系 统 分 析 讲 义

余芸生教授主编

(一)

☆

福 州 大 学 土 建 系

一九八一年四月印

系统分析：最优化方法及其应用

目　录

引　言

0～1　系统分析的起源及特点

系统分析（ systems Analysis ）和运筹学（Operations Research ）是两个同义词，其内涵实际上没有什么区别。前者最初来自用数学方法分析不同方程式组成的系统。后者则因在运筹中的决策问题常常牵涉到方程式系统的分析。两者所应用的分析方法是相同的。系统工程则包括工程系统的分析和综合（ Synthesis）两方面的研究，其在分析上所用的方法与运筹学中的方法相同。这些方法的应用已不仅限于工商业的管理及工程规划，设计和调度，其它如军事及政府机构的运筹亦常用之。故其应用较为广泛。本课偏重讨论一些比较实用的系统分析方法及应用。

运筹学最早正式的应用是在第二次世界大战中军事上的运筹，当时英国组织了一批科技人员来研究在防御上所发生的战略与技术问题。其研究的目的在决定最有效地运用有限的军事资源，包括如何运用当时新发明的雷达及新的轰炸机等，其后英美两国协同组织了更多科技人员研究军事上的运筹，而运筹学的应用帮助盟军赢得英国上空的空

战，太平洋上岛屿战役及北大西洋战役等。

二次大战后，美国的工商业渐趋繁荣，企业机构十分庞大，业务复杂，必须用新的管理技术，鉴于运筹学在二次大战中应用的成果，系统分析方法的研究与应用亦有显著发展，同时电子计算机的神速发展，使得一些比较复杂的管理问题亦可应用系统分析方法来解。近年来，不但在美国各主要大学中都有有关运筹学方面的课程，并且这些方法已比较普遍地被用来解决经济上或工程上的实际问题。

系统分析的特点有三：1、应用数学模型，2、从整个系统来探讨（sytems approach） 3、常常需要由不同专业的人材合作研究，完成任务。第一特点将再在下节论讨。因为系统分析是从整个系统来探索以求增加整个系统的效益而非着眼于系统中某单一部份效益的增加，所以必须明确地了解系统的结构，如单元内在的矛盾及因果关系，系统外的边界情况及因为边界情况改变对整个系统效益的影响，进而求得改善整个系统运筹的最优方案，这种方案常常用最优化方法（optimization techniques）求得。因为一个复杂的系统往往包括一些不同学科的业务而非一个专业人才可以掌握，所以系统分析工作常常由不同专业的人才组成研究小组来协同研究。这小组中可能包括系统分析专家（systems analysts），他们专长于数学模拟及求解方法，但他们不一定专长于系统中的所有业务，所以要包括专业人员，不但如此，还要包括负责执行研究结果的人员，否则研究所得的方案无法落实。

0～2　系统分析的步骤

系统分析的主要步骤如下：

1、确定问题

2、组成数学模型。

3、数学模型求解。

4、模型的证实。

5、研究结果的实施。

问题的确定包括下列三方面：①、确定研究的目的或目标，②鉴定系统中所有可行的决策（decision alternatives）③辨认系统的所有约缩条件，研究目的必须正确的反映整个系统的目标，而非系统中某一部分的目的。否则，所得结果若专对某一部分有益则可能对整个系统有损。同样地，若未能包括所有可能决策和约束条件，则定会得到不正确的答案。

问题确定后，进而处理数学模型的组成。系统的目标的量计及约束条件，必须以数学形式用决策变量 来表示。若所组成的模型属于一般性的数学模型（如线性规划，动态规划等），则可用数学方法求解解。一些十分复杂的问题，常常需要混合应用数学模型，模拟（simulation） 及启发式模型 （heuristic model）来研究。

属于一般性的数学模型，则可用合适的最优化方法求解。若用模拟或启发式的模型则不能求得最优方案，而仅能得到在不同方案下对系统性能的近似估量。

求得最优方案之后，还得研究模型中所含参变数值的变化范围及其对最优解的影响。此种分析常称为灵敏度分析（sensitivity analysis）

模型的证实，可按所用模型的性能（performance）是否与实际系统的性能向同来检定，通常可比较在同一情况下，模型的性能与实际系统过去记录的性能来决定，但若该系统尚不存在，则

此法不能施用，而可用模拟法得到系统的性能与数学模型结果相比较。

模型的结果在付诸施之前，必须把结果变换为可以实行的说明，做这种工作时，系统分析人员必须与实际负责操作人员取得密切合作以求最佳效果。

0～3　系统分析方法

系统分析的方法可以分数学规划（Mathematical programming）及概率性模型（probabilistic Models）两大类，数学规划在系统分析中占显要的地位，其中包括线性规划，网状系统分析，动态规划，博奕论（Game Theory）整数规划（Integer programming）及非线性规划等概率性模型，则考虑事态发生的不可靠性（uncertainly）其中包括排队论（Queueing theory）盘存论（Inventory theory）马可夫决策过程（Markovian Decision processes）系统可靠性分析（system Reliability Analysis）决策分析（Decision Analysis）及模拟（simulation）等，本课仅讨论其中一些比较实用的方法及应用。

第一章　线性规划

线性规划包括一类数学规划模型（mathematical programming models）用来处理如何把有限的资源最有效地分配到不同的的机构或不同的作用（activities）中去，其目的为达到该系统的最大受益或最低生产成本等。

线性规划的特性是目标函数及约束条件的数学形式均为线性的，且可用标准方法求解。本章将讨论线性规划问题的组成，求解方法，对偶问题，对偶性理论及灵敏度分析。

1～1　线性规划问题的组成

下述一些简单的例题，可用来讨论，一般线性规划问题的组成。

例1、某火力发电厂用甲乙两种煤为燃料。甲种煤较坚硬，含硫量较

低，但价格较昂。乙种煤质较软，煤烟大，含硫量较多，但价格较为低廉，煤由火车运到厂内，再由运输带送至磨粉机房，然后按一定供应率直接送进燃烧室。

磨粉机每小时可磨甲种煤１６吨，乙种煤２４吨。运输带每小时可运煤２０吨，甲乙两种煤能产生蒸气量及所发射污染物量如表１～１所例。

表１～１　煤所生蒸气量及发射污染物量

煤种	蒸气量（磅／吨）	烟道内气体含SO_2	微粒发射量公斤／吨
甲	24000	1800PPm	0·5
乙	20000	3800PPm	1·0

根据最近颁布的空气污染法令，其标准如下：

1·烟筒排出之总微粒每小时不能超过１２公斤。

2·在任何时间，最大二氧化硫的发射量不能超过3000PPm。

为了决定满足尖峰用电的安全系数，电厂管理人员需要知道在上述情况下，电厂最大可能发电量。

上例的数学形式可组成如下：若每小时所用甲乙两种煤各为x_1及x_2吨，则每小时所产生蒸气的总值为$24000x_1+20000x_2$磅。

为简便计，上式以千为单位，并用Z表示目标函数值，则

$$Z=24x_1+20x_2$$

式中x_1及x_2为决策变量，必须满足下列的约束条件。

1、运送量的约束条件，

$$x_1+x_2\leq 20$$

2、磨粉机的约束条件，

$$\frac{1}{16}x_1+\frac{1}{24}\times x_2<1$$

上式表示，只有x_1及x_2，的混合能满足上列条件者为可接纳的解亦即所需 磨粉时间不超过一小时x_1及x_2的组合为可接受的答案

3、空气污染微粒发射量约束条件

$$0.5x_1+x_2\leqslant 12$$

4、空气污染SO_2发射量限制

$$1800\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)+3800\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)\leqslant 3000$$

或 $$3x_1-2x_2\geqslant 0$$

上式为权衡平均值。

5、x_1及x_2不可能为负值，故

$$x_1\geqslant 0 \qquad x_2\geqslant 0$$

总结上列各式而得例1的数学模型如下：

目标函数（objective function）

决定x_1及x_2的值使Z为最大。

$$\text{Maximize } Z=24x_1+20x_2 \qquad (1)$$

约束条件：

$$0.5x_1+x_2\leqslant 12 \qquad (2)$$

$$x_1+x_2\leqslant 20 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{16}x_1+\frac{1}{24}x_2\leqslant 1$$

$$3x_1-2x_2\geqslant 0$$

非负值条件：

$$x_1\geqslant 0,\ (6)\ 及\ x_2\geqslant 0 \qquad (7)$$

式1至7均为线性形式，x_1及x_2不取为负值而可为任何实数。

上列因仅含两个未知变量x_1及x_2故可用简单的图解法求解。图1·1中显示各约束条件均为直线，因为x_1及x_2必须满足所有约束条件，所以其可行的答案必须在四边形OABC边上或其中。图1·1显示运输量的限制是没有束缚性的，四边形OABC所包括的范围称之谓可行范围（easible region），在可行

图1·1　可行范围

范围内的任何一点均能满足所有的约束条件，故必须从无限的可行解中，求得x_1和x_2的值能使目标函数值（式1）为最大。x_1和x_2的值可用图解法求得如下。

式1中若取不同的Z值，则其在x_1-x_2，座标中为同坡度的直线。图1·2显示Z等于240，408及480所代表的直线。Z＝408与四边形OABC交于点B，当Z大于408时（如Z＝

480），则线上各点均不在可行范围内，若Z小于408（如Z=240），则不合于目标函数的要求。故Z=408为目标函数的可行最大值，其相当的x_1和x_2值各为12和6，所以图解法所得之解为

$$Z=408, x_2=12, x_2=6$$

图1·2　图解法

例2、某公社有三个生产大队，在一起计划明年的农业生产。每

大队的农产品受可耕地面积及灌溉用水的限制，如表1・2所列

表1・2　各生产大队可耕地及灌溉用水

生产大队	可耕地面积（英亩）	配给灌溉用水（英尺一英亩）
甲	400	600
乙	600	800
丙	300	375

在所有的可耕地上只适宜三种不同作物。此三种作物的主要区别是亩净收入及消耗水量。上级机构并限制每种作物的最大耕作面积如表1・3所示。

表1・3　作物数据

作物种类	最大亩数	一季每亩所需水量（英亩一英尺）	净收入（元／英亩）
A	600	3	400
B	500	2	300
C	325	1	100

假设三个生产大队均同意下年各大队的耕作面积与可耕面积的比例相同，但各大队可自行决定种植不同的作物，该公社应如何规划各大队耕种不同作物的面积而能使整个公社的总净收入为最大。

上列的决策变量可用下表1・4表示

表1・4　决策变量

大队 作物	分配面积 甲	乙	（英亩） 丙
A	x_{11}	x_{12}	x_{13}
B	x_{21}	x_{22}	x_{23}
C	x_{31}	x_{32}	x_{33}

表中x_{12}表示在乙生产大队所分配种植A种作物的亩数，其余变量可按此类推。

因分配的有效与否可用其总净收入表量估，所以目标函数可用下式表之。

$$\begin{aligned}\text{Maxinmize } Z = & 400(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \\ & +300(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \\ & +100(x_{21}+x_{32}+x_{33})\end{aligned}$$

决策变量受下列约束条件的限制：

可耕地面积，

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 400$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{22}\leqslant 600$$

x

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 300$$

本资源：

$$3x_{11}+2x_{21}+x_{31}\leqslant 600$$

$$3x_{12}+2x_{22}+x_{32}\leqslant 800$$

$$3x_{13}+2x_{23}+x_{33}\leqslant 375$$

作物最大亩数，

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 600$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 500$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{23}\leqslant 325$$

社队公益协议

$$\frac{x_{11}+x_{22}+x_{31}}{400}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{600}$$

$$\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{600}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{300}$$

$$\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{300}=\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{400}$$

上列三式可写为

$$3(x_{11}+x_{21}+x_{31})-2(x_{12}+x_{22}+x_{32})=0$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}-2(x_{13}+x_{23}+x_{33})=0$$

及 $$4(x_{13}+x_{23}+x_{23})-3(x_{11}+x_{21}+x_{31})=0$$

例2中包括九个决策变量，显然的不能用图解　　法求解。同时，例2中亦包括等式为约束条件，而例1中则包括≥及≤的不等式约束条件。

线性规划的普遍形式

一般的线性规划问题可能是极大化或极小化形式，其约束条件可能是（≤），□或（≥）形式，且决策变量可能是非负数或可正可负，一个变量若其符号没有限制，可以两个非负数的差代替。所以线性规划的普遍形式可写成如下。

Maximize 或 Minimize

$$Z=C_1x_1+C_2+x_2\cdots+C_nx_n$$

受下列约束条件的限制

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n$$

$$(\leq,=,\text{或}\geq)\ b_1,$$

$$a_{21}x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n$$

$$(\leq,=,\text{或}\geq)\ b_2,$$

·

·

·

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}$$

$$(\leqslant, =, \text{或} \geqslant)\ b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$$

因为线性规划模型常常有不同的数学形式如目标函数的极大化或极小化和（$\leqslant$，$=$，或$\geqslant$）的不同约束条件。所以需要改变这些形式来适合一定的求解程序，这个求解程序将在下一节讨论。改变的形式有两种其一为范式（Canonical form），另一为标准式（standard form）标准式可用来直接求得模型的解。范式适用于讨论对偶性理论。

线性规划问题的范式

任一线性规划问题均可用下列范式表示。

$$\text{Maximize} \quad Z = \sum_{z=1}^{n} C_z x_z$$

受下列条件的约束。

$$\sum_{z=1}^{n} a_{iz} x_z \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_z \geqslant 0, \quad z = 1, 2, \cdots, n$$

范式的特性是：

1、所有决策变量（x_z）为非负数。

2、所有的约束条件为（$\leqslant$）形。

3、目标函数为极大化形式。

一个线性规划问题，可用下列五种变换方法使其改变为范式。

1、一函数的极小化，在数学上相当于其负函数的极大化，

原书缺页

原书缺页