高等学校教材

綫性代数

張远达　熊全淹 編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教材

綫性代数

張远达　熊全淹 編

人民教育出版社

本书主要內容有行列式与綫性方程組，向量空間，綫性变换与矩陣理論，二次齐式，欧氏空間，酉空間，矩陣分析，直积与复合矩陣等。

本书可作为綜合大学和师范学院数学专业的教学参考书；同时由于它讲解詳尽、細致，所以又可作为自修綫性代数的讀者的讀本。

綫 性 代 数

張远达　熊全淹 编

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1083　开本 850×1168 1/32　印张 11 12/16

字数 315,000　印数 11,501—14,500　定价（6）¥1.10

1962 年 12 月第 1 版　1964 年 11 月北京第 4 次印刷

序

綫性代数在十九世紀的时候就已經获得了光輝的成就。由于它在数学的許多分枝、物理以及技术科学中都有很广泛的应用，所以到現在它在代数学中仍然占有重要的地位。

本书編写的目的是想把綫性代数的主要內容詳細地給以系統的叙述，便于讀者自修。因此，全书从开始到結束都是写得尽可能地詳細，在每章甚至每节的开头都把所要解决的問題明确提出，对于綫性代数的初等部分如行列式和綫性方程組的理論不但不像通行的一些綫性代数书上予以省略，而且还写得比較全面些，例如非齐次方程組的基础解系这个問題在一般高等代数或綫性代数的书上很少見。关于二次齐式的理論也写得較系統些和全面些，不只是叙述了判定齐式为正(負)定的条件，而且还仔細地剖析了半正(負)定或不定二次齐式之判定的标准。至代数与几何的关系，全书自始至終都給以重視，尤其在几个主要問題上如坐标变換、二次曲面(曲綫)的分类(投影、仿射、度量)等，不厌其煩地反复說明，这样既联系了几何，也丰富了綫性代数的內容。当然，同时个人也深知本书所討論的是綫性代数，并非解析几何，所以对于提及的几何材料不可能要求自成几何的系統，只能把几何材料看作是綫性代数的应用。綫性代数的应用当然不限于解析几何，就是在大学数学系低年級的基础課中数学分析和微分方程与綫性代数的关系也很密切。所以欲使讀者明了数学各科間的联系，本书特别也注意到綫性代数在数学分析和微分方程中的应用，例如在第六章末說明怎样利用二次齐式中有定及不定性的理論解决数学分析里面多个自变量函数的极大极小問題，在第五章末講了矩陣的有理标准形和約旦标准形之后，紧接着就說明这两种标准形用来解微分方程組問題时二者的优缺

点。尤其对綫性代数在微分方程中的应用給以特別的重視，故特地另辟一章(第九章)讲矩陣分析，为的是說明怎样利用矩陣知識解决一阶变系数綫性非齐次微分方程組的解的存在及其唯一性的問題。并在最后一章(第十章)将較艰深的部分直积与复合矩陣以及近来的工作趋向如特征值的估計也都作了介紹。又考虑到矩陣是数学本身以及应用科学的一个很重要的工具，因此在全书中都貫穿着这个精神而把矩陣放在首要的地位。全书选的习題很多，都有一定的份量，其中有些还是很重要的結果，在正文中有时要利用的，对于这些习題都加了星号；凡是比較难一点的題目都給了提示，如果循序漸进地去作，不会感到任何困难。

如果选用本书作为高等代数的教材，应根据具体情况适当地刪減，还应該补充多項式的理論(即方程式論)那一部分。

本书是在編者于武汉大学用的讲义的基础上几經修改和补充写成的。熊全淹先生也曾将此稿所印的讲义在湖北大学試用过一次，同学們反映在学习时也无困难。熊先生还亲笔写了第二章綫性方程組，对全书的文字修飾，熊先生也花了很大的功夫。也正由于熊先生的帮助，才有勇气完成此稿。当然，限于个人的水平，不妥的地方一定很多，希望大家多多指正。

張远达于武汉大学

一九六二年

目　次

第一章 行列式

行列式这个概念无論在数学本身上或是在其他的科学分枝上(例如物理学、力学)都有广泛的应用,它是綫性代数里最基本的东西。在这章我們特地来討論它。我們討論下面三个問題:(1)行列式这个概念的形成;(2)它的最基本的一些性質及計算它的方法;(3)說明怎样利用它去解綫性方程組。最后講的两个問題,拉普拉斯定理和行列式的乘法,是第二个問題中的一部分。

在这里还要事先說明一下,今后遇着的一切表示数的文字,如果不特别声明,指的都是复数。

§1. 行列式的概念

行列式这个重要的概念是从解一次方程組的問題所引起的。我們現在就从解方程組开始。

凡是学过初等代数的,都知道怎样解含两个未知量 x_1, x_2 的两个方程的方程組:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases} \tag{1}$$

式中未知量的系数 a_{ij} 附有两个下标 i 和 j 写在字母 a 的右下角,第一个下标 i 表明这个系数所在的方程的号碼,第二个下标 j 表明它是哪一未知量的系数;例如 a_{12} 是第一个方程第二个未知量 x_2 的系数,a_{21} 是第二个方程第一个未知量 x_1 的系数,等等。

实际上,要解方程組(1),就需要消去一个未知量 x_1 或 x_2,得到只含一个未知量的方程,因此这个未知量的値就可以立即求得了。假如我們想消去 x_2,就用 a_{22} 去乘(1)的第一个方程,而用 a_{12} 去乘(1)的第

二个方程，然后相减就得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

同样的道理，从消去 x_1 去着手，就得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

所以，只要 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，方程組(1)的解一定是下面的形式：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

反过来，这样的 x_1 和 x_2 的値也的的确确适合(1)式，这只要把它代入(1)式直接地計算一下就行了。于是我們知道当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 的时候，方程組(1)有唯一的解幷且这解是(2)的形式。

現在产生了一个問題，虽然方程組(1)的解答公式已經有了，即公式(2)，但公式(2)不便于記忆，因之要研究一下公式(2)的結构，看看有什么規律可循。

首先，我們看到公式(2)中的分母是一样的，它都等于 $a_{11}a_{22}-$ $-a_{12}a_{21}$；但 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 不含有方程組(1)的常数項 b_1 和 b_2，而只是由方程組(1)的系数形成的。先註我們把这些系数按它們在原来方程組中的位置写出幷在两旁各加一个直竪，用这样的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

符号(3)叫做二級行列式，它含有两个行和两个列，横写的叫做行，直写的叫做列，a_{ik} 这些数叫做二級行列式的元素(或簡称元)，a_{ik} 的第一个下标 i 表示它所在的行的順序，第二个下标 k 表示它所在的列的順序，例如 a_{12} 是在第一行第二列，a_{21} 是在第二行第一列，等等。从行列式(3)

来看馬上就知道 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 $a_{11}a_{22}$ 是在过 a_{11}, a_{22} 的对角綫上，而 $-a_{12}a_{21}$ 是在过 a_{12}, a_{21} 的对角綫上，也就是說将自左上角到右下角的对角綫上二个元素相乘取＋号，将自右上角到左下角的对角綫上二个元素相乘取－号，然后相加就得到(3)了。

再来看公式(2)中表达式的分子。x_1 的表达式的分子 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$ 很显然是将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 a_{11} 和 a_{21} 分别用 b_1 和 b_2 来代替，所以

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

同样的道理，(2)中 x_2 的表达式的分子等于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

于是公式(2)变成了

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

像这样用二級行列式来表达方程組(1)的解的公式，非常簡便，而且也很容易記它。再看含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的三个方程組成的方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{4}$$

要解它就得消去三个未知量 x_1,x_2,x_3 中的二个未知量，求得只含一个未知量的方程。假如我們在方程組(4)里用数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 去乘第一式，用数 $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ 去乘第二式，用数 $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 去乘第三式，然后把这三个新的方程加起来，那么 x_2 和 x_3 的系数都等于零，而得到等式:

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

所以当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

的时候，就得出

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

用类似的方法，我們可以求得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

这就是說：当 $D\neq 0$ 的时候，方程組(4)如果有解，这解一定是上面那样的形状。

反过来，把这样的 x_1, x_2, x_3 的值代入方程組(4)里面，很容易驗証它們的的确确是(4)的解。所以，当 $D\neq 0$ 的时候，方程組(4)有唯一的解，这解就是上面 x_1, x_2, x_3 的表达式。

同前面一样，为了便于記忆这公式，我們要詳細地研究一下这些表达式的結构。

首先，我們看到 x_1, x_2, x_3 的表达式里分母都是等于 D; 而 $x_i(i=1, 2, 3)$的表达式的分子是从 D 将 x_i 的系数 a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} 分別用 b_1, b_2, b_3 代替而成。于是只要对分母 D 的結构弄清楚了，那么 x_1, x_2, x_3 的表达式的結构也就搞清楚了。我們还是和前面一样，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

表示 D，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

符号(5)叫做三級行列式，它含有三行，三列。它是由六个項組成的，其中每一項都是(5)中三个元素的乘积，而且每个乘积含有每一行和每一列的一个元素而且祇含每行每列的一个元素。因此每一項都可以写成下面的形式

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}, \tag{6}$$

其中 p, q, r 是整数 1, 2, 3 的某一个一定的排列，因此与二級行列式类似，引用对角綫我們很容易把(5)中正負項写出来。我們先写出一个有六条对角綫的表

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

这对角綫表就是在原行列式的右方将原第一，二列依次附加进去而成的，其中每一对角綫把三个元素連成一組，在实对角綫上三个元素的乘积取＋号，在虛对角綫上三个元素的乘积取－号，然后把这六个乘积加起来就得到三級行列式(5)的值。譬如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot3- \\ -1\cdot(-4)\cdot5=30+2-24-12-6+20=10.$$

于是方程組(4)当 $D\neq0$ 时，它的解可以写成下面的形状:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

例. 解綫性方程組:

$$2x-y+z=0,\ \ 3x+2y-5z=1,\ \ x+3y-2z=4.$$

这时，

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,\quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

所以所求的解是

$$x=\frac{13}{28},\ \ y=\frac{47}{28},\ \ z=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

有了二級三級行列式的定义，我們就可以把$D\neq 0$时方程組 (1) 及方程組 (4) 的解表出。因此我們自然会想到怎样把二級三級行列式的定义推广到一般 n 級行列式，也利用它来表达由 n 个未知量 n 个方程組成的綫性方程組的解。从前面我們得知由二个未知量中消去一个比較容易，但由三个未知量中消去二个就已經很麻煩。至于一般由 n 个未知量中消去 $n-1$ 个几乎是不可能的了。因此 n 級行列式的定义我們不能用上面类似的方法求得。我們这样来解决这个問題，我們先詳細研究一下二級、三級行列式的結构，找出它們的內在的規律，然后根据它来規定 n 級行列式的意义，再在解 n 个未知量的綫性方程組的問題中来驗証它。

現在我們来研究(5)的結构，首先我們看到(5)中所有的項只需要在乘积(6)中就第二个指标 p, q, r 取所有可能的六种不同的排列

$$1,2,3;\ \ 2,3,1;\ \ 3,1,2;\ \ 1,3,2;\ \ 2,1,3;\ \ 3,2,1; \tag{7}$$

就得出了。但是乘积(6)在(5)中出現的时候，有一些带有正号，另一些却带有負号，于是剩下要說明的只是选擇正負号所根据的法則了。实际上，(6)中带有正号的那些乘积的第二个指标 $p,\ q,\ r$ 形成下列的三个排列:

$$1,2,3;\ \ 2,3,1;\ \ 3,1,2; \tag{7_1}$$

带有負号的那些乘积的第二个指标 p, q, r 形成下列的三个排列:

$$1,3,2;\ \ 2,1,3;\ \ 3,2,1. \tag{7_2}$$

現在我們要問排列(7_1)和(7_2)的区别在那里？下面我們用逆序这个概念来說明它們的区别。

任意两个数，如果大的在小的前面，我們就說这两个数有一个逆序。一个排列中所有二数的逆序数的和叫做这排列的逆序数。于是(7_1)中第一个排列沒有逆序，我們干脆說逆序的个数是零；在第二个排列中如果我們逐次把每一个数同它后面各个数比較，很容易看出有两个逆序，一个是 2 在 1 前，另一个是 3 在 1 前；同样可以看出(7_1)中第三个排列也有两个逆序，一个是 3 在 1 前，另一个是 3 在 2 前。于是我們得知 (7_1) 中所有排列都有偶数个逆序。用完全同样的方法来研究(7_2)中的排列，得知它們都有奇数个逆序。一个排列如果它的逆序数是偶数就叫做偶排列，是奇数就叫做奇排列。因此我們就得到(5)中各項符号选擇的法則：乘积(6)在(5)中时它的符号是正号或負号，完全由它的第二个指标形成的排列 p, q, r 是偶排列或奇排列来决定。于是我們有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p,q,r)} (-1)^{[p,q,r]} a_{1p} a_{2q} a_{3r}, \tag{8}$$

其中符号$[p, q, r]$表示排列 p, q, r 的逆序数，符号$\sum\limits_{(p,q,r)}$表示要对1, 2, 3的所有可能的排列取和。

因为 1, 2 两个数的所有可能的排列只有 1, 2 和 2, 1 二个，前者逆序数为零，后者逆序数为 1，所以

$$\sum_{(p,q)}(-1)^{[p,q]}a_{1p}a_{2q}=(-1)^{[1,2]}a_{11}a_{22}+(-1)^{[2,1]}a_{12}a_{21}=$$

$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

因此，
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(p,q)}(-1)^{[p,q]}a_{1p}a_{2q},$$

这恰与(8)式的形式一致，这就是說二級行列式的概念是三級行列式的特例。現在我們就不难把它推广到一般的情形。

假定有 n^2 个数，把它們写成一个有 n 行和 n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

我們叫(9)是 n 級行列式，它表示所有这样乘积的代数和，每个乘积含有 n 个元素，每行一个，每列也一个，于是这些乘积都可以写成下面的形式

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{10}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列，每个这样的排列依 $1, 2, \cdots, n$ 的順序来比較，就有一个逆序数；当这逆序数是偶数时，这項取正(+)号，是奇数时，这項取負(−)号。用式子表示，就是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{11}$$

其中符号$[p_1,p_2,\cdots,p_n]$表示排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数，符号 $\sum\limits_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$ 表示要对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列取和。

因为 n 个数字的所有排列共有 $1\cdot2\cdots n=n!$ 个，所以 n 級行列式共有 $n!$ 个項。

讀者在这里可能会发生一个疑問，那就是在上面行列式的定义中每项的符号能否这样来决定，把每項中 n 个元素依它的第二个指标順序来排列，这时它們的第一个指标形成的排列的逆序数如果是偶数，这項的符号是＋，如果是奇数，这項的符号是－？我們說也能够这样决定，为什么？在下节中有它的証明，那就是行列式和它的轉置行列式相等。

最后我們对于行列式的定义有必要再說几句話。行列式(11)中每个元素 a_{ij} 的右下角都有二个指标，第一个下标 i 是表示它所在的行的序数，第二个下标 j 是表示它所在的列的序数，a_{ij} 就是在第 i 行第 j 列的元素，譬如 a_{12} 就是在第一行第二列的元素。再我們把每项写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的形式，意思就是說要把每項的 n 个元素依行的順序来写，a_{1p_1} 是在第一行上的，所以写在最前面，a_{2p_2} 是在第二行上的，所以写在第二位，最后a_{np_n}是在第 n 行上的，所以写在最后第 n 位。同样，p_1, $p_2,\cdots,p_n$ 依 $1,2,\cdots,n$的順序来比較就是依列的順序来比較。假如 a_{ij}的第一个下标 i 不是表示它所在的行的序数，或第二个下标 j 不是表示它所在的列的序数，那末任意項 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的排法以及与 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 比較的 $1,2,\cdots,n$ 的順序都应当相应地改变。譬如依定义

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}=\sum_{(p,q,r)}(-1)^{[p,q,r]}a_{2p}a_{1q}a_{3r},$$

这里$[p,q,r]$是 p,q,r 依 $3,2,1$ 的順序比較所得的逆序数，因为第一、二、三列是以右下角的第二个下标 $3,2,1$ 这三个数字表示的，所以这

时逆序数〔321〕=0,〔132〕=2(1 在 3 前有一个逆序,1 在 2 前也有一个逆序),等等〕,而右下角的第一个下标 2, 1, 3 是表示第一、二、三行的順序,因之每項先写成 $a_{2p}a_{1q}a_{3r}$ 后,再来比較列的逆序数。讀者要認清 $1, 2, \cdots, n$ 所表示的意义,不可形式地拘泥于 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数字的大小。

习　　题

1. 解綫性方程組:

$$(a)\begin{cases}2x_1-4x_2+\ \ x_3=1,\\ x_1-5x_2+3x_3=2,\\ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=-1.\end{cases}\qquad (b)\begin{cases}bx-\ ay\qquad\ \ =-2ab,\\ \quad -2cy+3bz=bc,\\ cx\qquad\ +\ az=0,\end{cases}\qquad (abc\neq 0).$$

2. 試証行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

3. 試証三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

的值都等于 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$。

4. 三級行列式(5)中的項 $a_{21}a_{12}a_{33}$ 应該带什么符号?

   n 級行列式(11)中的項 $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 又应該带什么符号?

5. 在一个 n 級行列式中等于零的元素如果比 n^2-n 还多,那末这行列式等于零,为什么?

§2. 行列式的基本性质

行列式的定义在上节已經說明白了,也就是說我們已經解答了我