51.813
LY2

中算家的內插法研究

李　儼著

科學出版社

中算家的內插法研究

李　儼著

科　學　出　版　社
1957

內 容 提 要

本書說明中國古代天文學家自隋劉焯以來各家在編制曆法中的各種天文計算所用的內插法與現代天文測量術裏所用的內插法結果是相合的.

本書內容包括五部分:

(一)自變數等間距內插法說明.

(二)自變數不等間距內插法說明.

(三)中國古代天文學家在中國曆法上對內插法的應用.

(四)中國算法對內插法的應用.

(五)日本曆算法對內插法的應用.

中算家的內插法研究

著者 李儼

出版者 科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

印刷者 上海啓智印刷廠

總經售 新華書店

1957年4月第一版 書號:0720 印張:3 5/16
1957年4月第一次印刷 開本:850×1168 1/32
(滬)0001—6660 字數:85,000

定價:(10)0.60元

目　錄

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(一) 自變數等間距內插法說明

1. 內插法緒言

我們首先簡單的說明內插法，因"近似計算法"方面"內插法"(интерполирование) 是重要的一個節目． 如我們提出自變數的 n 個數值:

$$X: \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots,\ x_n,$$

便可算出它的相應函數 $f(x)$ 的 n 個數值:

$$f(x) \text{ 或 } U_x: \qquad U_{x_1},\ U_{x_2},\ U_{x_3},\ U_{x_4},\ \cdots,\ U_{x_n}.$$

如舉數值列表來說明,就是:

$$X: \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots$$

可以和

$$f(x) \text{ 或 } U_x = x^3: \qquad 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ \cdots$$

相對照． 以上所列 X 的各值，間距是相等的，這是自變數有等間距的條件． 現在根據這個條件,如在 $x = 4.26$ 內插數值上，求內插函數 $U_x = (4.26)^3$ 的數值，或求自變數用有限增量 $h = 0.5$,遞加時各函數值，都需要內插公式來計算． 在國外說明比較明顯的，是公元 1670 年的格列高里(James Gregory)[1]．

內插法在天文學、統計學、人壽保險學以及應用工程學和數學本身,都有應用． 我國九章算術第七章盈不足術是一種最簡單的內插法,就是一次內插法． 隋劉焯(公元 544—610 年)在他皇極曆所用的是等間距二次內插法．

唐僧一行(683—727)大衍曆 (724) 用不等間距二次內插法來計算． 元郭守敬(1231—1316)授時曆(1281)用等間距三次內插法來計

1) 參看 3．"自變數等間距內插公式的計算"內註文．

算，是比較顯著的. 宋元算家，即公元十一到十四世紀中國數學家，還應用這原則來研究高次方程內近似解法和級數的計算. 內插法還和賈憲開方作法本原圖以及增乘開方法都有關係，所以內插法是中國數學家知道較早，研究較成熟的科目. 現在先說明內插的基礎理論.

2. 內插法的差分表

“內插法”的重要作用是差分(разность)表. 例如記錄自變數 x 的函數成 U_x，這自變數 x，是由等間距 h，逐漸改變成 $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, …, 因此和它相對照的函數 U_x，也逐漸改變成 U_{x+h}, U_{x+2h}, U_{x+3h}, ….

其中 $U_{x+h}-U_x$ 稱做函數 U_x 的第一次有限差分（一差）寫成 ΔU_x, $U_{x+2h}-U_{x+h}$ 稱做函數 U_{x+h} 的第一次有限差分，寫成 ΔU_{x+h}, $U_{+3h}-U_{x+2h}$ 稱做函數 U_{x+2h} 的第一次有限差分，寫成ΔU_{x+2h}，逐次如此

$$U_{x+nh}-U_{x+(n-1)h}=\Delta U_{x+(n-1)h};\qquad\text{(一差)}$$

又 $\Delta U_{x+h}-\Delta U_x$ 稱做 U_x 的第二次差分(二差)，寫成 $\Delta^2 U_x$, $\Delta U_{x+2h}-$ $-\Delta U_{x+h}$ 稱做 U_{x+h} 的第二次差分，寫成 $\Delta^2 U_{x+h}$，逐次如此

$$\Delta U_{x+nh}-\Delta U_{x+(n-1)h}=\Delta^2 U_{x+(n-1)h};\qquad\text{(二差)}$$

又 $\Delta^2 U_{x+h}-\Delta^2 U_x$ 稱做 U_x 的第三次差分（三差）寫成 $\Delta^3 U_x$; 又逐次如此 $\Delta^{n-1}U_{x+h}-\Delta^{n-1}U_x$ 稱做 U_x 的第 n 次差分（n 差），寫成 $\Delta^n U_x$.

如將上述差分，記錄如下表（表見次頁）.

同理，

$$\Delta^n U_x=\Delta^{n-1}U_{x+h}-\Delta^{n-1}U_x$$

或

$$\Delta^{n-1}U_{x+h}=\Delta^n U_x+\Delta^{n-1}U_x$$

或

$$\Delta^{n-1}f(x+h)=\Delta^n f(x)+\Delta^{n-1}f(x).$$

基礎差分表

自變數 $X=x+nh$ $n=0,1,2,3,4,\cdots$	隨變數 $f(X)$ 或 U_x	差分 第一次	第二次	第三次	……	第 $n-1$ 次	第 n 次
x	U_x				⋮		
		$\Delta U_x=\Delta_1$[1]			⋮		
$x+h$	U_{x+h}		$\Delta^2U_x=\Delta_1^2$		⋮		
		$\Delta U_{x+h}=\Delta_2$		$\Delta^3U_x=\Delta_1^3$	⋮		
$x+2h$	U_{x+2h}		$\Delta^2U_{x+h}=\Delta_2^2$		⋮	$\Delta^{n-1}U_x=\Delta_1^{n-1}$	
		ΔU_{x+2h}		$\Delta^3U_{x+h}=\Delta_2^3$	⋮		$\Delta^nU_x=\Delta_1^n$
$x+3h$	U_{x+3h}		Δ^2U_{x+2h}		⋮	$\Delta^{n-1}U_{x+h}=\Delta_2^{n-1}$	
		ΔU_{x+3h}			⋮		$\Delta^nU_{x+h}=\Delta_2^n$
$x+4h$	U_{x+4h}				⋮		

1) 爲簡便起見，ΔU_x 或 $\Delta f(x)$ 寫成 Δ_1；Δ^2U_x 或 $\Delta^2f(x)$ 寫成 Δ_1^2，… 餘類推。

又如 x 相續兩值的差數都等於 1，或等於某一個等數 h，因此在函數 $f(x)$ 或 $U_x = x^3 - 17x^2 - 23x + 159$ 方面就得到差分表如：

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$
0	159			
		−39		
1	120		−28	
		−67		+6
2	53		−22	
		−89		+6
3	−36		−16	
		−105		+6
4	−141		−10	
		−115		
5	−256			

我們由上述定義，知道：

$$\Delta U_x = U_{x+h} - U_x,$$

$$\Delta^2 U_x = \Delta U_{x+h} - \Delta U_x = U_{x+2h} - 2U_{x+h} + U_x,$$

$$\Delta^3 U_x = \Delta^2 U_{x+h} - \Delta^2 U_x = U_{x+3h} - 3U_{x+2h} + 3U_{x+h} - U_x,$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 U_x &= \Delta^3 U_{x+h} - \Delta^3 U_x = \\ &= U_{x+4h} - 3U_{x+3h} + 3U_{x+2h} - U_{x+h} - \\ &\qquad - U_{x+3h} + 3U_{x+2h} - 3U_{x+h} + U_x,\end{aligned}$$

即：

$$\Delta^4 U_x = U_{x+4h} - 4U_{x+3h} + 6U_{x+2h} - 4U_{x+h} + U_x.$$

第四次差分（四差）$\Delta^4 U_x$ 左旁各隨變數係數的數字 1, 4, 6, 4, 1. 也就是和二項四次羃的各項係數相同.

同理：

$$\Delta^n U_x = U_{x+nh} - nU_{x+(n-1)h} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}U_{x+(n-2)h}$$

$$+ (-1)^{n-1}nU_{x+h} + (-1)^n U_x. \qquad (1.1)$$

各係數又和二項式的係數相同.

再設一代數符號E表示自變數 x,漸加等間距 h 的隨變數,如

$$EU_x = U_{x+h} = \Delta U_x + U_x$$

或

$$Ef(x) = f(x+h) = \Delta f(x) + f(x).$$

兩邊的共同代數符號 U_x 或 $f(x)$ 同時省略,則

$$E = \Delta + 1$$

或

$$\Delta = E - 1,$$
$$\Delta^n = (E-1)^n.$$

上式(1.1)是由各隨變數值來求各次差分值. 以下再考慮如何由各次差分值來求各隨變數值. 由上面差分表,可以看出:

$$\begin{aligned} U_{x+h} &= U_x + \Delta U_x, \\ U_{x+2h} &= U_{x+h} + \Delta U_{x+h} = \\ &= \Delta U_{x+h} + \Delta U_x + U_x = \\ &= (U_x + \Delta U_x) + (\Delta U_x + \Delta^2 U_x) = \\ &= U_x + 2\Delta U_x + \Delta^2 U_x. \end{aligned}$$

在 ΔU_x, $\Delta^2 U_x$ 式中,符號Δ和 Δ^2 本來不代表因子,不過爲便利起見,在這符號上,上式也可改寫成公式:

$$\begin{aligned} U_{x+2h} &= U_x(1 + 2\Delta + \Delta^2) = \\ &= (1+\Delta)^2 U_x. \end{aligned}$$

3. 自變數等間距內插公式的計算

再由上面差分表,又可以看出:

$$U_{x+3h} = U_{x+2h} + \Delta U_{x+2h} = \Delta U_{x+2h} + (\Delta U_{x+h} + \Delta U_x + U_x) =$$
$$= (U_x + 2\Delta U_x + \Delta^2 U_x) + \Delta U_{x+h} + \Delta^2 U_{x+h} =$$
$$= U_x + 2\Delta U_x + \Delta^2 U_x + \Delta U_x + \Delta^2 U_x + \Delta^2 U_x + \Delta^3 U_x =$$
$$= U_x + 3\Delta U_x + 3\Delta^2 U_x + \Delta^3 U_x$$

如前例改寫成：

$$U_{x+3h} = U_x(1 + 3\Delta + 3\Delta^2 + \Delta^3) =$$
$$= (1+\Delta)^3 U_x.$$

同理

$$U_{x+nh} = (1+\Delta)^n U_x =$$
$$= U_x + \frac{n}{1}\Delta U_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 U_x + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^t U_x + \cdots +$$
$$+ \Delta^n U_x. \tag{1.2}$$

這公式即說明如何通過 $E = \Delta + 1$，可以由各次差分值 $\Delta U_x, \Delta^2 U_x, \Delta^3 U_x, \cdots, \Delta^n U_x$ 來計算相對照隨變數 U_{x+nh} 的數值．

又以上

$$U_{x+nh} = U_x + \frac{n}{1}\Delta U_x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 U_x + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!}\Delta^{n-t} U_x + \cdots +$$
$$+ \Delta^n U_x \tag{1.2}$$

公式，還可以不通過 $E = \Delta + 1$，同樣直接由各次差分值 $\Delta U_x, \Delta^2 U_x, \Delta^3 U_x, \cdots$，求到相對照隨變數 U_{x+nh} 的數值．這裏不再具述．

上式(1.2)格列高里(James Gregory)在公元 1670 年已經發現[1]．

---

1) 見裘宗堯譯，Whittaker-Robinson 著，內插法，引 Rigand, Corespondence of Scientific Men of the 17th Century, 2, p. 209.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

不過在教科書和在數學史上都稱做自變數等間距的牛頓(Newton)內插公式.

至現在所稱招差術,在歐洲實始於十七世紀.公元1673年萊白尼慈(Leibniz)曾由招差術法求算立方數,如

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \\
 & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & \\
1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 \\
\end{array}
$$

0　1　8　27　64　125　216

(1.2)式中如令

$$x + nh = X,$$

即得

$$n = \frac{X-x}{h},\ \frac{n-1}{2} = \frac{X-x-h}{2h},\ \frac{n-2}{3} = \frac{X-x-2h}{3h}\cdots$$

(1.2)式可改寫成:

$$
\begin{aligned}
U_X = U_x &+ \frac{X-x}{h}\Delta U_x + \frac{(X-x)(X-x-h)}{1\cdot 2\cdot h^2}\Delta^2 U_x + \\
&+ \frac{(X-x)(X-x-h)(X-x-2h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot h^3}\Delta^3 U_x + \cdots + \\
&+ \frac{(X-x)(X-x-h)\cdots(X-x-(n-2)h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)h^{n-1}}\Delta^{n-1}U_x + \\
&+ \frac{(X-x)(X-x-h)\cdots(X-x-(n-1)h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot h^n}\Delta^n U_x. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

(1.2)式和(1.3)式,如$\Delta^2 U_x$以後,即第三次差分$\Delta^3 U_x$之值為零.還令

$$n = \frac{X-x}{h},$$

則

$$U_{x+nh} = U_x + \frac{n}{1}\Delta U_x + \frac{n(n-1)}{2!}[\Delta U_{x+h} - \Delta U_x].$$

又令

$$\Delta U_x - \Delta U_{x+h} = s,$$
$$\Delta U_x + \Delta U_{x+h} = T,$$

則

$$\Delta U_x = \frac{T}{2} + \frac{s}{2}.$$

代入上式,得:

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + \frac{n(1-n)}{2}s + \frac{ns}{2}\right] =$$
$$= U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2}\cdot s\right], \qquad (1.4)$$

其中 $s = \Delta U_x - \Delta U_{x+h},$

$T = \Delta U_x + \Delta U_{x+h}.$

上式稱做"自變數等間距二次內插公式".

我國古代曆法對內插法用處很大. 如已知兩個節氣的數值,再求兩個節氣中間某一天的數值,隋代劉焯(544—610)曾應用

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2}\cdot s\right], \qquad (1.4)$$

其中

$$\Delta U_x - \Delta U_{x+h} = s,$$
$$\Delta U_x + \Delta U_{x+h} = T$$

公式來計算"每日遲速數"(600),這就是中國曆法上應用內插公式的開始.

唐代李淳風也是應用劉焯的方式來計算麟德曆(664),所以也應用劉焯同樣的公式

$$U_{x+nh} = U_x + \left[\frac{nT}{2} + ns - \frac{n^2}{2}\cdot s\right] \qquad (1.4)$$

來算"各日消息數".

可是劉焯和李淳風等曆法家,對於這種內插法,都沒有提出什麼名稱,也沒說明它的做法.

（二）自變數不等間距內插法說明

1. 基 礎 均 差 表

在"自變數等間距內插法說明"內指出自變數 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$ 各數的間距，是相等的，此項計算手續比較簡單，可是機會甚難遇到，這裏因另對自變數不等間距內插法的計算作一說明.

同樣我們給自變數的 n 個數值

$$a: \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$$

和它們的相對應函數的 n 個數值

$$f(a): \qquad f(a_0), f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots, f(a_n)$$

相對照，其中 $a_1-a_0, a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots, a_n-a_{n-1}$ 間距不相等. 另外還有下列的記錄，就是：

$$\frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0}=f(a_1, a_0), \quad \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f(a_2, a_1),$$
$$\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}=f(a_3, a_2), \quad \cdots\cdots$$

稱做第一次被除差，或第一次均差(разделённая разность).

又

$$\frac{f(a_2, a_1)-f(a_1, a_0)}{a_2-a_0}=f(a_2, a_1, a_0),$$
$$\frac{f(a_3, a_2)-f(a_2, a_1)}{a_3-a_1}=f(a_3, a_2, a_1),$$
$$\frac{f(a_4, a_3)-f(a_3, a_2)}{a_4-a_2}=f(a_4, a_3, a_2), \cdots\cdots$$

稱做第二次被除差，或第二次均差.

又

$$\frac{f(a_3,\ a_2,\ a_1)-f(a_2,\ a_1,\ a_0)}{a_3-a_0}=f(a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0),$$

$$\frac{f(a_4,\ a_3,\ a_2)-f(a_3,\ a_2,\ a_1)}{a_4-a_1}=f(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1),$$

…………………………………………………………

稱做第三次被除差,或第三次均差.

如將上述均差,記錄如下表:

基礎均差表

自變數 a	隨變數 $f(a)$	被除差或均差		
		第一次	第二次	第三次
a_0	$f(a_0)$			
		$f(a_0, a_1)$		
a_1	$f(a_1)$		$f(a_0, a_1, a_2)$	
		$f(a_1, a_2)$		$f(a_0, a_1, a_2, a_3)$
a_2	$f(a_2)$		$f(a_1, a_2, a_3)$	
		$f(a_2, a_3)$		$f(a_1, a_2, a_3, a_4)$
a_3	$f(a_3)$		$f(a_2, a_3, a_4)$	
		$f(a_3, a_4)$		$f(a_2, a_3, a_4, a_5)$
a_4	$f(a_4)$		$f(a_3, a_4, a_5)$	
		$f(a_4, a_5)$		
a_5	$f(a_5)$			

現在先說明

$$f(a_1,\ a_0)=f(a_0,\ a_1),$$

$$f(a_2,\ a_1,\ a_0)=f(a_0,\ a_1,\ a_2)=\cdots,$$

$$f(a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0)=f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)=\cdots,$$

即函數內 a_0, a_1, a_2, a_3, … 各數字的次序可以互相換用,也說明它們和自變量次序無關.

如上述

$$f(a_1, a_0) = \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} = \frac{f(a_1)}{a_1-a_0} - \frac{f(a_0)}{a_1-a_0} =$$

$$= \frac{f(a_0)}{a_0-a_1} - \frac{f(a_1)}{a_0-a_1} \equiv f(a_0, a_1),$$

這說明

$$f(a_1, a_0) \equiv f(a_0, a_1);$$

又

$$f(a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0} =$$

$$= \frac{1}{a_2-a_0}\left[\frac{f(a_2)}{a_2-a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1-a_2}\right] + \frac{1}{a_0-a_2}\left[\frac{f(a_1)}{a_1-a_0} + \frac{f(a_0)}{a_0-a_1}\right] =$$

$$= \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{f(a_1)}{a_2-a_0}\left(\frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_1-a_0}\right) +$$

$$+ \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} =$$

$$= \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}.$$

同樣

$$f(a_0, a_1, a_2) =$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

又

$$f(a_0, a_2, a_1) \text{ 或 } f(a_1, a_2, a_0) =$$

$$= \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

或

$$= \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}.$$

這又說明

$$f(a_2,\ a_1,\ a_0) \equiv f(a_0, a_1, a_2) \equiv$$
$$\equiv f(a_0, a_2, a_1) \equiv f(a_1, a_2, a_0)\ 等;$$

同理,

$$f(a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0) \equiv f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3) \equiv$$
$$\equiv f(a_0,\ a_2,\ a_1,\ a_3)\ 等等.$$

同樣

$$f(a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0)\ 或\ f(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)\ 或\ f(a_0,\ a_2,\ a_1,\ a_3) =$$
$$= \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} +$$
$$+ \frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{f(a_3)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

例如:

自變數	隨變數	被除數或均差			
a	$f(a)$	第一次	第二次	第三次	第四次
		$f(a_1, a_0)$	$f(a_2, a_1, a_0)$	$f(a_3, a_2, a_1, a_0)$	$f(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$
$a_0=5$	150				
		121			
$a_1=7$	392		24		
		265		1	
$a_2=11$	1452		32		0
		457		1	
$a_3=13$	2366		46		
		917			
$a_4=21$	9702				

其中

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com