高等数学

（函授、自学教材）

GAODENG SHUXUE 下

冶金工业出版社

高 等 数 学

（函 授、自学教材）

下 册

邹定仪 主编

冶 金 工 业 出 版 社

本书由北京钢铁学院函授部根据1964年冶金部制定的工科高等数学函授教学大纲和东北工学院、北京钢铁学院、中南矿冶学院、西安冶金建筑学院、青岛冶金建筑学校合编的函授教材《高等数学》编写的.

本教材分上下两册；下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分，级数，常微分方程等内容.

书中加“*”的内容，可供不同专业选择学习.

本书由邹定仪主编. 参加编写的还有戚国安、秦明达，由何品三主审.

高等数学

（函授、自学教材）

下册

邹定仪 主编

*

冶金工业出版社出版

（北京灯市口74号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 11 5/8 字数307千字

1984年3月第一版 1984年3月第一次印刷

印数00,001～17,000册

统一书号：7062·4084 定价1.46元

目　录

目　录

第九章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何和平面解析几何一样，也是用代数方法来研究几何图形．把几何与代数之间沟通起来，在空间引进坐标，使空间的点与数对应起来，这样就可以用方程来表示图形．

本章首先建立空间直角坐标系，并引进在工程技术上有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线，此外还介绍曲面和空间曲线的一部分内容．

学习本章时，要求读者：

1．正确理解空间的点与有序数组，曲面与方程，空间曲线与方程组的对应关系；

2．正确理解向量、向量的加减法、向量与数的乘法、数量积与向量积的概念；

3．牢固地记住平面方程的点法式和空间直线方程的对称式，并知道有关方程中系数的几何意义；

4．见到空间直线方程、平面方程、球面方程、母线平行于坐标轴的柱面方程和二次曲面的标准方程时，能说出有关图形的名称，并能作出草图．

§9.1　空间直角坐标系

为了用有序数组来确定空间一点的位置，我们首先建立直角坐标系．

在空间任取一点O，通过点O作三条互相垂直的数组，它们都以O为原点，且一般有相同的长度单位．这三条轴分别叫做x轴（**横轴**）、y轴（**纵轴**）、z轴（**竖轴**），统称**坐标轴**．按照惯例，x轴和y轴配置在水平面上，而z轴是竖线，并规定x轴的正向朝着读者的方向，y轴的正向是自左向右，z轴的正向是自

下向上，这样的三条坐标轴组成了一个空间直角坐标系，点O叫做**坐标原点**，平面xOy、yOz、zOx叫做**坐标面**（图9-1）．这三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分叫做一个**卦限**，把含三个坐标轴正向的那个卦限叫做第Ⅰ卦限，在xOy平面的上部依次得Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四个卦限；在xOy平面的下部与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，依次得Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ四个卦限（图9-2）．

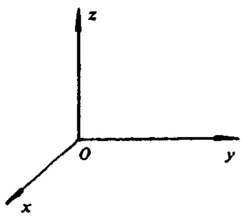

图 9-1

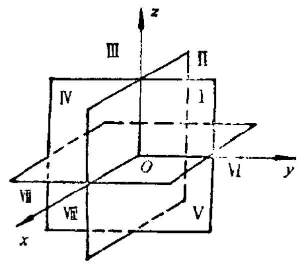

图 9-2

1．空间点的直角坐标

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系．

设M为空间一已知点，过M点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与x轴、y轴、z轴的交点依次为P、Q、R（图9-3），这三点在x轴，y轴，z轴上的坐标依次为x，y，z，于是空间的一点M就唯一地确定了一个**有序数组**x，y，z．这个数组x，y，z叫做**点M的直角坐标**，并依次称x，y和z为点M的**横标**，**纵标**和**竖标**．坐标为x，y，z的点M通常记为$M(x, y, z)$．

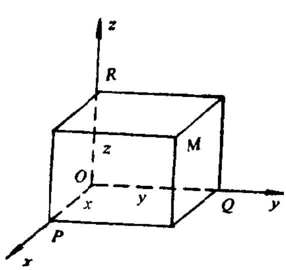

图 9-3

反过来，给定了数组x，y，z，我们依次在x轴，y轴，z轴上取与x，y，z相应的点P，Q，R，然后过点P，Q，R各作一平面分别垂直于x轴，

y 轴，z 轴，这三个平面的交点M就是以有序数组 x，y，z 为坐标的点（图9-3）.

为了把卦限名称和坐标的符号联系起来，我们列成下面的一个表：

卦限名称		第Ⅰ卦限	第Ⅱ卦限	第Ⅲ卦限	第Ⅳ卦限	第Ⅴ卦限	第Ⅵ卦限	第Ⅶ卦限	第Ⅷ卦限
坐标符号	x	+	−	−	+	+	−	−	+
	y	+	+	−	−	+	+	−	−
	z	+	+	+	+	−	−	−	−

根据上述，我们通过空间直角坐标系将空间的点M与有序数组 x，y，z 之间建立了**一一对应**的关系.

为了全面了解，我们把位于坐标面上和坐标轴上的点的坐标的特点指出如下：

yOz坐标面上的点，横标$x=0$；zOx坐标面上的点，纵标$y=0$；xOy坐标面上的点，竖标$z=0$.

x 轴上的点，$y=z=0$；y轴上的点，$x=z=0$；z轴上的点，$x=y=0$；对于原点，$x=y=z=0$.

2. 两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d.

过M_1，M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体（图9-4）. 根据勾股定理可以证明长方体的对角线的长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和. 即

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

由于 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$；

$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$；

$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，

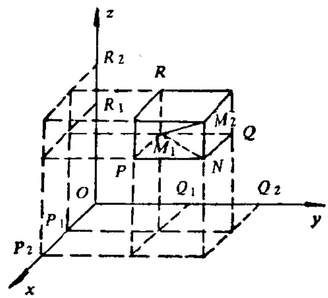

图 9-4

所以

$$\boxed{d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\quad(1)$$

特殊地点M（x，y，z）与坐标原点O（0，0，0）的距离为

$$\boxed{d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad(2)$$

上面公式（1），（2）就是空间内两点间的距离公式，

例 1　证明：顶点为M_1（4，3，1）、M_2（7，1，2）、M_3（5，2，3）的三角形是一个等腰三角形.

解

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14;$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6;$$
$$|M_3M_1|=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6;$$

因为　$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，所以$\triangle M_1M_2M_3$是等腰三角形.

例 2　在x轴上找出一点P，使它与点P_1（4，1，2）的距离为$\sqrt{30}$.

解　因要找的点P在x轴上，故可设它的坐标为（x，0，0），按给定的条件，

$$|P_1P|=\sqrt{30},$$

即

$$\sqrt{(x-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{30},$$

$$(x-4)^2=25, \therefore x=9, -1.$$

所以，要找的点是（9，0，0）或（−1，0，0）.

习　题 9-1

1. 指出下列各点的位置的特殊性：

(1)（5，0，0）；(2)（0，−3，0）；(3)（0，0，4）；

(4)（1，2，0）；(5)（1，0，2）；(6)（0，2，1）.

2. 求出与给定点（2，−3，−1）分别对称于下列坐标面

(1) xOy，(2) yOz，(3) zOx

的点的坐标.

3. 求出与给定点（2，−3，−1）分别对称于下列坐标轴

(1) x 轴，(2) y 轴，(3) z 轴

的点的坐标.

4. 求下列各对点之间的距离

(1)（0，0，0），（2，3，4）；(2)（4，−2，3），（−2，1，3）.

5. 试证以$A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6. 在yOz坐标面上，求与三个已知点A（3，1，2），B（4，−2，−2）和C（0，5，1）等距离的点.

§9.2　向量的概念

在现实生活中，我们遇到的量通常有两种不同的类型：一类是“数量”（或称“标量”），另一类是“向量”（或称“矢量”）.

例如，物体加热时，其内部每一点的温度，只需用一个“数值”（比如说80°C）就可以完全表示出来，象这样只用一个“数值”表示的量，称为**数量**.

然而，象力、速度、加速度、位移等，如果要将它们完全确切地表示出来，仅仅说出它们的大小是不够的，还必须说明它们的方向，象这样不仅需要说明大小，而且需要说明方向（包括方位和指向）后才能完全确定的量称为**向量**.

向量通常用一有向线段来表示. 有向线段的长度即向量的大

小（或称向量的**模**），有向线段在空间的位置即向量的**方位**，箭头所指的方向即向量的**指向**．向量常用一黑体字母或用一个上面加箭头的字母如**a**、**v**、**F**或$\vec{a}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$等来表示，也可用两个字母上加箭头来表示，如以$\overrightarrow{M_1M_2}$表示以M_1为起点，M_2为终点的向量．它们的模可分别写做|**a**|、|**v**|、|**F**|或$|\vec{a}|$、$|\vec{v}|$、$|\vec{F}|$及$|\overrightarrow{M_1M_2}|$等．

模等于零的向量称为**零向量**，记作**0**或$\vec{0}$．零向量的方向可以看作是任意的．

两个向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$．如果大小（模）相等且方向也相同，我们就说向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$**相等**，记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$．

根据向量相等的定义，可知每一个向量只由它的模与方向来决定，而与起点的位置无关．因此，我们可以将一个向量任意平行的移动，而把这种与起点位置无关的向量叫做**自由向量**．以下我们只讨论自由向量并简称向量．

与向量**a**的模相等，方位相同，而指向相反的向量叫做**a**的**负向量**，记作$-$**a**．

§9.3　向量的加法、减法

向量是与通常数量不同的一种量，因此关于向量的运算法则必须重新规定，这种规定不是自由制定的，而是从客观实践中如力、加速度等向量的“运算（结合）法则”抽象出来的．在本节中我们首先说明向量的加法与减法．

1．向量的加法　从物理学我们知道，作用于一点而有不同方向的两力的合力（即这两力的“和”）等于由这两力所作的平行四边形的对角线所表示的力；同样，两个不同方向的速度的合速度（即两速度的“和”）也等于由这两个速度向量所作的平行四边形的对角线所表示的速度．由这些具体的向量相“加”的法则，在数学上经过抽象处理便得到两个向量的和的概念与相加的法则如下：

设**a**、**b**是两个方向不同的向量，假定它们的起点在同一点O

(如果起点不在同一点上，可将向量平行移动使它们的起点在同一点O)．作$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为两邻边作一平行四边形$OACB$（图9-5），则对角线$\overrightarrow{OC}$所表示的向量$\mathbf{c}$就是$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$之和，记作

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

即

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量的和的方法叫做**向量加法的平行四边形法则**.

如果两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$有相同的方位，且指向相同时，则它们的和的模等于原来两个向量的模的和，方向与原来两个向量相同；如果$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的指向相反，则它们的和的模等于原来两个向量的模的差，方向与具有较大模的那个向量相同.

在平行四边形法则的基础上，我们还可以推出另一个较简便的法则；从图9-5可以看出：

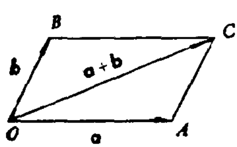

图 9-5

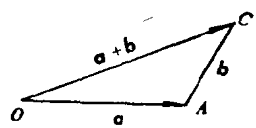

图 9-6

$$\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}.$$

由此，得

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

从这个等式可知两个向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$的和，可以这样作出：作向量$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点$A$为起点作$\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$，连接$OC$，则向量$\overrightarrow{OC}$就是$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的和$\mathbf{a}+\mathbf{b}$，这个求向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的和的方法叫做**向量加法的三角形法则**（见图9-6）.

这一法则可以推广到求多个向量的和的问题上去，例如，求

三个向量a、b、c的和时，可先加b到a，再加c，将最后结果规定为它们的和．为此，从O出发作向量$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，再从$A$点出发作向量$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$，再从$B$出发作向量$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$，于是

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

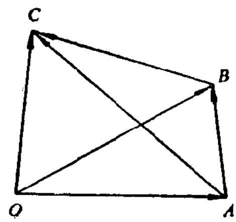

图 9-7

（图 9-7）．这就是说：在求多个向量之和时，可在第一向量的终点作第二向量，在第二向量的终点作第三向量等等．这多个向量就在空间形成一条折线（如图9-7中的$OABC$），这条折线的封闭线（即第一个向量的起点到最后一个向量的终点的连线）所表示的向量（如图9-7中的$\overrightarrow{OC}$）就是这多个向量的和．

向量的和满足下列两个性质：

（1）交换律　　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

证　从图9-5利用三角形法则，得

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

故
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

（2）结合律　　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

证　从图9-7中利用三角形法则，得

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC};$$
$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

故
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

由以上性质可知，求多个向量的和时，可以任意交换向量的次序及任意加上括号，最后所得的结果是相同的．因此，多个向量相加时，也可以省去括号．

2．向量的减法　向量的减法，如同数量的减法一样可以规定它是加法的逆运算．

我们规定：两个向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的差是一个向量，记作$\mathbf{a}-\mathbf{b}$，它与$\mathbf{b}$的和等于$\mathbf{a}$，即

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}=\mathbf{a}.$$

根据上述定义，可得向量$\mathbf{a}-\mathbf{b}$的几何求法如下：

从同一点O，作向量$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，向量$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，由$\overrightarrow{OB}$的终点$B$到$\overrightarrow{OA}$的终点$A$作向量$\overrightarrow{BA}$，即等于$\mathbf{a}-\mathbf{b}$（图9-8）．这种作两向量之差的方法叫做**向量减法的三角形法则**．

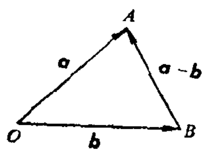

图 9-8

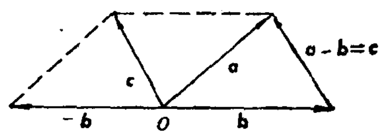

图 9-9

又因为 $$\mathbf{a}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b},$$

$$\therefore\quad \mathbf{a}-\mathbf{b}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$$

即向量$\mathbf{a}$减向量$\mathbf{b}$之差等于向量加向量$-\mathbf{b}$（即$\mathbf{b}$的负向量）的和．于是以$\mathbf{a}$与$-\mathbf{b}$为两邻边作平行四边形，则对角线向量$\mathbf{c}$就是$\mathbf{a}-\mathbf{b}$（图9-9）．这个求向量差的方法叫做**向量减法的平行四边形法则**．

3．向径 以原点O为起点，M点做终点的向量$\overrightarrow{OM}$叫做**点M的向径**．

任何向量可以表示为从它终点的向径减去起点的向径的差，如图9-10所示，

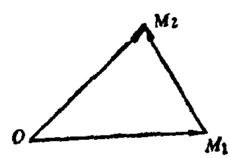

图 9-10

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

用两个向径的差来表示向量的方法叫做**向径表示法**．

§9.4　向量与数量的乘法

我们知道，加速度、力都是向量，质量是数量．根据牛顿第二定律：

$$力=质量\times加速度$$

这表明一个数量可以与向量相乘，其结果还是一个向量．如果用$\mathbf{F}$代表力，$\mathbf{a}$代表加速度，m代表质量，则上面的结果可以写成

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}.$$

一般地，我们规定：任一实数λ与向量$\mathbf{a}$的乘积$\lambda\mathbf{a}$是一个满足下列条件的向量：

（1）$\lambda\mathbf{a}$的模是$\mathbf{a}$的模的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$；

（2）$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$平行（即有相同的方位）；

（3）当$\lambda>0$时，$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$的指向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\mathbf{a}$与$\mathbf{a}$的指向相反（当$\lambda=0$时，$\lambda\mathbf{a}$为零向量）．

这样规定的向量与数量的乘积满足以下的运算规律：

（1）$\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$;

（2）$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$;

（3）$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

其中λ和μ表示数量，$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$表示向量（证略）．

模为1，方向与$\mathbf{a}$相同的向量，叫做$\mathbf{a}$**的单位向量**，记作$\mathbf{a}^\circ$．根据向量与数量乘积的定义，显然有

$$\boxed{\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^\circ},$$

从而

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\mathbf{a}^\circ}$$

这表示一个非零向量除以它的模，其结果是一个与原向量同方向的单位向量．

例　如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量证明它是平行四边形，

证 如图9-11所示，设四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC 和 BD 互相平分于 E 点，于是有向量等式：

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\quad \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}$$

两端各相加，得

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$$

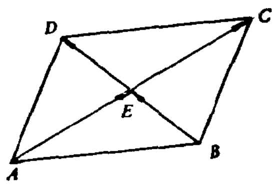

图 9-11

由向量加法的三角形法则知，

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$$

∴
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

这就是 AD 与 BC 相等并且平行，所以 $ABCD$ 是平行四边形.

思 考 题

1. 设 $\mathbf{a}$ 是一个向量，问 $2+\mathbf{a}$，$3-\mathbf{a}$ 有意义吗？为什么？
2. 非零向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 应当具有什么特点才满足下列关系：

（1）$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$；（2）$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$；

（3）$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$；（4）$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$；

（5）$\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

习 题 9-2

1. 在平行四边形 $ABCD$ 内，设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$. 试用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图9-12）.
2. 设 $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$，$\vec{v}=-\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. 试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. 利用向量的几何图形及运算法则，证明：