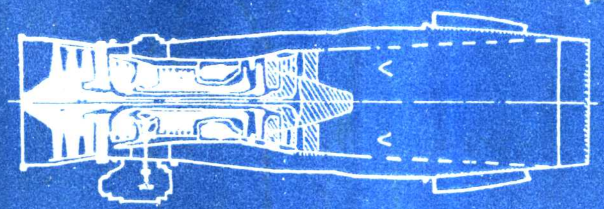
航空发动机
結构优化

肖　陵　林秀荣　马　枚　编著



北京航空航天大学出版社

航空发动机结构优化

肖　陵　林秀荣　马　枚　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了优化设计的基本理论、主要方法与实际应用。在前两章中，叙述了优化设计问题的数学模型与基础知识。中间几章介绍了各种优化方法。最后两章介绍了优化设计的应用实例，反映了优化设计方面的新进展。

本书可供航空发动机、航空机械与机械设计专业高年级学生、研究生选修课使用，亦可供相应的设计与研究部门的工程技术人员在工作时参考。

航空发动机结构优化

HANGKONG FADONGJI JIEGOU YOUHUA

肖 陵 林秀荣 马 枚 编著

责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京京辉印刷厂印装

787×1092 1/16 印张：10.5 字数：268千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷 印数：1000册

ISBN 7-81012-223-1/TK·012 定价：2.80元

前 言

近年来，优化与优化设计等名词已为人们所熟知，但优化的思想在人类早期的实践活动中就已出现。有的西方学者认为，古典寻优的思想可见诸于中国的《易经》[1]。17世纪到18世纪，西欧的数学家们也已提出了优化（Optimum）这一名词，并已讨论了诸如函数极大、极小值，最短途径以及最快下降速度等与优化有关的数学问题。本世纪20、30年代，数学家与工程师们已在研究最优控制的问题。他们当时使用的数学方法主要是微分法与变分法。30年代后发展起来的数学规划方法在50年代以后得到迅猛地发展，并成功地运用于各种优化问题，为优化方法进入工程应用领域奠定了良好的数学基础。70年代以来，在机械工程设计工作中采用优化方法，形成了优化设计这一新的领域。在实际应用中，优化设计已经取得了一定的成果。

优化设计进入工程应用领域，是受到了一种社会需要的推动。这是由于当代科学技术的飞速发展，加快了产品更新的速度，迫切要求改变设计中传统的手工业方式的方法。

长期以来，机械设计工作与其他的设计工作一样，是依靠设计工作者的经验与智慧，以手工劳动的方式来完成。在设计工作的各个阶段：查阅文献资料，分析计算，绘图与研究试验都需要工程技术人员投入大量繁重的手工劳动。当产品日趋复杂，其设计的周期也越来越长。大量的手工劳动以及日趋延长的设计周期越来越不能适应社会发展的需要。统计表明，美国每年大约有一万种新产品进入市场，平均每天就有几十种。这就要求提高产品的设计与开发的速度。研究表明，如以平均组合件的数目来衡量，产品复杂程度每15年增长一倍，而设计时间每25年才减少一半[2]。复杂的产品如航空发动机，在设计中可能要进行4×10^{12}次计算，单纯分析计算与图纸设计的周期可长达18到20个月。

60年代以后，计算机辅助设计（CAD）技术的采用，减轻了设计人员在资料检索、分析计算与图纸绘制等方面的沉重的手工劳动。而优化方法的使用更使计算机成为设计人员进行创造性劳动的有力助手。利用优化方法，设计人员借助于计算机可以在很短的时间内分析比较成千上万个设计方案，并且预先淘汰掉绝大多数非优的方案，使那些非优的设计不会进入设计-绘图-制造试验件-试验-修正设计的循环中。这不但提高了设计的质量，同时也加快了设计进度，减少了试验的经费。因此，优化设计是发展新产品与改进老产品的好、快、省的方法。所以，优化方法可以说是计算机辅助设计技术的核心[3]。国外有时把优化设计包括在计算机辅助工程（CAE）之中，使它成为与有限元分析（FEM）、数据库管理系统（DBMS）、计算机辅助几何设计（CAGD或简称为CAD）以及计算机辅助实验（CAT）等并列的模块。

现在，优化设计已日益得到广泛的应用，已从土木建筑设计、造船、化学工程等行业扩展到空间技术、电子科学、核技术等方面。在机械优化设计方面，也由机械零件的参数优化向形状优化方面发展。组合件的优化也在探索之中。将优化方法运用到航空机械以及航空发动机结构设计，是近年来新的发展。根据文献介绍，采用优化方法来设计航空燃气涡轮发动机的一些典型零组件，如轮盘或叶片榫头时，有可能使其质量减轻许多。例如，加拿大P&

W公司在发展JT15D-5型涡轮风扇发动机时，由于采用了优化设计可使高压涡轮盘质量减轻28%[4]。

为了反映这种工程技术的进步，使更多的已经比较成熟的新技术与新方法能应用于高等院校的工程教学中，根据《航空工业部1988～1990年教材规划》以及选修课教学大纲，编写了本教材。

本书是给航空发动机、航空机械或机械设计专业高年级学生或研究生编写的一本入门性的教材。为了更切合他们的实际需要，在书中着重介绍了实用的方法与应用实例。忽略了严格的数学推导与证明。为便于讲授与学习，在数学原理方面只做了最必要与简练的说明。在选材中，选取了那些最基础以及在机械优化设计中可以实际应用的优化方法，即以非线性数学规划为基础的优化方法。

本书由三部分组成。第一部分（第一、二章）叙述了有关优化设计的基本原理，包括优化设计问题的基本知识与数学模型。第二部分（第三、四、五、六章）介绍了各种实用的优化方法，包括使用导数无约束的优化方法、不使用导数的模式搜索直接优化方法以及随机优化方法。第三部分（第七、八章）着重介绍了优化设计中使用的有约束条件的优化方法以及优化设计在轴、轮盘、叶片与榫头联接设计中实际应用的例子。这一部分不但包含了优化设计方面的一些新的进展，也包含了编者在这方面科研的成果。它们对实际工作有参考价值。

在各章后的习题与思考题，汇集了编者在讲授本课程中的部分劳动成果。通过完成这些作业可以掌握部分技巧。为给使用本书的读者提供在计算机上练习的便利，书后附有三个以FORTRAN语言编写的计算机程序。

因此，本书对于那些已在工作岗位上工作的工程技术人员，除可供他们工作参考外，还可以作为更新知识的教材。

本书是由北京航空航天大学肖陵教授（主编，第一、二、六章）、马枚副教授（第七、八章）与西北工业大学林秀荣副教授（第三、四、五章）合编的。书后所附的计算机程序取自所标明的参考文献。南京航空学院支钟和副教授认真细致地审阅了书稿并提出许多宝贵的建议。因此本书也是三所主要航空院校有关专业人员通力合作的成果。

限于编者的水平，书中一定有许多不足之处，敬请使用者批评指正。

编　者

1990年5月10日

目　　录

第一章　优化设计问题的数学模型

目前在结构设计中采用的优化方法通常是非线性数学规划方法。在解决一个优化设计问题时，首先要建立数学模型，即将具体工程问题表达为可以用数学规划来寻优的数学表达式。然后，使用计算数学中提供的各种数值方法、以计算机为工具来寻求设计问题的最优解。

建立设计问题的数学模型的步骤大致包括如下的几个方面：确定设计问题的设计变量；确定目标函数；分析设计问题的约束条件；确定设计问题可行域；以数学规划的一般表达式书写，建立优化设计问题的数学模型。

第一节　设计变量

设计变量是在设计时可以选择的参数，当设计变量确定后，所设计的方案亦被确定。

在进行设计的初始阶段，设计者必须选择并确定一些有关的参数来制定设计方案，使设计能达到一定的预期的功能。在一般机械设计中，设计者为制定设计方案，通常要选择以下几方面的参数：

功能参数：表征零件、组件或机器在力、热……各方面所具有的功能的参数。如压力容器所承受的压力，承力结构所承受的负荷，旋转机械转动部分的工作转速，高温条件下机械工作的环境温度等等。

几何参数：表征零件、组件或机器在几何形状与尺寸方面的参数。如外形、体积、容积、面积、长、宽、高、厚、内径、外径、角度等等。

材料参数：表征制造零件、组件或机器所使用的材料方面的参数。如材料的种类、牌号、化学组成、机械性能等等。

工艺参数：表征制造零件、组件或机器工艺方面的参数。如零件、组件在制造系统各个阶段的工艺状态、精度、表面粗糙度与完整性、形状与位置允差、技术要求等等。

经济参数：表征零件、组件或机器在生产、销售与使用各环节或全过程经济方面的参数。如制造成本、销售价格、全寿命期费用等。

设计变量是要由上述各种各样众多的设计参数中，选择那些能使设计对象唯一的确定的、容易量化的独立参数形成。例如，产品外观美学方面的考虑有时是影响销售的重要因素。但是，首先这方面的考虑不容易量化；其次同一种产品可以有若干不同的外观设计，也就是它不能使设计对象唯一的确定。因此，通常不将这方面的参数列入设计变量中。

又例如，在设计零件、组件时，当选定了某种材料的牌号与热处理方法后，该材料的强度极限、延伸率、冲击韧性、疲劳强度等机械性能指标也随之而确定。因为材料的机械性能与其牌号和热处理状态是相关的，为保证设计变量的独立性，如选择材料牌号及热处理方法作为一个设计变量，就不必再将其他机械性能参数选为设计变量。

设计变量的这种独立性在数学模型中要用参数向量的正交性来体现。设优化问题有 n 个

设计变量 x_i，$i=1, 2, \cdots, n$。由于 n 个设计变量都是独立的，因此，每一个设计变量 x_i 都相应于向量空间的一根坐标轴，亦即一维向量。根据前述有关设计变量的定义，当设计变量确定后，设计方案就被确定。当 n 个设计变量已确定，则设计方案可用设计向量 X 来表示，而设计向量 X 是 n 个设计变量的集合。即

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

设计向量 X 是在 n 维空间内。由于工程设计问题中，各设计变量 x_i 都是实变量，所以 X 属于实数欧氏空间，即

$$X \in E^n$$

在此设计空间中，包含了各设计变量 x_i 所有可能的组合，也就是所有可能的设计方案；而且每个设计变量的组合都对应且只对应于一个设计向量 X。在优化设计过程中，为区别各次选择的设计方案，以 $X^{(0)}$，$X^{(1)}$，$\cdots$，$X^{(k)}$ 表示各次选择的设计向量。其中，$X^{(0)}$ 通常认为是原始设计向量，相应于没有进行过优化的初始设计方案。而 k 次选择的设计向量

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

对应于其参数经过修改的第 k 次选择的方案。

当设计变量只有两个时，即设计问题是一个二维问题时，其设计向量

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可以用图形表示出设计变量 x_1，x_2 与设计向量 X 的关系。在图 1.1 上示出三种设计方案对应的设计向量 $X^{(0)}$，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，与它们对应的设计变量为 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$，$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$，$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$。

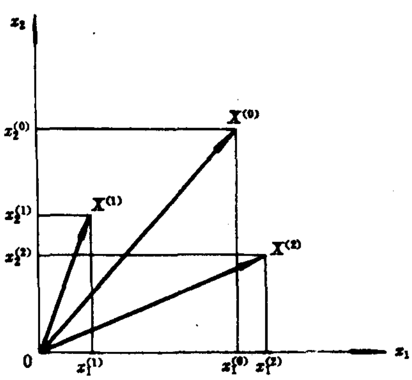


图 1.1 二维问题的设计向量

超过二维的设计问题其设计向量在多维空间内，难以几何图形表示。由于二维问题的这种直观性，在各种教材中均广泛利用二维问题的优化做为教学的示例，以便用图形的几何意义更直观的说明有关优化的问题。

但在工程实践中的优化问题大多数是高于二维的多维问题。优化设计问题的规模、计算的工作量与寻优的难度都直接与设计问题的维数有关。一般认为维数 n 在 10 以内是小型问题，维数大于10到50是中型问题，50以上是大型问题。目前虽然已能解决维数高达4000甚至更多的超大型优化问题，但这需要有高速、大容量的巨型计算机，其计算费用也十分可观。为此，在可能的情况下，应力求减少设计问题的维数。例如，可以预先选定一些参数范围有限的设计变量。在机械结构优化设计中，通常可以

预先选定某种材料，将材料参数预先确定，以减少设计问题的维数。

将几个设计变量预先组合，组成组合变量也可以有效地减少设计问题的维数。

一般，在不特别指明的情况下，设计变量 x_1，x_2，…，x_n 视为是有界的连续变量，即

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

式中：a_i，b_i——分别表示 x_i 的下界值和上界值。

在机械产品优化设计中，产品的设计要符合有关的国家标准与行业标准。产品设计参数的规格化与系列化的要求有时使设计变量不能保持其连续性，而只能是离散型的量，例如型材的尺寸与规格、齿轮的模数与螺纹的标准等。对在有限个离散点上进行优化设计的方法可见参考文献[5][6]。

例1.1　长立方形容器的优化设计

一个长立方形容器（图1.2）要进行优化设计。设计要求是在容器的容积 V_c 为给定值时，使容器有最小的质量，即 $m=\min m$。

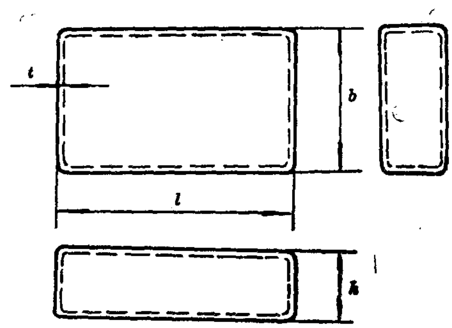


图 1.2　长立方形容器的设计变量

设计中要确定的参数包括几何参数、功能参数、材料参数以及工艺与经济方面的参数。在初始设计阶段可以忽略工艺与经济方面的参数并通过预先选定材料来确定有关材料的参数，例如材料的极限强度 σ_b 及延伸率 δ 等。

设计中的功能参数对长立方形容器而言，一般是容器内部的压强 p 以及由于安装支承方式不同，容器承受的外部集中载荷 P 和分布载荷 q。容器的几何参数有长度 l，宽度 b，高度 h 及容器的壁厚 t。

应该指出，在上列的各参数间由于存在相关性，并不能都选为设计变量。因为当容器的材料、外载与内部压强条件确定后，为满足容器的强度与刚度要求，在一定几何尺寸下，容器的壁厚 t 也是确定的（是由强度计算与刚度计算所确定）。

在初始设计阶段，为简化设计问题，可取独立变量长 l、宽 b 及高 h 为设计变量。长立方形容器设计问题可简化为一个三维的问题，即

$$X=\begin{pmatrix} l \\ b \\ h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

第二节　目标函数

目标函数是一个设计变量的函数，用以表达优化设计中预期要达到的目标。目标函数通常以符号 $f(X)$ 表示，即

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

目标函数确定了设计变量与设计目标之间的量化关系。建立目标函数是建立优化设计数学模型的关键。目标函数在很大程度上影响优化设计的质量、费用与适用性。

有些设计问题的目标函数可以直接用解析式给出。例如在例 1.1 的长立方形容器的优化设计问题中，要求设计有最小的质量。而当设计变量选择为长 l、宽 b 及高 h 时，目标函数可写为

$$f(X)=m=\rho(2bl+2bh+2lh)t$$
$$=k_1(bl+bh+lh)$$

或

$$f(X)=k_1(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

式中：ρ——容器材料的密度；

t——容器的壁厚；

$k_1=2\rho t$

x_1，x_2，x_3 相应为 l，b，h。

有时目标函数中包含有微分式或积分式，难以直接求解。通常要用近似方法以数值计算求解。例如将微分转为差分、用连续累加来近似积分等来建立目标函数。有关积分的例子在例 1.2 内示出。

例1.2　旋转轮盘的优化设计

旋转轮盘广泛应用于各种旋转机械的结构中，是航空燃气涡轮发动机、地面与舰艇燃气轮机以及电站蒸汽轮机中的重要零件。旋转轮盘的优化设计已受到广泛重视，已有许多研究工作与报道，也是本书的主要内容之一，详见第八章。本例将说明在旋转轮盘优化设计中目标函数的形成。

旋转轮盘的优化设计通常是在保证它的强度、刚度与变形等条件下，使它有最小的质量，即 $m=\min m$，其目标函数为

$$f(X)=m$$

当轮盘的几何形状比较简单时，例如轮辐是等厚的或由等厚段与锥段组合而成时，轮盘质量可直接由解析式给出。如果轮辐形状由曲线形成，如图 1.3 所示，轮辐厚度 h 是半径 r 的函数，即 $h=f(r)$ 时，轮盘质量要用积分来求，即

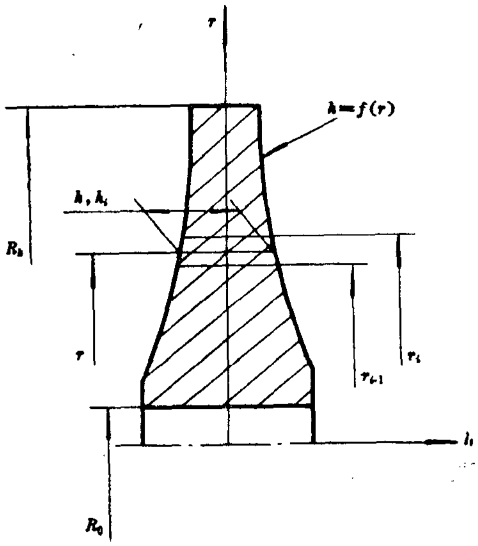


图 1.3　轮辐是曲线的轮盘

$$f(X)=m=\int_{R_0}^{R_k}2\pi\rho rh\,\mathrm{d}r$$

式中：ρ——轮盘材料的密度；

r——轮盘任一截面所在的半径；

h——轮盘半径为 r 处截面的厚度。

可以求积分得出目标函数的解析式。但一般 $h(r)$ 很难用显式表示，此时用分段累加来代替积分更加方便。目标函数有如下的形式：

$$f(X)=m=\pi\rho\sum_{i=1}^{k}(r_i^2-r_{i-1}^2)h_i$$
$$=\pi\rho\sum_{i=1}^{k}r_i^2h_i\left[1-\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^2\right]$$

式中：i——轮盘分成环段的环段序号；

r_i，r_{i-1}——第 i 环段的外径与内径（图 1.3）；

h_i——第 i 环段轮盘截面的平均厚度。

有些复杂的工程问题有时难以用解析方法建立优化设计的目标函数。许多有关使用可靠性或经济性方面的参数一般是用数理统计方法得到的。在考虑到这些问题时，常用各种形式的经验公式或回归方程作为目标函数，必要时还要引入各因素的加权因子，通常可表示为

$$f(X)=\sum_{i=1}^{J}k_iW_ix_i{}^{r^2}$$

式中：J——设计变量数；

k——常数项；

W——加权因子；

r——回归方次。

例如，某工厂的技术经济分析简化而得的目标函数有如下的形式[1]：

$$f(X)=3.18\times10^{-4}x_1{}^{1.1}x_2{}^{0.6}+114.3x_2{}^{-1}x_3{}^{-1}+2.28x_3-3.38x_1{}^{0.25}$$

对于多目标的优化问题，可以采用类似的方法，将各个目标的目标函数 $f_i(X)$，$i=1,2,\cdots,l$，组成线性的复合目标函数，必要时，用加权因子W_i 考虑各目标在总目标中的权重。此时，总目标函数有下列形式：

$$f(X)=\sum_{i=1}^{l}W_if_i(X)=W_1f_1(X)+W_2f_2(X)+\cdots+W_lf_l(X)$$

由上述可见，各种问题目标函数形式不同，简繁不同。对建立目标函数的基本要求是要能准确地表达设计的技术要求。一方面要通过分析，尽量减少目标函数中多余与重复的表达内容，使目标函数在形式上尽量简化以利于计算；另一方面目标函数又必须包含设计技术要求中必要的、不可缺少的内容，否则将使优化的结果缺乏可信性。

设计任务与对象不同，目标函数亦不相同。对一般机械而言，例如齿轮传动减速器，在新设计时其目标可能是在给定的负荷下，使结构具有最轻的质量、最小的体积或最长的使用时间。而对于现有的减速器，通过优化设计要使它在保持现有结构变化不大的前提下，增大其承载能力或延长其工作寿命。对于航空推进系统的动力装置，军用歼击机用的涡轮喷气或涡轮风扇发动机，优化设计的主要目标是使发动机有最大的推重比。民用运输机用的发动机，巡航的经济性或全寿命期的费用是优化设计中的首要目标。超音速民航机可能为了满足起飞着陆时噪声标准的限制，进行参数优化选择。在文献[7]中介绍了为改善协和式超音速旅客机用的 Olympus 593 型涡轮喷气发动机噪声特性所进行的参数优化选择。

第三节　约束条件与可行域

（一）约束条件

进行设计时，设计要满足一定的要求。在选择设计变量时，设计变量也会受到一些条件的限制。这些要求与条件称为优化设计中的约束条件，简称为约束。在例1.1与1.2中，保持容器与轮盘的强度与刚度就是优化设计问题的约束条件。

根据约束条件的作用可将约束分为边界约束与性能约束两类。

边界约束就是对设计变量取值的范围给予限制，使它在一定的域内变化。这种约束有时又称为取值约束。机械结构设计中的几何尺寸、重量、面积、体积与容积等设计变量均大于或等于零就是一种边界约束，即

$$x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

有时 $x_i=0$ 对设计亦无意义，此时取值范围由

$$x_{i\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\max} \quad (i=1,2,\cdots,l)$$

给定。

性能约束是设计对象在一定工作条件下达到最优时所给定的限制条件，通常多以函数形式表示，所以也称为函数约束。机械设计中，对传动机械的输入、输出功率、传动比、效率等方面的限制条件，通常就是这种约束。强度设计中零组件的实际应力 σ 必须小于或等于所选用材料的许用应力[σ]，即

$$\sigma \leqslant [\sigma]$$

也是一种常见的性能约束。

在数学表达式上，约束条件可以分为等式约束与不等式约束。

等式约束通常用符号

$$h_i(X)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

表示。

不等式约束通常用

$$g_i(X) \leqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,p)$$

表示。

例1.1 长立方形容器的优化设计（续）

如前已述，设计长立方形容器要求保证一定的容积 V_c 使容器质量最小。这个条件构成了一个等式性能约束条件：

$$V_c=(b-2t)(l-2t)(h-2t)$$

如 t 与 l、b 与 h 相比很小可忽略不计时，上式可简化为 $V_c=lbh$

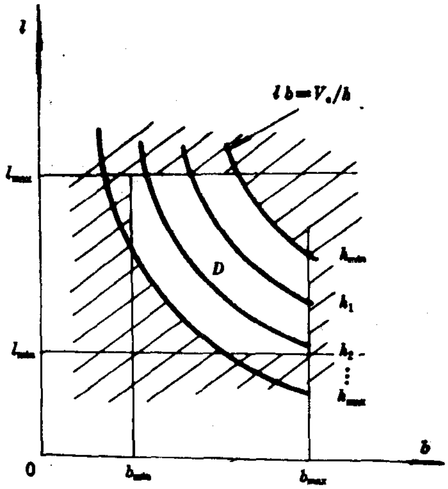


图 1.4 容器优化设计问题的约束条件与可行域

写为等式约束条件，得

$$h_1(X)=V_c-lbh=0$$

为了便于用图形来表示这个关系，先取容器高度 h 为一系列给定值：

$$h_{\min},\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_{\max}。$$

相应可得 $lb=V_c/h$ 的一系列曲线，如图1.4所示。

由图1.4可见，当容器高度的取值限制在 $h_{\min}$ 与 $h_{\max}$ 之间时，容器的长度 l 与宽度 b 也存在有同样的取值限制，即

$$b_{\min} \leqslant b \leqslant b_{\max}$$

与

$$l_{\min} \leqslant l \leqslant l_{\max}$$

形成了边界约束，如图1.4内相应的直线所示。

如果以设计变量 x_i 来代替 l，b 与 h，则

$$x_{i\min}\leqslant x_i\leqslant x_{i\max}\qquad(i=1,2,3)$$

可以改写为更一般的表达式：

$$\begin{cases}g_1(X)=x_{i\min}-x_i\leqslant 0\\ g_2(X)=x_i-x_{i\max}\leqslant 0\end{cases}\quad(i=1,2,3)$$

满足上式的设计变量区域内的取值点，对优化设计而言是一个可行的点，它对应于一个可行的设计方案。而在阴影所示的区域内（图1.4）由于取值点不满足一个或几个约束条件，因此是不可行的方案。优化设计中称能满足全部约束条件的设计向量 X 为优化设计的可行解。

（二）可行域

优化设计问题中可行解的集合称为可行域，通常以符号 D 表示，即可行解 X 有

$$X\in D\subset E^n$$

二维问题的可行域可以几何图形示出，如图1.5所示。

图 1.5 内示出的可行域 D 由两个设计变量 x_1，x_2 的取值约束

$$x_{i\min}\leqslant x_i\leqslant x_{i\max}\qquad(i=1,\ 2)$$

以及四个不等式约束

$$g_i(X)\leqslant 0\qquad(i=1,2,3,4)$$

形成。此时，在几何图形上可行域是一块由上述线段包围起来的面积。显然，在可行域 D 内有无穷多个点，也就是存在无穷多个可行解 X。

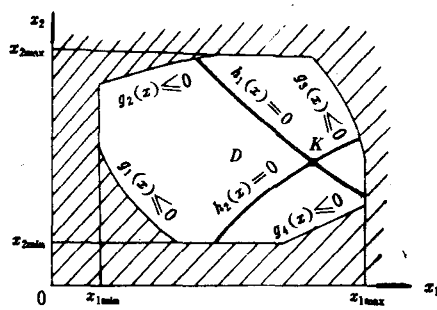


图 1.5 二维问题的可行域

如果在这时增加了一个等式约束条件

$$h_1(x)=0$$

在几何图形上可能是一条曲线或直线，而可行解必须在可行域内的这一段线段上。可行域 D 由一块面积缩减成为一段线段，这叫可行域的退化现象。应该指出，即使是在一段线段上，可能存在的可行解仍然有无穷多个。

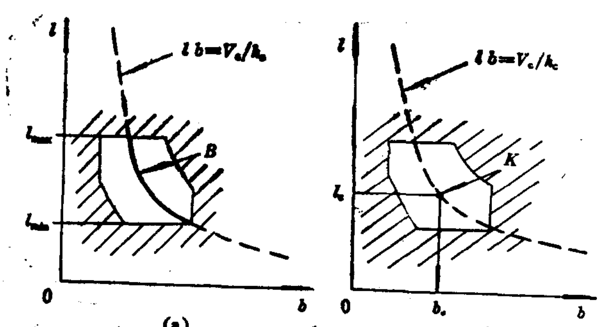


图 1.6 长立方形容器设计可行域的变化

如果再引入第二个等式约束条件

$$h_2(x)=0$$

则问题的性质会发生质的变化。因为这时可行解必须同时满足两个等式约束条件，即必须同时在这两条线段上。因此，可行解只可能是两线段的交点 K（图1.5）。这时已不存在一个可行的区域，可行解就是问题的唯一解。这个解就是由两个等于零的方程式用解析方法联立解得的解析解。

上述问题如果没有第二个等式约束条件，由于设计变量数目大于等式约束条件的数目，无法用解析方法来求解。这时，要采用寻优的方法在可行域内，寻找设计问题的最优解。

例1.1　长立方形容器的优化设计（续）

对长立方形容器的设计问题，同样可以观察到可行域的退化现象，如图1.6所示。

例如，在容器设计中，给定高度为某一定值 $h=h_c$，此时，可写为等式约束

$$h_2(x)=h-h_c=0$$

这时，所有的可行解必须在可行域内的线段B上，见图1.6（a）。

如果进一步将容器长度 l 亦取为给定值 $l=l_c$，形成第三个等式约束条件

$$h_3(X)=l-l_c=0$$

此时设计问题可直接解出，即

$$b_c=V_c/(h_c l_c)$$

如图 1.6（b）上之 K 点所示。

第四节　最　优　解

可行解中，使目标函数值为最优的解称为优化设计问题的最优解。一般最优解以符号 X^*表示，即

$$X^*=[x_1^*,x_2^*,x_3^*,\cdots,x_n^*]^T$$

它使目标函数

$$f(X^*)=\min f(X)$$

式中，$\min f(X)$表示目标函数的最优值。对于那些要求最优值为 $\max f(X)$的优化问题，可等价地写为：$\min(-f(X))$或 $\min(1/f(X))$。

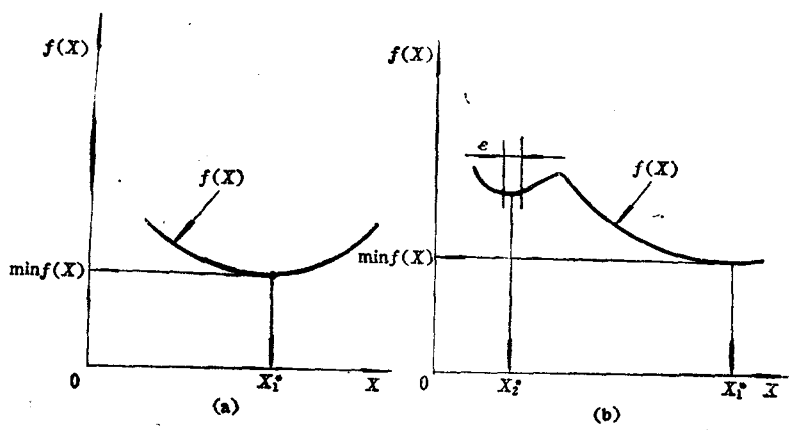


图 1.7　全局最优解与局部最优解

最优解为可行解，所以最优解必在可行域之内。某一可行解在全部可行域内使目标函数值优于其他任一个可行解时，此可行解称为全局最优解。某一可行解如果只在其 ε 邻域内使目标函数值优于在此 ε 邻域内的其他任何一个可行解时，称此可行解为局部最优解。在图1.7（a）中示出的局部最优解 X_1^*也同时是全局最优解。而在（b）中，X_1^*与 X_2^*均为局部最优解，而 $f(X_1^*)=\min f(X)$，X_1^*为全局最优解。

根据定义可知，全局最优解必为局部最优解。另一方面，局部最优是全局最优的必要条

件。但是要在数学上直接判断局部最优是否就是全局最优有时是很困难的。这是因为这一问题在很大程度上取决于目标函数在可行域内的性质。当目标函数在可行域内是单峰的(图1.7（a））或单调的（图1.8）时，一般局部最优解就是全局最优解。

如果目标函数在可行域内是多峰的（图1.7（b）），则局部最优解可能不是全局最优解。它们之间的关系取决于函数的凸性。在第二章第二节中将进一步讨论此问题。

由于目前各种优化方法所能寻得的大多数是局部最优解[8]，因此，在本书中，今后如不特别指明，最优解指的就是局部最优解。

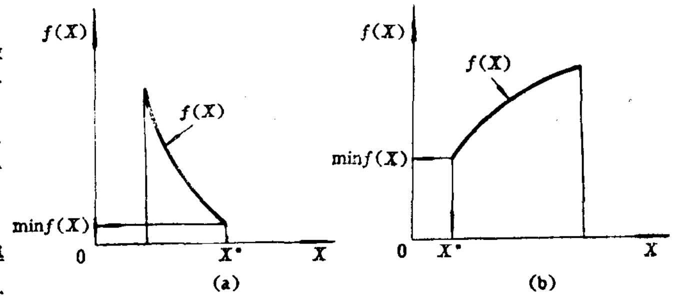


图 1.8　目标函数在可行域内是单调函数的情况

由图1.8可见，最优解有时在约束边界上，这时，最优解直接与约束条件有关。

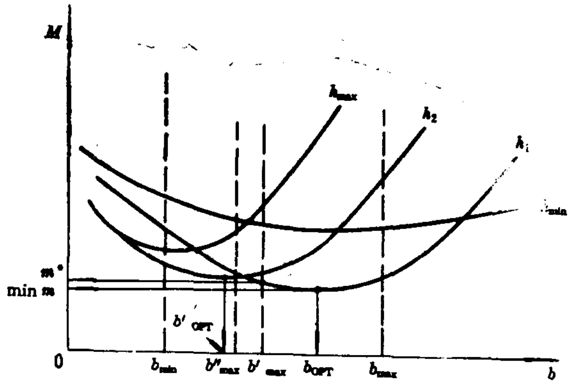


图 1.9　最优解与约束边界的关系

例1.1　长立方形容器的优化设计（续）

图1.9中示出长立方形容器优化设计中，目标函数最优解与约束边界的关系。

容器优化设计的目标是 $f(X)=\min m$。目标函数在第二节中已求出，为

$$f(X)=m=k_1(bl+lh+hb)$$

同前，用 $l=V_c/hb$ 代入，得

$$f(X)=m=k_1(V_c/h+hb+V_c/b)$$

当给定一系列 h 值后，质量m是宽度 b 的一维函数，如图 1.9 所示。

由图可见，当容器高度 h 相当于某一个给定值时，例如 h_1，h_2，…，可以在一个宽度 b 的值下，得到最小的质量 m。例如，当度为 h_1 时，在 b_{OPT} 有最小质量 $\min m$。当 b_{OPT} 在可行区间 $b_{min}\sim b_{max}$ 内时，h_1 与 b_{OPT} 即为容器优化问题的最优解，相应目标函数值为 $\min m$。

如果b_{max} 的取值受到限制，例如是安装条件的限制，使 b 的取值只能在 $b_{min}\sim b'_{max}$ 之间，此时，优化设计问题的解是h_1与b'_{max}，而目标函数值为m^*。当b 的取值区间进一步缩小到$b_{min}\sim b''_{max}$之间时，优化设计问题的解是h_2与b'_{OPT}，相应的目标函数值亦不同。

一般而言，目前正在工作着的种种机器，均满足可行性的要求。因此，现行方案一般都是一种可行方案，是优化问题的一个可行解。此可行解与最优解在设计空间中的距离，视经验的积累、设计的完善程度以及问题的难易而定。有经验的设计者对他熟悉的领域的一般问题，即使不用优化设计方法也可取得与最优解很近似的结果。但对于那些综合性强的复杂问题或是科技发展进入的新的生疏的领域，优化设计方法可以帮助设计者进行数值上的分析，及早摒弃不合理的方案、使设计能更快、更好地达到设计目标。