第二部分　数学公式、定理*

一、初 等 代 数

(一)代数式

1. 整式的乘法和因式分解公式

i. 二次式、三次式和 n 次式

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$ $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$	$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-b^{n-1})$ $=a^n-b^n$ （当 n 是偶数时） $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ $=a^n+b^n$ （当 n 是奇数时）	$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$ $=a^n-b^n$

ii. 二项式和多项式的展开式

n	$(a+b)^n$	$(a+b+c)^n$	$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n$
2	$a^2+2ab+b^2$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	$\sum_{i=1}^{k} a_i^2+2\sum_{i\neq j} a_ia_j$
3	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2$ $+3b^2c+3bc^2+3c^2a$ $+3ca^2+6abc$	$\sum_{i=1}^{k} a_i^3+3\sum_{i\neq j} a_i^2a_j$ $+6\sum_{i<j<k} a_ia_ja_k$
n	$a^n+C_n^1a^{n-1}b$ $+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$ $+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n$	$\sum_{\substack{p+q+r=n\\p,q,r\geq 0}} \frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$	$\sum_{\substack{p+q+\cdots+s=n\\p,q,\cdots,s\geq 0}} \frac{n!}{p!q!\cdots s!}$ $\times a_1^pa_2^q\cdots a_k^s$

* 参加这一部分编写的，计有：茅成栋(初等代数)、钱翠蔚(平面几何)、徐为之(立体几何)、曹毓南(平面三角)、顾宁先(平面解析几何)、吴洁波(初等微积分)，审校人：朱学炎。

2. 分式

i. 运算法则

加	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$
减	$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$
乘	$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
除	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
乘　　方	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$　(这里 n 为正整数)

ii. 常用分式分项分解公式

	公　　式	待 定 系 数
一般	在分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 中，$Q(x)$ 为实系数 n 次多项式，除了次序和常数因子外，必可唯一地分解为实系数一次或二次质因式 Q_i 的连乘积: $$Q(x)=Q_1^\alpha\cdot Q_2^\beta\cdot\cdots\cdot Q_s^\mu;$$ $P(x)$ 为实系数 m 次多项式．若 $m<n$，则分项分解公式为 $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{Q_1^\alpha\cdot Q_2^\beta\cdot\cdots\cdot Q_s^\mu}=\frac{p_{11}}{Q_1}+\frac{p_{12}}{Q_1^2}+\cdots+\frac{p_{1\alpha}}{Q_1^\alpha}+\frac{p_{21}}{Q_2}+\frac{p_{22}}{Q_2^2}+\cdots+\frac{p_{2\beta}}{Q_2^\beta}+\cdots+\frac{p_{s1}}{Q_s}+\frac{p_{s2}}{Q_s^2}+\cdots+\frac{p_{s\mu}}{Q_s^\mu};$$ 若 $m\geqslant n$，可运用除法，得 $\frac{P(x)}{Q(x)}=G(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$，其中 $R(x)$ 为次数低于 n 次的多项式，这样仍可按前述方法进行分项分解	p_{ij} 为次数比 Q_i 低的多项式(即 p_{ij} 或为常数，或为一次式)，可用待定系数法求得

（续）

	公　式	待定系数
特殊	$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{p_1}{x-x_1}+\frac{p_2}{x-x_2}$ （x_1、x_2、a、b 都是常数，$x_1\neq x_2$）	$p_1=\frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$, $p_2=\frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$
	$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$ $=\frac{p_1}{x-x_1}+\frac{p_2}{x-x_2}+\frac{p_3}{x-x_3}$ （a、b、c 是常数，x_1、x_2、x_3 是互不相等的常数）	$p_1=\frac{ax_1^2+bx_1+c}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $p_2=\frac{ax_2^2+bx_2+c}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $p_3=\frac{ax_3^2+bx_3+c}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$
	$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}$ $=\frac{p_1}{x-x_1}+\frac{p_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{p_n}{x-x_n}$ （$P(x)$ 是次数低于 n 次的多项式，x_1、x_2、$\cdots$、x_n 是互不相等的常数）	$p_i=\frac{p(x_i)}{\prod\limits_{k\neq i}(x_i-x_k)}$
	$\frac{bx+c}{(x-a)^2}=\frac{b}{x-a}+\frac{ab+c}{(x-a)^2}$ （a、b、c 都是常数）	
	$\frac{bx^2+cx+d}{(x-a)^3}=\frac{b}{x-a}+\frac{2ab+c}{(x-a)^2}$ $+\frac{a^2b+ac+d}{(x-a)^3}$ （a、b、c、d 都是常数）	
	$\frac{P(x)}{(x-a)^n}=\frac{p_1}{x-a}+\frac{p_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{p_n}{(x-a)^n}$ （$P(x)$ 是次数低于 n 次的多项式）	$p_i=\frac{p^{(n-i)}(a)}{(n-i)!}$, $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ $P^{(n-i)}(a)$ 表示 $P(x)$ 在点 a 的 $n-i$ 阶导数

3．比例的基本性质和主要变形

对于比例 $a:b=c:d$ $\left(\text{或写成 } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$，其中 a、b、c、d 均不为零

基本性质		$ad=bc$
主要变形	更比定理	$a:c=b:d,\quad d:b=c:a$
	反比定理	$b:a=d:c$
	合比定理	$(a+b):b=(c+d):d$ 或 $a:(a+b)=c:(c+d)$
	分比定理	$(a-b):b=(c-d):d$ 或 $a:(a-b)=c:(c-d)$
	合分比定理	$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$
	等比定理	如果 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，那么 $\frac{la_1+ma_2+\cdots+ta_n}{lb_1+mb_2+\cdots+tb_n}=\frac{a}{b}$, $\frac{\sqrt[p]{la_1^p+ma_2^p+\cdots+ta_n^p}}{\sqrt[p]{lb_1^p+mb_2^p+\cdots+tb_n^p}}=\frac{a}{b}$

4．根式

i．根式的基本性质

基本性质	i．当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义，且 n 是大于 1 的整数时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$
	ii．对于根式 $\sqrt[n]{a^n}$，有： 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$，(a 为任何实数) 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时;} \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时} \end{cases}$
	iii．$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$　($a>0$，m、n、p 都是正整数，且 $n>1$)
运算律	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　($a\geqslant0$，$b\geqslant0$，且 $n>1$)
	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$　($a\geqslant0$，$b>0$，且 $n>1$)
	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　($a\geqslant0$，且 $n>1$)
	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　($a\geqslant0$，且 $m>1$，$n>1$)

ii. 常用有理化因式

P(Q 的有理化因式)	Q (P 的有理化因式)
$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$
$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$

(二)代数方程(组)

1. 同解定理

关于代数方程	i. 方程 $f(x)=g(x)$ 和方程 $f(x)+\phi(x)=g(x)+\phi(x)$ 同解，其中 $\phi(x)$ 或为整式，或为常数.
	ii. 方程 $f(x)=g(x)$ 和方程 $h(x)f(x)=h(x)g(x)$ 同解，其中 $h(x)$ 对未知数的一切允许值都有意义且不等于零，特别地，$h(x)$ 可取非零常数.
	iii. 方程 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)=0$ 与方程 $f_1(x)=0,\quad f_2(x)=0,\ \cdots,\quad f_n(x)=0$ 在 $f(x)$ 的允许值范围内同解.
关于代数方程组	i. 方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ y=F(x)\end{cases}$ 和方程组 $\begin{cases}f(x,F(x))=0,\\ y=F(x)\end{cases}$ 同解. (这是应用代入消元法解方程组的依据)
	ii. 方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ F(x,y)=0\end{cases}$ 和方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ kf(x,y)+lF(x,y)=0\end{cases}$ 同解，其中 k、l 是任意常数，但 $l\neq0$. (这是应用加减消元法解方程组的依据)
	iii. 方程组 $\begin{cases}f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=0,\\ F(x,y)=0\end{cases}$ 和方程组 $\begin{cases}f_1(x,y)=0,\\ F(x,y)=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}f_2(x,y)=0,\\ F(x,y)=0\end{cases}$ 同解. (这是应用因式分解法解方程组的依据)

2. 求解公式

方程(组)	方 程 (组) 的 解
一元一次方程 $ax=b$, (其中 $a\neq 0$)	$x=\dfrac{b}{a}$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (其中 $a\neq 0$)	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
二项方程 $x^n=a$	如果 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,那么 $x=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$.
二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ (其中系数不全为零)	设 $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$, i. 当 $D\neq 0$ 时,有唯一组解: $\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\y=\dfrac{D_y}{D};\end{cases}$ ii. 当 $D=0$,而 D_x、D_y 中至少有一个不等于零时,无解; iii. 当 $D=D_x=D_y=0$ 时,有无穷多解.
三元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ (其中系数不全为零)	设 $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\d_2 & b_2 & c_2\\d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\a_2 & d_2 & c_2\\a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$, $D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\a_2 & b_2 & d_2\\a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$. i. 当 $D\neq 0$ 时,有唯一组解: $\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D},\\y=\dfrac{D_y}{D},\\z=\dfrac{D_z}{D};\end{cases}$ ii. 当 $D=0$,而 D_x、D_y、D_z 中至少有一个不等于零时,无解; iii. 当 $D=D_x=D_y=D_z=0$ 时,有无穷多解或无解.

3. 关于方程的讨论

方　　程	解　的　讨　论
$ax=b$	当 $a\neq0$ 时，有唯一解 $x=\frac{b}{a}$； 当 $a=0$、$b\neq0$ 时，无解； 当 $a=0$、$b=0$ 时，有无穷多解
$ax^2+bx+c=0$ (其中 a、b、c 都是实数，且 $a\neq0$)	当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，有两个相异的实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$； 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，有两个相等的实数根 $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$； 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，无实数根 (在复数集内，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程有两个共轭虚数根： $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}$)

4. 方程的根与系数的关系

方　　程	根　与　系　数　的　关　系
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (其中 $a\neq0$)	如果方程的根为 x_1 和 x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，　$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$
一元 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ (其中 $a_0\neq0$)	如果方程的根为 x_1、x_2、x_3、…、x_n，那么 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=-\frac{a_1}{a_0}$， $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\cdots+x_{n-1}\cdot x_n=\frac{a_2}{a_0}$， …………………………………… $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{n-1}\cdot x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$

(三)不等式

1. 不等式的基本性质

i. 对于任意两个实数 a、b，下述三式中，有且仅有一式成立：

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b.$$

ii. 如果 $a>b$，那么 $b<a$.

iii. 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

iv. 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

v．如果 $a>b$, $c>0$, 那么 $ac>bc$;

如果 $a>b$, $c<0$, 那么 $ac<bc$.

vi．如果$a>b>0$,那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

vii．如果 $a>b>0$, $c>d>0$, 那么 $ac>bd$.

viii．如果 $a>b>0$, $d>c>0$,那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

ix．如果 $a>b>0$, $\alpha>0$, 那么 $a^{\alpha}>b^{\alpha}$.

特例:如果 $a>b>0$, 那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n>1)$。

x．如果 $a>b>0$, $\alpha<0$, 那么 $a^{\alpha}<b^{\alpha}$.

2．含有绝对值的不等式的性质

i．$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

ii．$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

iii．$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

3．常用基本不等式

平均值定理	如果 a_1、a_2、…、a_n 都是非负实数，n 为大于1的自然数，那么 $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$ 即 $$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$ (当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，取“=”号) 特例: $\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$, $\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$
柯西不等式	$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$ 即 $$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$ (当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时取“=”号)
贝努利不等式	当 $0<\alpha<1$ 时，有 $$(1+x)^{\alpha}\leqslant1+\alpha x;\qquad(x\geqslant-1)$$ 当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，有 $$(1+x)^{\alpha}\geqslant1+\alpha x\qquad(x\geqslant-1)$$ (以上两式，当且仅当 $x=0$ 时取“=”号)

4. 一些代数不等式(组)的解

<table>
<tr><th colspan="2">不等式(组)</th><th>不 等 式 (组) 的 解</th></tr>
<tr><td colspan="2">$ax>b$
(其中 a、b 都是实数)</td><td>当 $a>0$ 时，$x>\frac{b}{a}$；
当 $a<0$ 时，$x<\frac{b}{a}$；
当 $a=0$，且 $b\geqslant0$ 时，无解；
当 $a=0$，且 $b<0$ 时，x 为全体实数</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases}a_1x>b_1\\a_2x>b_2\end{cases}$
(其中 a_1、b_1、a_2、b_2 都是实数，且 $a_1\neq0$，$a_2\neq0$)</td><td>i. 当 $a_1>0$、$a_2>0$ 时，
$$x>\max\left(\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2}\right)$$
ii. 当 $a_1>0$、$a_2<0$ 时，
若 $\frac{b_1}{a_1}>\frac{b_2}{a_2}$，则无解；
若 $\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}$，则 $\frac{b_1}{a_1}<x<\frac{b_2}{a_2}$
iii. 当 $a_1<0$、$a_2<0$ 时，
$$x<\min\left(\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2}\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$ax^2+bx+c>0$
(其中 a、b、c 都是实数，且 $a\neq0$)</td><td>i. 当 $\Delta>0$、$a>0$ 时，$x<x_1$ 或 $x>x_2$；
当 $\Delta>0$、$a<0$ 时，$x_1<x<x_2$.
ii. 当 $\Delta=0$、$a>0$ 时，x 为 $x\neq-\frac{b}{2a}$ 的一切实数；
当 $\Delta=0$、$a<0$ 时，无解.
iii. 当 $\Delta<0$、$a>0$ 时，x 为全体实数；
当 $\Delta<0$、$a<0$ 时，无解。
(注：1. $\Delta=b^2-4ac$
2. x_1、x_2 是二次三项式 ax^2+bx+c 的两个实数根，且 $x_1<x_2$)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">基本的绝对值不等式</td><td>$|x|<a$，$(a>0)$</td><td>$-a<x<a$</td></tr>
<tr><td>$|x|>a$，$(a>0)$</td><td>$x<-a$ 或 $x>a$</td></tr>
<tr><td>$|x-a|<b$,$(b>0)$</td><td>$a-b<x<a+b$</td></tr>
<tr><td>$|x-a|>b$,$(b>0)$</td><td>$x<a-b$ 或 $x>a+b$</td></tr>
</table>

* 表中的一元一次不等式和一元二次不等式均只考虑“>0”的情形，如属“<0”的情形，不等式两边乘以“-1”，即可转化为“>0”的情形解得。

(四)指数和对数

1. 幂的运算法则

正整数指数幂	有理数指数幂 $(a、b>0)$	实数指数幂 $(a、b>0)$
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n}, & 当\ m>n\ 时;\\ 1, & 当\ m=n\ 时;\\ \frac{1}{a^{n-m}}, & 当\ m<n\ 时,\end{cases}$ 其中 $a\neq 0$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$
$(ab)^n=a^nb^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, 其中 $b\neq 0$	$(ab)^n=a^nb^n$	$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$
$(a^m)^n=a^{mn}$	$(a^m)^n=a^{mn}$	$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$

2. 对数

基本性质	i. $\log_a a=1$, $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ ii. $\log_a 1=0$, $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ iii. $a^{\log_a N}=N$, $(a>0$ 且 $a\neq 1$, $N>0)$	
运算法则	积的对数	$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$ $(a>0$ 且 $a\neq 1$, $N_1>0$, $N_2>0$, 下同)
	商的对数	$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$
	幂的对数	$\log_a N^m=m\log_a N$
	方根的对数	$\log_a\sqrt[m]{N}=\frac{1}{m}\log_a N$, ($m$ 为大于 1 的整数)
	换底公式	$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$

3. 常用对数的性质

i. 10 的整数次幂的常用对数是一个整数，它等于幂指数;

ii. 1～10 之间的数的常用对数都是正的纯小数;

iii. 任何一个正数，如果不是 10 的整数次幂，那么它的常用对数是有限或无限小数. 一般地说，任何一个正数的常用对数都可以用一个整数(正整数，零，负整数)和一个正的纯小数(或者零)的和来表示. 整数部分叫做这个

对数的首数，正的纯小数(或者零)叫做对数的尾数；

iv. 真数大于 1 或者等于 1 时，它的常用对数首数是一个非负的整数，它等于真数的整数部分的位数减去 1；

v. 真数小于 1 时，它的常用对数首数是一个负整数，它的绝对值等于真数左边的第一个非零数字前面零的个数(包括小数点前面的一个零)。

(五) 数列

1. 等差数列和等比数列

	等差数列 (首项为 a_1，公差为 d)	等比数列 (首项为 a_1，公比为 q)
通项	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
前 n 项和	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

* 上列两组公式中，分别均涉及五个量：a_1、a_n、n、d(或 q)、S，其中如已知任三个量，即可求出余两个量。

2. 线性递归数列

<table>
<tr><th></th><th>二阶线性递归数列</th><th>三阶线性递归数列</th></tr>
<tr><td>初始值</td><td>x_1，x_2</td><td>x_1，x_2，x_3</td></tr>
<tr><td>递推公式</td><td>$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}$</td><td>$x_n=ax_{n-1}+bx_{n-2}+cx_{n-3}$</td></tr>
<tr><td>特征方程</td><td>$x^2-ax-b=0$</td><td>$x^3-ax^2-bx-c=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">通项公式(其中待定系数 A、B、C 可由初始值代入而确定)</td><td>当特征方程无重根时，设其二个不同复(实)根为 α、β，则
$x_n=f(n)=A\alpha^n+B\beta^n$</td><td>当特征方程无重根时，设其三个不同复(实)根为 α、β、γ，则
$x_n=f(n)=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n$</td></tr>
<tr><td>当特征方程有重根时，设其重根为 α，则
$x_n=f(n)=(A+B\cdot n)\alpha^n$</td><td>当特征方程有重根时，
i. 设有二重根 α，另一根为 β，则
$x_n=f(n)=(A+B\cdot n)\cdot\alpha^n+C\cdot\beta^n$
ii. 设有三重根 α，则
$x_n=f(n)=(A+B\cdot n+C\cdot n^2)\cdot\alpha^n$</td></tr>
</table>

* 一般地，k 阶线性递归数列的通项的求法是相仿的。

3. 一些高阶等差数列的求和公式

① 自然数的方幂和

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9=\frac{1}{20}n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5).$$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1)=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-1)!}$，或写成

$$C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{m+n-1}^m=C_{m+n}^{m+1}.$$

特别地，

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

(六)排列、组合和二项式定理

1. 加法原理和乘法原理

加法原理	做一件事，完成它可以有 n 类方法；在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法．那么，完成这件事共有 $$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$ 种不同的方法
乘法原理	做一件事，完成它需要分成 n 个步骤；做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法．那么，完成这件事共有 $$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$$ 种不同的方法

2. 排列数和组合数的计算公式

<table>
<tr><th colspan="2">名　　称</th><th>计 算 公 式</th></tr>
<tr><td colspan="2">选排列(从 n 个不同元素中取 m 个元素 $(m<n)$ 的排列)之排列数</td><td>$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$
或　$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">全排列(从 n 个不同元素中取 n 个元素的排列)之排列数</td><td>$P_n^n=n!$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">重复排列</td><td>从 n 个不同元素中取 r 个元素的重复排列之排列数</td><td>n^r　(其中 $r>1$, $r\leqq n$)</td></tr>
<tr><td>在 n 个元素中，如果有 p 个各自相同，q 个也各自相同，其余类推，把所有的 n 个元素排成一行的重复排列之排列数</td><td>$\dfrac{n!}{p!q!\cdots}$　(其中 $p+q+\cdots=n$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">环状排列(把 n 个不同元素作环状排列)之排列数</td><td>考虑环形的方向</td><td>$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$</td></tr>
<tr><td>不计环形的方向</td><td>$\dfrac{(n-1)!}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">组合(从 n 个不同元素中取 m 个元素 $(m\leqslant n)$ 的组合)之组合数</td><td>$C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}$
$=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}$
或　$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">重复组合(从 n 个不同元素中取 r 个元素的重复组合)之组合数</td><td>$H_n^r=C_{n+r-1}^r$
(其中 $r\geqslant 1$, $r\leqq n$)</td></tr>
</table>

3. 组合数的主要性质

i. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

ii. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$,

iii. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

4. 二项式定理

二项展开式	$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$ (其中 n 是正整数)
二项展开式的通项	$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$
二项展开式的性质	i. 在二项式 $(a+b)^n$ 的展开式中，与首末两端"等距离"的两项系数相等，即 $C_n^0 = C_n^n$, $C_n^1 = C_n^{n-1}$, $C_n^2 = C_n^{n-2}$, …, $C_n^k = C_n^{n-k}$, … ii. 如果二项式 $(a+b)^n$ 的幂指数 n 是偶数，中间一项的系数最大；如果幂指数 n 是奇数，中间两项系数相同并且最大

(十)复数

1. 复数的运算

代数形式	加(减)	$(a \pm bi) \pm (c \pm di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
	乘	$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$
	除	$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (其中 $c+di \neq 0$)
三角形式	加(减)	$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \pm r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $= (r_1\cos\theta_1 \pm r_2\cos\theta_2) + (r_1\sin\theta_1 \pm r_2\sin\theta_2)i$
	乘	$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
	除	$\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
	乘方	$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$; (其中 n 是正整数)
	开方	$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的 n 次方根是 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, 其中 $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$
指数形式	乘	$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
	除	$\dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, 其中 $r_2 \neq 0$
	乘方	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

2 复数的模、共轭

	计算	性质
模	如果 $z=a+bi$，其中 a、b 为实数，则 $$\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$$	$\|\|z_1\|-\|z_2\|\|\leqslant\|z_1\pm z_2\|\leqslant\|z_1\|+\|z_2\|$， $\|z_1\cdot z_2\|=\|z_1\|\cdot\|z_2\|$， $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\|=\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$
共轭	如果 $z=a+bi$，其中 a、b 为实数，则 $$\bar{z}=a-bi$$	$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$， $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$， $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{\bar{z}_1\cdot z_2}{\|z_2\|^2}$； $\bar{\bar{z}}=z$， $z+\bar{z}=2a$，　$z-\bar{z}=2bi$，　$z\cdot\bar{z}=\|z\|^2$

二、平面几何

(一)直线图形

1. 点、直线的位置关系

① 共线点

性质	判定	主要的共线点问题
1. 共线的三个点里，必有一点且仅有一点，位于其余两点之间。 2. 如果角的两边合成(包括顶点在内)一条直线时，这个角是平角。 3. **梅内劳斯定理**：如果一直线与三角形 ABC 的边 BC、CA、AB (或其延长线)分别相交于点 L、M、N，则 $$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$	1. 若 B 点位于 A、C 两点之间，且 $AB+BC=AC$，则 A、B、C 是一直线上的三个不同的点。 2. 若有 A、B、C 三点，过 B 作一条直线 PBQ，并联 BA、BC。 i) A、C 两点在 P、Q 两侧时，$\angle QBA=\angle PBC$，或 $\angle PBA+\angle PBC=180°$，则 A、B、C 三点共线。 ii) A、C 两点在 P、Q 同侧时，且 $$\angle PBA=\angle PBC,$$ 则 A、B、C 三点共线。 3. 梅内劳斯定理的逆定理：假如有三点 L、M、N 在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上，或在其延长线上，且 $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$，则 N、M、L 三点在一直线上。	1. 梯形两腰中点和对角线中点，四点共线。 2. 梯形两腰延长线交点，对角线交点，及上、下两底中点，此四点共线。 3. **德沙格定理**：两三角形的对应顶点连线会于一点，则对应边(所在直线)的交点共线。 4. **西摩松线**：三角形外接圆上任意一点在三边所在直线上的射影共线。 5. **欧拉线**：三角形中，外接圆心 O、重心 G、九点圆心 O_1 和垂心 H 位于同一直线上。 6. 两圆相切，切点与两圆的圆心在一直线上。 7. 若两圆外离时，内外公切线的交点与两圆圆心四点共线。

② 共点线

性　　质	判　　定	主要的共线点问题
塞瓦定理: 假如三角形各顶点与其对边(或对边延长线)上的三点 D、E、F 连线而成的直线 AD、BE、CF 通过同一点 D, 则 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$	塞瓦定理的逆定理: 如果三点 D、E、F 在三角形 ABC 的边 BC、CA、AB(或其延长线)上,且 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$ 则 AD、BE、CF 必或通过一点,或互相平行.	1. 三角形三边上中线交于一点. 2. 三角形三内角平分线交于一点. 3. 三角形三高交于一点。 4. 三角形两外角平分线与不相邻内角平分线交于一点. 5. 三角形各边中点上的垂线交于一点. 6. 连接任意四边形两双对边中点而成的二线段以及连接两对角线中点而成的线段交于一点, 而且都为这一点平分.

③ 相交直线

	性　　质	判　　定
相交直线	1. 两条直线相交时,只有一个交点. 2. 两条相交直线所成的对顶角相等.	两直线与第三条直线相交, 若其中一侧的两个内角之和小于两直角, 则该两直线必在这一侧相交.
相交之特殊情形——垂直	1. 互相垂直的两条直线所成的四个角都是直角. 2. 如果两个角的两边分别互相垂直, 则此两个角相等或相补.	两条直线相交所成的四个角都相等, 则此两直线互相垂直.

④ 平行线

性质	判定
1. 过不在已知直线上的一点，可引一条，且只可引一条直线，使与已知直线平行.	1. 垂直于同一条直线的两直线平行.
2. 如果两条平行直线被第三条直线所截，则： (1) 同位角相等； (2) 内错角或外错角相等； (3) 同侧内角或同侧外角互补.	2. 平行于同一直线的两直线必互相平行.
3. 如某直线与两平行线之一相交，则与另一平行线也必相交；如垂直于平行线之一，则也必垂直另一条.	3. 二直线被第三条直线所截，如果下列三条有一条成立： (1) 同位角相等； (2) 内错角或外错角相等； (3) 同侧内角或同侧外角互补， 则二线平行.
4. 两角的边各相平行，则此两角相等或互补.	4. 设直线 a、b、c 各截 l 及 l' 于 A、B、C 及 A'、B'、C'，若 $a \parallel b$，且 $\frac{CA}{CB}=\frac{C'A'}{C'B'}$，则 $c \parallel a \parallel b$.
5. 平行线间距离处处相等，且平行线间的平行线段彼此相等.	5. 三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半. 梯形的中位线平行于底边，且等于两底的半和.
6. 一组平行线截两直线所得对应线段成比例(一组平行线如等分一线段，也必等分另一线段).	6. 如果一条直线截三角形两边，一边上所截得的两线段与另一边上的对应线段成比例，那么这条直线平行于第三边.
7. 平行于三角形一边的直线)，截其他两边，所得线段对应成比例.	7. 若一直线上的任意两点到另一直线的距离相等，则这两直线平行.
8. 如果两条平行线被一线束(即过一点的许多直线)所截，那么两条平行线被线束分成比例线段.	
9. 一直线上的两相等线段，在另一直线上的平行射影相等.	

2. 三角形

① 任意三角形

性质	计算
I. 边和边间的关系： 1. 在每个三角形中，每边小于其他两边之和，每边大于其他两边之差. 2. 对于任意三点 A、B、C，下面不等式成立： $\|AB-AC\| \leqslant BC \leqslant AB+AC$.	记 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，r 为内切圆半径， $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$， S 为 $\triangle ABC$ 的面积，h_a、h_b、h_c 分别为 a、