《高等数学(一)》习题解答与辅导

高汝熹　主编

教育科学出版社

(京)新登字第111号

《高等数学(一)》习题解答与辅导

主　编　高汝熹

责任编辑　杨晓琳

教育科学出版社出版、发行

(北京·北太平庄·北三环中路46号)

各地新华书店经销

北京密云胶印厂印装

开本：850毫米×1168毫米　1/32　印张：13.25字数：328,000

1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷

印数：15,000

ISBN 7—5041—0997—5/G·954　定价：7.50

目　　录

第一章　函数及其图形

§1.1　习　　题

1. 用集合符号写出下列集合：

（1）大于30的所有实数的集合；

（2）圆 $x^2+y^2=25$ 上所有点组成的集合；

（3）椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 外部一切点的集合.

解　（1）$A=\{x|\ x>30,\ x\in R\}$；

（2）$A=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2=25,\ x\in R,\ y\in R\}$；

（3）$A=\left\{(x,\ y)\middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1,\ x\in R,\ y\in R\right\}$.

2. 按下列要求举例：

（1）一个有限集合；

（2）一个无限集合；

（3）一个空集；

（4）一个集合是另一个集合的子集。

答　（1）例如，某学校的全体教师；

（2）例如，全体奇数；

（3）例如，$x^2+3=0$ 的实数；

（4）例如，集合 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$，集合 $B=\{2,$

3，4，7，8｝，则集合A是集合B的子集。

3. 下列集合哪一个是空集ϕ？

$A=\{x \mid x+5=5\}$，$B=\{x \mid x\in R$且$x^2+5=0\}$，

$C=\{x \mid x>5$且$x<5\}$

答　集合B，C是空集ϕ。

4. 设$A=\{a,b,c\}$，下列式子中哪些是正确的？

（1）$\phi\in A$，（2）$a\overline{\in}A$，（3）$\{a\}\subset A$，（4）$\phi\subset A$，

（5）$A\subset A$，（6）$b\in A$，（7）$b\subset A$。

答　（3），（4），（5），（6）是正确的。

5. 如果$A=\{x \mid 3<x<5,\ x\in R\}$，$B=\{x \mid x>4,\ x\in R\}$。

求：（1）$A\cup B$，（2）$A\cap B$。

解　（1）$A\cup B=\{x \mid x>3,\ x\in R\}$；

（2）$A\cap B=\{x \mid 4<x<5,\ x\in R\}$。

6. 设$A=\{a,\ b\}$，$B=\{b,\ c\}$，$C=\{c,\ d\}$，求：$A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$，$A\cup A$，$A\cap B$，$A\cap C$，$(A\cup B)\cap C$，$A\cap A$。

解　$A\cup B=\{a,\ b,\ c\}$，$B\cup C=\{b,\ c,\ d\}$，

$A\cup C=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$A\cup A=\{a,\ b\}$，

$A\cap B=\{b\}$，$A\cap C=\phi$，

$(A\cup B)\cap C=\{a,\ b,\ c\}\cap\{c,\ d\}=\{c\}$，

$A\cap A=\{a,\ b\}$。

7. 试证：若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

证　对任一$x\in A$，由于$A\subset B$，所以，$x\in B$，又$B\subset C$，故也有$x\in C$，因此，$A\subset C$。

8. 用区间表示满足下列不等式的所有x的集合：

（1）$|x|\leqslant 2$；（2）$|x-5|\leqslant 1$；（3）$|x-1|<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$；（4）$|x|>1$；（5）$|x+2|\geqslant 3$。

解　（1）$\{x \mid |x|\leqslant 2\}=[-2,2]$；

（2）$\{x \mid |x-5|\leqslant 1\}=\{x \mid -1\leqslant x-5\leqslant 1\}=[4,6]$；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（3）$\{x \mid |x-1|<\varepsilon\}=\{x \mid -\varepsilon<x-1<\varepsilon\}$

$=(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$；

（4）$\{x \mid |x|>1\}=\{x \mid x>1$或$x<-1\}$

$=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$；

（5）$\{x \mid |x+2| \geqslant 3\}=\{x \mid x+2 \geqslant 3$或$x+2 \leqslant -3\}$

$=(-\infty,\ -5]\cup[1,\ +\infty)$.

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合：

（1）$|x-a|<\delta$，a 为常数，$\delta>0$；

（2）$1<|x-2|<3$.

解　（1）$\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta, a+\delta)$

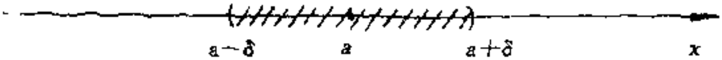

图 1-1

（2）$\{x \mid 1<|x-2|<3\}=\{x \mid |x-2|>1$且$|x-2|<3\}$

$=\{x \mid -1<x<1$或$3<x<5\}$

$=(-1,1)\cup(3,5)$

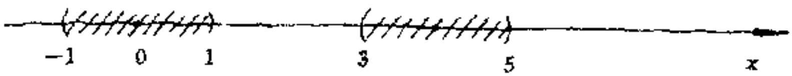

图 1-2

§ 1.2　习　　题

1. 设 E 是所有同心圆的集合，Y 为实数集合，若把同心圆与其直径建立对应关系，试验证这种对应关系构成从 E 到 Y 的映射.

证　因为题中所述的 E 与 Y 两个集合间的这种对应关系满足如下两个条件：

（1）对于集合 E 的每一个元素，即为一个同心圆，而这个同心圆对应的直径是一个实数，它是实数集合 Y 中的一个元素。因此，集合 E 的每一个元素都能按这种对应规则与集合 Y 的一个

元素对应

（2）由于圆的直径是唯一的，因此对于集合E的每一个元素，集合Y中与它对应的元素只有一个 所以，这种对应的关系构成了从集合E到Y的映射.

2.请判断下列对应关系是否构成映射.

设E集合由A、B、C三个工厂构成，Y集合由甲、乙、丙、丁四个商店构成，A、C两工厂产品分别由甲，丁两个商店销售，B工厂产品由乙、丙两商店共同销售，若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店之间建立对应关系（供销关系），问这种对应关系是否构成从E到Y的映射？

答 这种对应关系不能构成从E到Y的映射，因为对E集合中的一个元素（B工厂），在Y集合中有两个元素（乙,丙商店）与之对应，所以不符合映射的定义.

§1.3 习 题

1.求下列函数值.

（1）若$f(x)=x\cdot 4^{x-2}$,求$f(2)$, $f(-2)$, $f(t^2)$, $f\left(\frac{1}{t}\right)$;

（2）若$\phi(t)=t^3+1$,求$\phi(t^2)$, $[\phi(t)]^2$.

解 （1）$f(2)=2\cdot 4^{2-2}=2$,

$$f(-2)=(-2)\cdot 4^{-2-2}=-\frac{1}{128},$$

$$f(t^2)=t^2\cdot 4^{t^2-2}=\frac{t^2}{16}4^{t^2},$$

$$f(\frac{1}{t})=\frac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1}{t}-2}=\frac{1}{16t}4^{\frac{1}{t}};$$

（2）$\phi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$,

$$[\phi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1.$$

2．求下列函数值：

（1）若$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$．

解 $f(0)=\dfrac{|0-2|}{0+1}=2$，

$$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1},$$

$$f(a+b)=\frac{|a+b-2|}{a+b+1};$$

（2）若$g(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$

求$g(3)$，$g(2)$，$g(0)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$．

解 $g(3)=3-1=2$，　　$g(2)=2-1=1$，

$g(0)=2$，　　$g(0.5)=2$，

$$g(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（3）若$\phi(x)=\begin{cases}3+x^4, & -\infty<x\leqslant 0\\ 2^x, & 0<x<+\infty\end{cases}$

求$\phi(-2)$，$\phi(0)$，$\phi(2)$．

解 $\phi(-2)=3+(-2)^4=19$，$\phi(0)=3+0^4=3$．

$\phi(2)=2^2=4$

（4）若$\psi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$

求$\psi(1)$，$\psi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\psi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$．

解 $\psi(1)=0$，　　$\psi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\psi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 下列各对函数是否相同，并说明理由。

（1）$f(x)=\ln x^2$，　$\phi(x)=2\ln x$。

答　不相同，因为两个函数的定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$，而$\phi(x)$的定义域是$(0,+\infty)$。

（2）$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$\psi(x)\equiv 1$。

答　相同。因为两个函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，两者相同，又因为$\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，所以两个函数的对应关系也相同，因此，两个函数是相同的。

4. 求下列函数的定义域。

（1）$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

解　由于y的分母不能为零，故要求$x^2-3x+2\neq 0$，解之得$x\neq 1$，$x\neq 2$，因此定义域为$(-\infty,\ 1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

（2）$y=\sqrt{3x+4}$。

解　由于被开方数不能为负数，故要求$3x+4\geqslant 0$，解之得$x\geqslant -\dfrac{4}{3}$，因此定义域为$\left[-\dfrac{4}{3},\ +\infty\right)$。

（3）$y=\sqrt{a^2-x^2}$

解　由于要求$a^2-x^2\geqslant 0$，解得$-|a|\leqslant x\leqslant |a|$，因此定义域为$[-|a|,\ |a|]$。

（4）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$

解　记$y_1=\dfrac{1}{1-x^2}$，$y_2=\sqrt{x+4}$，于是$y=y_1+y_2$。

对于y_1，由于分母不能为零，故定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；对于$y_2$，由于被开方数不能为负数，故定义域为$[-4,\ +\infty)$。使$y_1$，$y_2$同时有意义的部分是$y$的定义域，因

此 y 的定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

（5） $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$

解 由于真数不能为负数，故要求 $\dfrac{x}{x-2}>0$，解之得 $x>2$ 和 $x<0$，因此定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

（6） $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

解 记 $y_1=\sqrt{\sin x}$，$y_2=\sqrt{16-x^2}$，于是 $y=y_1+y_2$。

对于 y_1，要求 $\sin x\geqslant 0$，故 y_1 的定义域为：

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots。$$

对于 y_2，要求 $16-x^2\geqslant 0$，故 y_2 的定义域为 $-4\leqslant x\leqslant 4$。使 y_1，y_2 同时有定义的部分是 y 的定义域，由此得函数 y 的定义域为 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$。

（7） $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

解 由反函数的定义域可知，$-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1$，解之得 y 的定义域为 $[1,5]$。

5. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 的定义域，并作出函数图形。

解 这是一个分段函数，其定义域为 $\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}\cup\{x\,|\,1<|x|<2\}$ 即 $(-2,2)$，其函数图形如图1-3。

6. 某产品年产量为 X 台，每台售价为400元，当年产量在1000台以内时，可以全部售出，当年产量超出1000台时，经广告宣传后又可以多售出200台，每台平均广告费40元，生产再多，本年就售不出去，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 X 的函数。

解 据题意，本年度的销售总收入可用如下的分段函数表示：

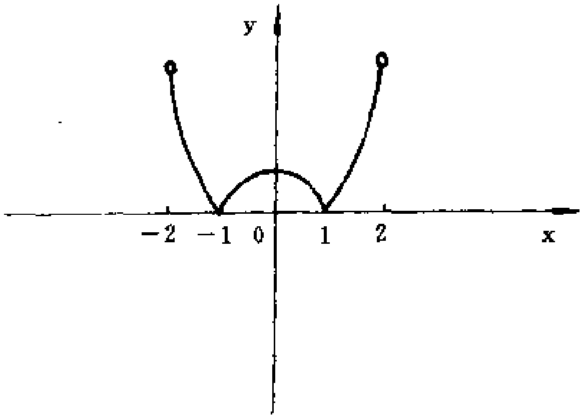

图 1-3

$$R(x)=\begin{cases}400X & ,0\leqslant X<1000\\ 400\times1000+(400-40)(X-1000) & ,1000\leqslant X\leqslant1200\\ 400\times1000+(400-40)\times200 & ,X>1200\end{cases}$$

$$=\begin{cases}400X & ,0\leqslant X<1000\\ 400000+360(X-1000) & ,1000\leqslant X\leqslant1200\\ 472000 & ,X>1200.\end{cases}$$

7.设生产与销售某产品的总收入R是产量x的二次函数，经统计得知：当产量$x=0$，2，4时，总收入$R=0$，6，8，试确定总收入R与产量x的函数关系。

解 设总收入函数$R(x)=Ax^2+Bx+c$.

由$R(0)=0$，$R(2)=6$，$R(4)=8$，得方程组，

$$\begin{cases}C=0\\ 4A+2B+C=6\\ 16A+4B+C=8\end{cases}$$

解此方程组得：$A=-\frac{1}{2}$，$B=4$，$C=0$，

所以，总收入函数$R(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$.

8.判别下列函数的单调性：

（1）$y=3x-6$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解　设x_1，x_2为y定义域中任意两点，且$x_1<x_2$，则，

$$y(x_1)-y(x_2)=3x_1-6-(3x_2-6)=3(x_1-x_2)<0$$

故，$y(x_1)<y(x_2)$，因此，$y=3x-6$在定义域内是严格单调增加的函数。

（2）$y=2^{x-1}$

解　设x_1，x_2为定义域中任意两点，且$x_1<x_2$，则，

$$y(x_1)-y(x_2)=2^{x_1-1}-2^{x_2-1}=2^{x_1-1}(1-2^{x_2-x_1})<0$$

故$y(x_1)<y(x_2)$。因此，$y=2^{x-1}$在定义域内是严格单调增加的函数。

（3）$y=\log_a x$

解　设x_1，x_2，为y的定义域中任意两点，且$x_1<x_2$，则

$$y(x_1)-y(x_2)=\log_a x_1-\log_a x_2=\frac{\lg x_1}{\lg a}-\frac{\lg x_2}{\lg a}$$

$$=\frac{\lg x_1-\lg x_2}{\lg a}=\frac{\lg\frac{x_1}{x_2}}{\lg a},$$

因为$x_1<x_2$，所以：$\lg\frac{x_1}{x_2}<0$。因此，

当$a>1$时，$y(x_1)-y(x_2)<0$，y在$(0,+\infty)$内是严格单调增加的。

当$0<a<1$时，$y(x_1)-y(x_2)>0$，y在$(0,+\infty)$内是严格单调减少的。

9. 判断下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶的函数。

（1）$f(x)=x^4-2x^2$

解　因为$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$，所以$f(x)=x^4-2x^2$是偶函数。

（2）$f(x)=x-x^2$

解　因为$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-(x+x^2)$，它不等于$f(x)$或$-f(x)$，所以$f(x)=x-x^2$是非奇非偶的函数。

(3) $f(x)=\operatorname{tg}(x)$

解 因为$f(-x)=-\operatorname{tg}x=-f(x)$，所以$f(x)=\operatorname{tg}(x)$是奇函数。

(4) $f(x)=\sin x-\cos x$

解 因为$f(-x)=-\sin x-\cos x$,它不等于$f(x)$或$-f(x)$，所以，$f(x)=\sin x-\cos x$是非奇非偶的函数。

(5) $f(x)=x\sin x$

解 因为$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，所以，$f(x)=x\sin x$是偶函数。

(6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

解 因为$f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$，所以

$$f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\text{是偶函数.}$$

(7) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

解 因为$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}$

$=-f(x)$所以，$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$是奇函数。

(8) $f(x)=a^x+a^{-x}$

解 因为$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$,所以,$f(x)=a^x+a^{-x}$ 是偶函数。

(9) $f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$

解 因为$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{\frac{1}{a^x}+1}{\frac{1}{a^x}-1}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$,

所以，$f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$是奇函数。

(10) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解　因为$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-f(x),$$

所以，$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

10. 下列各函数中哪些是周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$

解　若$y(x)$是以T为周期的周期函数，则有

$y(x+T)=y(x)$，T是满足这个方程的最小正数，于是，$\sin^2(x+T)-\sin^2(x)=0$

即，$[\sin(x+T)+\sin x][\sin(x+T)-\sin x]=0$

$$\sin\frac{2x+T}{2}\cos\frac{T}{2}\cos\frac{2x+T}{2}\sin\frac{T}{2}=0$$

由此得出　$\sin\frac{2x+T}{2}=0$

$$\cos\frac{2x+T}{2}=0$$

$$\cos\frac{T}{2}=0$$

$$\sin\frac{T}{2}=0$$

由于前两个方程中T与x有关，故不能求得T，但由后两个方程可求得T，易见

由$\cos\frac{T}{2}=0$,可求得$T=\pi$，

由$\sin\frac{T}{2}=0$，可求得$T=2\pi$.

两者中取小的一个，因此，$y=\sin^2 x$是周期为π的周期函数.

（2） $y=\cos(\omega x+\theta)$　　　（ω，θ为常数）

解 若$y(x)$是以T为周期的周期函数，则有

$$\cos[\omega(x+T)+\theta]-\cos(\omega x+\theta)=0$$

即 $$-2\sin\left(\frac{\omega T}{2}+\omega x+\theta\right)\sin\frac{\omega T}{2}=0$$

由此得出 $$\sin\left(\frac{\omega T}{2}+\omega x+\theta\right)=0$$

$$\sin\frac{\omega T}{2}=0$$

因为第一个方程中T与x有关,故不能用这个方程求出周期,但由第二个方程$\sin\frac{\omega T}{2}=0$,可以求得最小正数

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

因此，$y=\cos(\omega x+\theta)$是周期为$\frac{2\pi}{\omega}$的周期函数。

（3） $y=\cos\frac{1}{x}$

解 若$y(x)$是以T为周期的周期函数，则有

$$\cos\frac{1}{x+T}-\cos\frac{1}{x}=0$$

即 $$-2\sin\frac{2x+T}{2x(x+T)}\sin\left[\frac{-T}{2x(x+T)}\right]=0$$

由此得出 $$\sin\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0$$

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0$$

因为这两个方程中T均与x有关，所以不能解出T，可见，$y=\cos\frac{1}{x}$不是周期函数。

11. 求证函数$y=\frac{x^2}{1+x^2}$是有界函数。

证 因为$0\leqslant x^2<1+x^2$,所以$0\leqslant\frac{x^2}{1+x^2}<1$,且对定义域中的一切$x$均成立,因此根据有界函数定义,$y=\frac{x^2}{1+x^2}$是有界函数。

12. 求下列函数的反函数。

（1） $y=x^3+2$

解 由$y=x^3+2$解出$x=\sqrt[3]{y-2}$，将因变量用y，自变量用x表示后得 $y=\sqrt[3]{x-2}$

即为$y=x^3+2$的反函数。

（2） $y=\ln(x+1)$

解 由$y=\ln(x+1)$得$e^y=x+1$，$x=e^y-1$，将因变量用y，自变量用x表示后得

$$y=e^x-1$$

即为$y=\ln(x+1)$的反函数。

（3） $y=2\sin3x$

解 由$y=2\sin3x$,得$\frac{y}{2}=\sin3x$，$x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$，将因变量用$y$，自变量用$x$表示后得

$$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$$

即为$y=2\sin3x$的反函数。

（4） $y=3^{2x+5}$

解 由$y=3^{2x+5}$得$\log_3 y=2x+5$，$x=\frac{1}{2}[\log_3 y-5]$

将因变量用y，自变量用x表示后得

$$y=\frac{1}{2}[\log_3 x-5]$$

即为$y=3^{2x+5}$的反函数。

13. 利用$y=\sin x$图形，作出下列各函数的图形。

（1） $y=2+\sin x$

解 把$y=\sin x$的图形向上平移2个单位，即可得函数$y=2+\sin x$的图形，见图1-4。

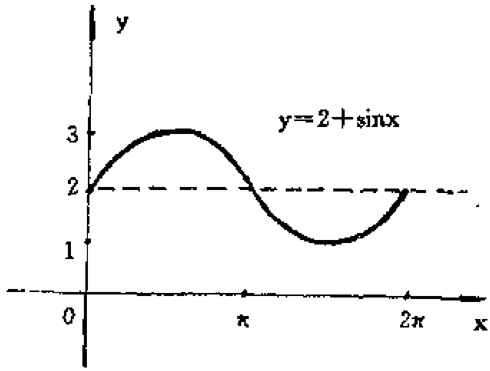

图 1-4

（2） $y=\sin(x+2)$

解 把$y=\sin x$的图形沿x轴向左平移2个单位，即可得函数$y=\sin(x+2)$的图形，见图1-5。

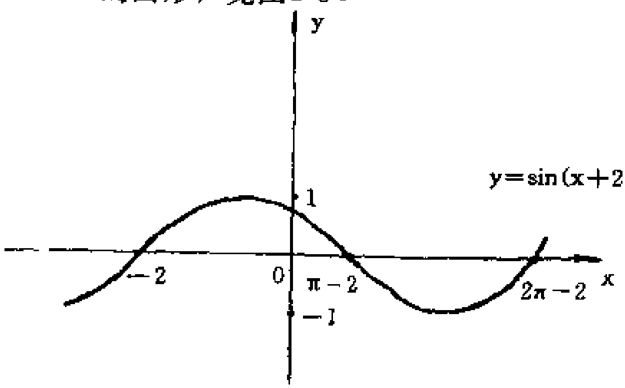

图 1-5

（3） $y=2\sin x$

解 把$y=\sin x$的图形上的每一点到x轴的距离扩大两倍，即可得函数$y=2\sin x$的图形，见图1-6。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com