与三角方程

反三角函数概念

函　　数	定　　义	定 义 域	函数值域
$y=\arcsin x$	$\sin(\arcsin x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$\cos(\arccos x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$	一切实数	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
$y=\operatorname{arcctg} x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$	一切实数	$0<y<\pi$

最简三角方程的解

方　　程	有解的条件	方程的通解
$\sin x = c$	$\lvert c \rvert \leqslant 1$	$x = n\pi + (-1)^n \arcsin c$
$\cos x = c$	$\lvert c \rvert \leqslant 1$	$x = 2n\pi \pm \arccos c$
$\mathrm{tg}\, x = c$		$x = n\pi + \mathrm{arctg}\, c$
$\mathrm{ctg}\, x = c$		$x = n\pi + \mathrm{arcctg}\, c$

二　求三角函数值

求三角函数值、化简三角函数式的问题，实际上是一系列恒等变形的过程。也就是根据题中所给条件，应用有关的同角三角函数间的基本关系式、诱导公式、两角和、两角差公式及其推论进行恒等变形；有时，根据需要也应用代数中的恒等变形公式及恒等变形法则。

为了顺利地解好这一类型的题目，必须在理解的基础上熟记基本公式、掌握它们的特征和各种变形。对基本公式不仅会“从左到右”、而且会“从右到左”加以运用。

由于三角函数式形式多样，所以进行恒等变形时，灵活性大，因此要注意选择合理、简捷的方法。在解题过程中，要注意积累、总结三角函数式变形的各种方法，以便获得一定的技能、技巧。

1　求下列各式的值：

①　$\cos20°+\cos60°+\cos100°+\cos140°$；

②　$\mathrm{tg}10°\cdot\mathrm{tg}50°\cdot\mathrm{tg}70°$。

【分析】

①式中$\cos20°$、$\cos100°$、$\cos140°$都不是特殊角的三角函数，但如果应用和差化积公式把$\cos100°+\cos140°$化为积的形式为$2\cos120°\cdot\cos20°$以后，式中除特殊角三角函数外，只含有$\cos20°$，而含有$\cos20°$部分刚好可以抵消，于是值

可求出。

②tg10°、tg50°、tg70°都不是特殊角的三角函数，但 $tg50°=tg(60°-10°)$、$tg70°=tg(60°+10°)$，这样原式就化为含有特殊角及tg10°的式子，最后应用三倍角的正切公式，问题得解。

解① $\cos20°+\cos60°+\cos100°+\cos140°$

$$=\cos20°+\cos60°+2\cos120°\cdot\cos20°$$

$$=\cos20°+\frac{1}{2}+2(-\frac{1}{2})\cdot\cos20°=\frac{1}{2}.$$

② $tg10°\cdot tg50°\cdot tg70°$

$$=tg10°\cdot tg(60°-10°)\cdot tg(60°+10°)$$

$$=tg10°\cdot\frac{\sqrt{3}-tg10°}{1+\sqrt{3}\,tg10°}\cdot\frac{\sqrt{3}+tg10°}{1-\sqrt{3}\,tg10°}$$

$$=\frac{3\,tg10°-tg^3 10°}{1-3\,tg^2 10°}=tg30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2 求下列各式的值：

① $\dfrac{1}{\sin10°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10°}$；

② $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

【分析】

①式中分母为同一角的正弦和余弦，通分后，分子为 $\cos10°-\sqrt{3}\sin10°$，可化为 $2(\frac{1}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°)=2\sin(30°-10°)=2\sin20°$。而分母可化为 $\frac{1}{2}\sin20°$，

约分，值即可求得。

②题中给出的是四个不同角的余弦函数，但如果应用诱导公式，把大于$\frac{\pi}{2}$的函数化为$\frac{\pi}{2}$以内的角的三角函数，式中就只有两个不同角的三角函数，再应用基本关系式及倍角公式，使式中只含有特殊角的三角函数，问题得解。

解① $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}$

$$=\frac{2(\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{4\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}=4.$$

② $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$

$$=\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}$$

$$=\left(\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2$$

$$-2\sin^2\frac{3\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$+\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\cdot\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$=2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com