

B6-21
PJZ

水工結構应力分析丛书之三

砌 觀 段 變 漸

潘 家 錚 編 著

科 技 卫 生 出 版 社

水工結構应力分析叢書之三

漸 變 段 襯 砌

潘家鋐 編 著

科 技 卫 生 出 版 社

內 容 提 要

本書分析水工建築物中各種特殊形式輸水道斷面的計算方法：除概述外，分別研究標準漸變段襯砌在主動側壓力和內水壓力以及垂直山石壓力、自重水重下的計算，舉例；單拱雙拱式進口段襯砌的計算；方框形地下結構的計算及舉例；和剛性斜牆的計算等。書末附錄彈性地基上短梁的常數及附表等，供計算時查閱。本書可供水利工程設計人員及有關專業院校師生參考之用。

水工結構應力分析叢書之三 漸 變 段 襯 砌

編 著 者 潘 家 鈞

科 技 衛 生 出 版 社 出 版

(上海南京西路 2004 號)

上海市書刊出版業營業許可證出 098 號

上海市印刷四廠印刷 新華書店上海發行所品經售

統一書號：15119·1069

書本 850×1168 1/32·印張 37/8·字數 93,000

1958 年 12 月第 1 版

1958 年 12 月第 1 次印刷·印數 1—2,000

定價：(計) 0.80 元

目 錄

第一章	概述	1
第二章	在主动側压力和均匀內水压力作用下标准漸变段 襯砌的計算	6
第三章	在垂直山石压力、自重和水重下标准漸变段襯砌 的計算	10
第四章	标准漸变段襯砌計算举例	21
第五章	單拱式進口段襯砌的計算	31
第六章	双拱式進口段襯砌的計算	55
第七章	方框形地下結構計算原理及举例	59
第八章	剛性斜牆的計算	69
附錄	彈性地基上短梁的常数	92
附表		105
参考文献		119

第一章 概述

在“水工隧洞”一書中，我們研究了圓形和馬蹄形水工隧洞襯砌的計算方法。但是在水工建築物中，我們經常會遇到其他形狀的輸水道断面。例如在進水口處，便常須採用單孔或多孔的框架式和圓拱式的結構，在平面上則呈喇叭形。在進口段后常常要接上一段漸變段，將断面由進口段均勻地變成圓形断面，以與正規的隧洞相接。在隧洞的出口處或其他特殊地區，也常須做成矩形或其他形式。這種特殊形式的断面的計算方法，將在本書中研究，並分為標準漸變段、進口段和方框形結構三部分來論述。此外，土壩和堆石壩的剛性斜牆，在結構作用上和方框形的地下結構相似，完全可用同樣方法進行計算，因此，也在本書中予以討論。

首先解釋標準漸變段的意義。按漸變段常插在進水口閘門段和圓形隧洞之間。它的形狀，自矩形逐漸變成圓形，設計時應要求各断面呈連續而光滑的變化，以使水力損失為最少。比較通用的做法，是將漸變段用四段圓弧及兩組直線組成，如圖 1 所示， $2a$ 及 $2b$ 為兩段直線段之長， r 為四段圓弧的半徑，調整 a 、 b 及 r 之值，常可使漸變段接入任何矩形與圓形之間。這種断面，我們將稱之為標準漸變段。

作用在漸變段上的荷載，與隧洞相同：有內、外水壓力，山石壓力，側壓力，灌漿壓力以及必要的基礎反力（包括基岩彈性抗力）以維持平衡。對於各種荷載的性質的討論，可參考“水工隧洞”一書，本書中不詳予復述。

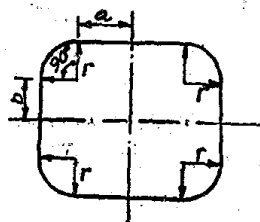


圖 1

漸變段襯砌是一個封閉的結構，為三次超靜定的，我們可用一

般結構學上的方法來進行計算,而且僅考慮彎曲力矩對變形的影響,忽視剪力及軸向力的成分。這裡主要的困難,仍然是在如何確定基岩反力(包括彈性抗力)的分布情況。很顯然,對於這種形狀複雜的地下結構襯砌外面的基岩反力是極難精確決定的,因此我們一般採用以下幾種近似的方法來解決:

(1) 對於均勻的內水壓力,或外水壓力、灌漿壓力、山石側壓力等,荷載本身能自行平衡,這時,我們不妨不計基礎反力和岩石彈性抗力等問題,徑按一般的“力法”或“柱比法”等進行分析,并無困難。在第二章中我們即將給出這種情況下的計算公式。當然,嚴格講來,在上述各種荷載作用下,襯砌外面必受到某種岩石彈性抗力的作用。但抗力的分布形狀極難計算(詳後)。而且不計岩石抗力,略偏於安全,故上述方法常在設計中被採用。

(2) 襯砌承受山石壓力、自重、水重等荷載作用時,荷載本身不能維持平衡,非考慮基礎的反力不可。我們

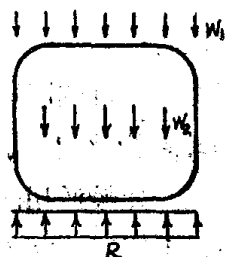


圖 2

就根據平衡條件對反力分布作出一些估計。例如參考圖 2, 將襯砌上全部荷載 W_1 、 W_2 等組合起來, 求出其合力 R , 然後假定反力分布在底部, 令其合力亦為 R , 與荷載平衡。反力的分布形式, 可假定為均勻的, 或為曲綫形的, 或為三角形的, 須根據結構物、地質情況和荷載情況決定(當然, 不論採用那一種分布方式, 都是近似的)。

反力決定後, 即可用一般方法進行靜力計算。

上述計算方法的優點是簡捷方便, 但其缺點則是对基岩反力的影響, 或則完全不計, 或則出自估計, 和實際的情況難期一致, 因而可靠性較差。特別當襯砌承受山石壓力、自重和水重時, 在左右兩側會受到基岩的彈性抗力作用, 而在我們的近似估計中, 沒有考慮這種影響, 把反力都放在底部, 因此會給出比較保守的結果。但由於如以前所述, 真正的岩石抗力極難求出, 因此這種算法還是廣

泛地被採用着。本書在第二、三章中，都敘述這種算法的步驟及公式。

關於基礎反力的分布情況，可採取不同的假定：如（1）呈余弦曲綫變化，（2）呈均勻分布，（3）呈三角形分布或（4）呈拋物綫分布。當襯砌底板直綫段不是很長，襯砌剛度較大，岩石抗力系數較弱時，取反力為余弦曲綫分布最為適宜。當地基性質十分軟弱時（例如修建在土壤中的管道），則反力可取為拋物綫分布。假定反力呈三角形分布，則無什麼根據，而此假定一般給出偏高的內應力，因此不甚可取。最簡便和常用的假定，則是令反力為均勻分布。下面我們將以均勻分布的反力和按余弦曲綫變化的反力作為計算根據。

以上所述，都將基岩反力分布曲綫作了近似估計。要更合理地確定基岩反力分布，必須考慮襯砌與岩石的變形及其相容條件。這一課題，尚未徹底解決，如果漸變段的曲綫段部分很短，則可視為由四根直梁組成，每根梁都置於彈性地基上，而用第七章所述計算方框形結構的方法來處理它。倘圓弧段很長，直綫段較短，則可作為圓形隧洞斷面而用“水工隧洞”一書中第六章或第八章中的方法處理。如圓弧段及直綫段都不能忽略，則可將圓弧段以幾段折綫梁代替，仍用彈性地基上直梁的常數來解決（參閱“壓力管”一書）。

我們試從更一般性的觀點來看這一問題。如圖 3(a) 的情況，襯砌受內水壓力作用，在外側遇到岩石的彈性抗力 $k\delta$ 。由於對稱關係，只須考慮其 $\frac{1}{4}$ 即可。假定岩石抗力是連續而緩慢地變化，在圓弧段，其平均強度為 $k\delta_0$ ，在頂部為 $k\delta_a$ ，在水平端為 $k\delta_c$ 。

然後我們不考慮彈性抗力問題，計算襯砌在內水壓力作用下 a 、 b 、 c 三點的變位（指該點與其對稱點相對變位值的一半） δ_{a0} 、 δ_{b0} 、 δ_{c0} 。再在襯砌外面作用如圖 3 (c)、(d)、(e) 三種情況的彈性抗力，而且設在 a 、 b 、 c 三點處的變位各為 δ_{a1} 、 δ_{b1} 、 δ_{c1} 、 δ_{a2} 、 δ_{b2} 、 δ_{c2} ，

δ_{a3} 、 δ_{b3} 、 δ_{c3} 則由彈性抗力的定义,我們可列下一組方程式來求出 $k\delta_a$ 、 $k\delta_b$ 和 $k\delta_c$:

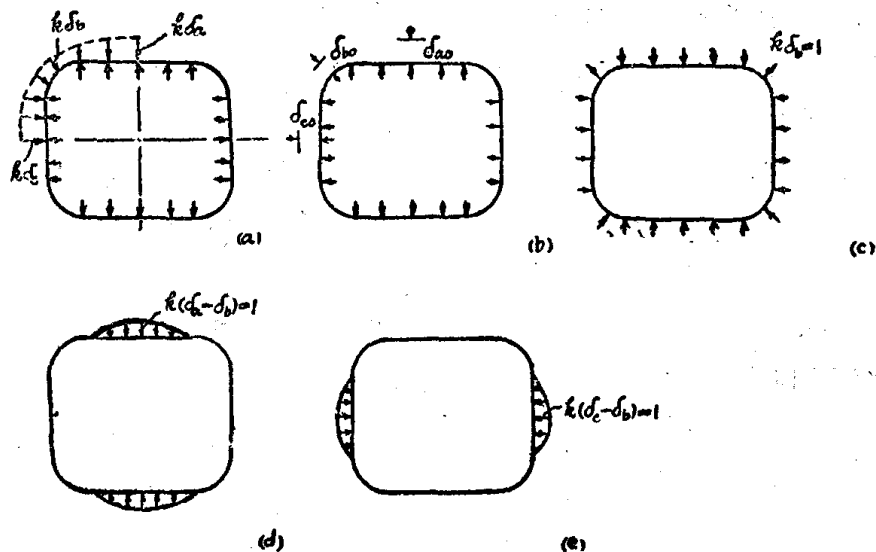


圖 3

$$\left. \begin{aligned} k\delta_b \cdot \delta_{a1} + k(\delta_a - \delta_b) \cdot \delta_{a2} + k(\delta_c - \delta_b) \cdot \delta_{a3} &= \delta_{ao} \\ k\delta_b \cdot \delta_{b1} + k(\delta_a - \delta_b) \cdot \delta_{b2} + k(\delta_c - \delta_b) \cdot \delta_{b3} &= \delta_{bo} \\ k\delta_b \cdot \delta_{c1} + k(\delta_a - \delta_b) \cdot \delta_{c2} + k(\delta_c - \delta_b) \cdot \delta_{c3} &= \delta_{co} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

既求出 $k\delta_a$ 、 $k\delta_b$ 及 $k\delta_c$, 即确定了岩石彈性抗力的分布, 从而解决了問題。倘我們多取几个控制点如 a 、 b 、 c 、 d 、 e ..., 則求出的彈性抗力当更精确。

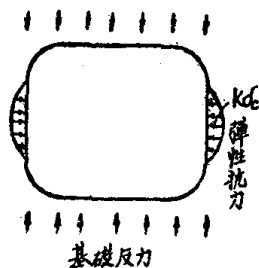


圖 4

砌砌承受垂直山石压力、自重及水重时, 計算的原理是相同的, 只是在这个情况下, 我們常假定彈性抗力僅發生在兩側, 而把它和基礎反力分开來(当然也可以將基礎反力視為彈性抗力中的一部分)。假定兩側岩石彈性抗力的分布形式, 選擇几个控制点(如圖 4 中的 $k\delta_c$), 利用变形条件求出这些点子上的

抗力來解决問題。

更合理的做法，是在襯砌外面裝設許多虛擬的支杆，各接合在彈性地基上，以代表基岩抗力（圖 5）。

后根据各种荷載和形变相容条件，來決定支杆中的反力，亦即代表該处範圍內的岩石抗力总值。这种做法，虽然更合理些，但計算工作更形复雜。总之，在渐变段計算中考慮岩石彈性抗力的影响尚多困难。

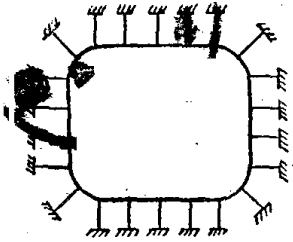


圖 5

关于進口段的形式，平面上多做成喇叭形，在断面上，則为單孔或多孔的框架，其頂部或为圓拱形或为平頂，底部或有底板，或无底板，形式頗多。这种進口段断面的計算，如不計岩石彈性抗力影响，則一如普通剛構之分析，如計及岩石彈性抗力影响，則略較复雜，本書將在第五、六章中詳細論述。

方框形的地下結構，在水工建筑物中也应用頗廣。例如用在地下厂房的尾水管襯砌，地下厂房底層襯砌或進水口閘門井或其他地下廊道中，圖 6 中示几种常見的形式。这种結構的計算，一般應該考慮基岩的彈性抗力，否則會得出过分安全的結果，本書將在第七章中討論。

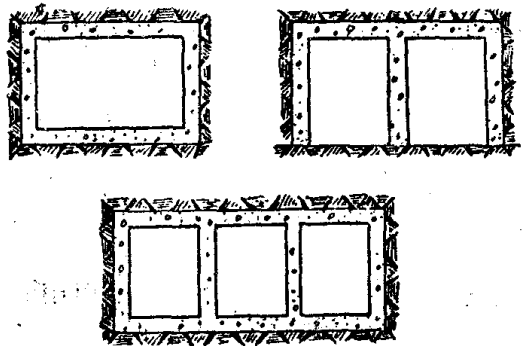


圖 6

在本書中，当需要考慮基岩的彈性抗力时，我

們皆采用文克尔假定，即假定任何一点处的基岩彈性抗力正比于該点的变位。这假定虽不完全符合实际情况，但目前我們尚未找到更为合理和可供实用的方法。在計算中，經常要用到彈性地基上直梁的形常数及載常数的公式及理論。为了便于查閱，并節省本書的篇幅，茲將著者的一篇有关論文摘錄附刊在本書之末，而在各章的敘述中，对这方面的理論就不复詳細介紹。

第二章 在主动侧压力和均匀内水压力作用下标准渐变段襯砌的计算

2-1 侧压力下的计算公式

主动侧压力作用于襯砌两侧,因通常襯砌高度不大,故可视为均匀计算,令其强度为 q_s ,由圖 7 可見,結構及荷載沿縱橫两軸都为对称。將結構在頂部切开,由于对称关系,剪力 $Q_0=0$,只有 M_0 及 N_0 为未知。但 N_0 可由靜平衡条件得出,即

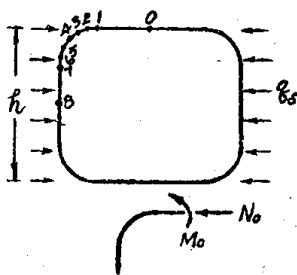


圖 7

$$N_0 = q_s \cdot \frac{h}{2} = q_s(r+b) \quad (2)$$

故只余下 M_0 为未知值。这可以用似柱法或最少功法求之,其公式为

$$M_0 = -\frac{q_s}{1.571r+a+b} \times [0.3927r^3 + b(1.071r^2 + rb + 0.3333b^2)] \quad (3)$$

求出 M_0 及 N_0 后,任何截面的內力可由靜力求之,其公式如下:

① 此式即 Н. Л. Бурдэгла 所著“水工管道和隧洞的新型結構”一書中的公式(20);該書中公式有誤(即 b^2 前的系数誤为 0.166)。

表 1

截 面		M	N	附 注
直綫段	0	M_0	$N_0 = q_\delta(r+b)$	在水平直綫段 0~1 中
	1 (0°)	M_0	N_0	$M = M_0$, $N = N_0$ 在垂直直綫段 7~8 中
弧 綫	2 (15°)	$M_0 + 0.034 q_\delta r(r+b) - 0.00058 q_\delta r^2$	$0.966 N_0 - 0.033 q_\delta r$	$M = M_0 + H_0 r - \frac{q_\delta r^2}{2} + q_\delta b h - \frac{q_\delta h^2}{2}$
	3 (30°)	$M_0 + 0.134 q_\delta r(r+b) - 0.009 q_\delta r^2$	$0.866 N_0 - 0.116 q_\delta r$	$N = 0$
	4 (45°)	$M_0 + 0.293 q_\delta r(r+b) - 0.043 q_\delta r^2$	$0.707 N_0 - 0.207 q_\delta r$	其中 h 为該点离 开点 7 之距离
	5 (60°)	$M_0 + 0.500 q_\delta r(r+b) - 0.125 q_\delta r^2$	$0.500 N_0 - 0.250 q_\delta r$	
直綫段	6 (75°)	$M_0 + 0.741 q_\delta r(r+b) - 0.275 q_\delta r^2$	$0.259 N_0 - 0.192 q_\delta r$	
	7 (90°)	$M_0 + q_\delta r(r+b) - 0.500 q_\delta r^2$	0	
直綫段	8	$M_0 + 0.500 q_\delta (r+b)^2$	0	

2-2 內水压力下的計算公式

当襯砌承受內水压力作用时,亦为对称問題,在渐变段襯砌頂部切开后,只有两个未知力 N_0 和 M_0 ,前者可用靜平衡条件求之,后者可用最少功法求之:

$$N_0 = -p(r+b) \quad (4)$$

$$M_0 = -p$$

$$\times \frac{\frac{1}{6} a^3 + ar^2 + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) br^2 + \frac{\pi}{4} a^2 r - b^2 r + 0.5a^2 b + abr - \frac{b^3}{3}}{a + b + \frac{\pi}{2} r} \quad (5)$$

求出 N_0 及 M_0 后,其余各点上之应力可用下表計算:

表 2

断 面		M	N	附 注
直线段	0	M_0	N_0	在水平直线段 0~1 中
	1 (0°)	$M_0 + 0.50 pa^2$	N_0	$M = M_0 + 0.5 px^2$, $N = N_0$
弧 线 段	2 (15°)	$M_0 + pa(0.259r + 0.5a) - .034 pbr$	$-p(r + 0.259a + .966b)$	x 为該点离拱頂 平距
	3 (30°)	$M_0 + 0.50 pa(r + a) - .134 pbr$	$-p(r + 0.50a + .866b)$	在垂直直线段 7~8 中
	4 (45°)	$M_0 + pa(0.707r + 0.5a) - .293 pbr$	$-p(r + 0.707a + .707b)$	$M = M_0 + par$ $+ .5 pa^2 - pbr -$ $- pbh + .5 ph^2$
	5 (60°)	$M_0 + pa(0.866r + 0.5a) - .5 pbr$	$-p(r + 0.866a + .5b)$	$N = -p(r + a)$
	6 (75°)	$M_0 + pa(0.966r + 0.5a) - .741 pbr$	$-p(r + 0.966a + .259b)$	h 为該点离点 7 垂距
	7 (90°)	$M_0 + pa(r + 0.5a) - pbr$	$-p(r + a)$	
直线段	8	$M_0 + .5 pa^2 + p(a - b)r - .5 pb^2$	$-p(r + a)$	

以上的推導,都假定(1)軸向力和剪力对变形的影响很微小,可以忽略。(2)襯砌断面很薄,可以視作一根細杆处理。实际上,內水压力是作用在內面的,要近似考慮杆件厚度影响,可將压力 p 乘以 $\frac{S_e}{S_{cp}}$ (S_e 为內周長, S_{cp} 为平均周長),而公式中的各 r 值均用平均半徑。外水压力或灌漿压力的計算公式同內水压力,只須反一个符号,同时压力强度 p 应乘以 $\frac{S_u}{S_{cp}}$ (S_u 为外周長)。

在各种荷載中,內水压力常为最主要的一种荷載,它所引起的断面力矩常占較大的比重。在下面,我們給出一張系数表,应用这些系数,各控制断面上的力矩可以迅速求得。茲將查表的步驟說明于次:

(1) 計算參变数 $k_1 = \frac{r}{r+b}$ 及 $k_2 = \frac{r+a}{r+b}$ 。

(2) 根据 k_1 及 k_2 值,在表中查出 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 各系数。則在相应各点处的力矩 M 即为

$$M = R \cdot p(2r + 2b)^2 = R \cdot ph^2 \quad (6)$$

式中 h 为渐变段全高。

(3) 表中的 R_1 , 相应于水平直线段的对称点(即表 2 中的断面 0), R_2 相应于圆弧段的开始点(即表 2 中的断面 1), R_3 相应于圆弧段的终点(即表 2 中的断面 7), R_4 相应于垂直直线段的中点(即表 2 中的断面 8), R_0 是圆弧段中的最大力矩系数, 而表中最后一行 θ 则代表发生这最大力矩的点的角坐标。

表 3 标准渐变段力矩系数表

(承受均匀内水压力 p)

力矩 $M = \text{表中系数} \times ph^2$

$k_1 = \frac{r}{r+b}$	$k_2 = \frac{r+a}{r+b}$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_0	θ
0	0	+0.0833	+0.0833	+0.0833	-0.0417	+0.0833	90°
	0.2	+0.0650	+0.0700	+0.0700	-0.0550	+0.0700	78.5°
	0.4	+0.0433	+0.0633	+0.0633	-0.0617	+0.0633	68°
	0.6	+0.0183	+0.0633	+0.0633	-0.0617	+0.0633	59°
	0.8	-0.0100	+0.0700	+0.0700	-0.0550	+0.0700	51.5°
	1.0	-0.0417	+0.0833	+0.0833	-0.0417	+0.0833	45°
0.2	0.2	+0.0711	+0.0711	+0.0311	-0.0489	+0.0711	90°
	0.4	+0.0482	+0.0532	+0.0232	-0.0568	+0.0544	76°
	0.6	+0.0227	+0.0427	+0.0227	-0.0573	+0.0474	63.5°
	0.8	-0.0057	+0.0393	+0.0293	-0.0507	+0.0493	53°
	1.0	-0.0372	+0.0428	+0.0428	-0.0372	+0.0594	45°
0.4	0.4	+0.0551	+0.0551	-0.0049	-0.0499	+0.0551	90°
	0.6	+0.0289	+0.0339	-0.0061	-0.0511	+0.0371	71.5°
	0.8	+0.0005	+0.0203	+0.0005	-0.0447	+0.0323	56.5°
	1.0	-0.0309	+0.0141	+0.0141	-0.0310	+0.0389	45°
0.6	0.6	+0.0371	+0.0371	-0.0239	-0.0429	+0.0371	90°
	0.8	+0.0083	+0.0133	-0.0167	-0.0367	+0.0203	63.5°
	1.0	-0.0228	-0.0028	-0.0028	-0.0228	+0.0220	45°
0.8	0.8	+0.0185	+0.0185	-0.0215	-0.0265	+0.0185	90°
	1.0	-0.0125	-0.0075	-0.0076	-0.0125	+0.0091	45°
1.0	1.0	0	0	0	0	0	/

第三章 在垂直山石压力、自重和水重下标准渐变段襯砌的計算

3-1 計算原理

在垂直山石压力、自重和水重作用下，我們不考慮岩石彈性抗力的問題，而假定在底板上存在一定的反力，以与荷載維持平衡。

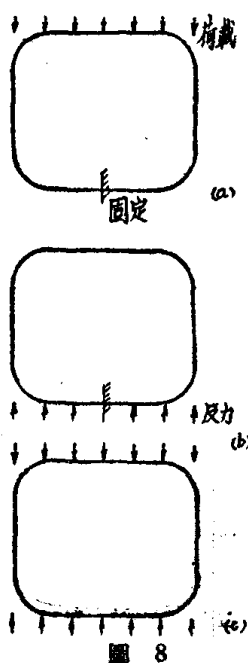


圖 8

計算这种襯砌，原無困难，但襯砌所受荷載种类較多，反力分布的假定也各不相同，如果要進行多种情况的組合計算，亦頗复雜。为了簡化組合工作，并为了便于推導公式以供应用，我們采用 H. Л. 布尔德茲格拉氏建議的方法，即將襯砌在底部固定，計算其在各种荷載下的应力(圖 8a)。然后根据荷載合力，求出相应的基礎反力，再將反力作用在底部固定的襯砌上，計算其应力(圖 8b)。將两种情况相加，若荷載与反力平衡，則底部的虛支座就不起作用，而可得出最后的結果來。这种計算方式，对要研究多种荷載組后下的应力时較为有利。

要計算圖 8(a) 的結構，我們采用一般的方式，先將襯砌頂部切开，化为靜定，再用剛臂接到它的彈心，而求在彈心处的 H_0 及 M_0 。(其正的方向如圖 9(a) 所示)。以下我們只討論对称的情况，故 $V_0 = 0$ 。求出 H_0 及 M_0 后，拱頂的应力为

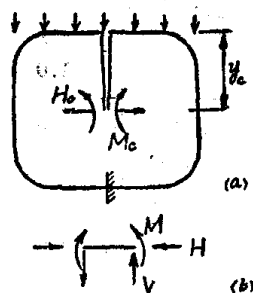


圖 9

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= M_c - H_c y_c = M_c - H_c(b+r) \text{ (參見圖 1)} \\ H_0 &= H_c \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在任一斷面上的應力為

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + H_0 \cdot y' - M_p \\ N &= H_0 \cos \varphi + N_p \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 y' 為各點離拱頂垂距(無正負), φ 為該斷面與垂直面交角。 M_p 及 N_p 為外荷載所引起的該截面的靜定力矩和軸向力(左半圈上, M_p 以 $\searrow$ 為正, N_p 以壓力為正), 各點應力的正負按照圖 9(b) 的規定。

彈心處的內力可用下式計算:

$$\left. \begin{aligned} M_c &= \frac{\int \frac{M_p ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}} \\ H_c &= \frac{\int \frac{M_p y ds}{EI}}{\int \frac{y^2 ds}{EI}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 y 為以彈心為原點的各點縱坐標, 以向下量取為正。

對於圖 1 所示的標準形式的漸變段, $\int \frac{ds}{EI}$ 及 $\int y^2 \frac{ds}{EI}$ 可求得為

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{EI} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{2a} dx + r \int_0^\pi d\varphi + \int_0^{2b} dy \right] \\ &= \frac{1}{EI} [\pi r + 2(a+b)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2 ds}{EI} &= \frac{1}{EI} \left[2 \int_0^a (r+b)^2 dx + 2r \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi + b)^2 d\varphi \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^b y^2 dy \right] = \frac{1}{2EI} [\pi r^3 + 8r^2 b + 4a(r+b)^2 + 2\pi r b^2 \\ &\quad + 1.333 b^3] \end{aligned} \quad (11)$$

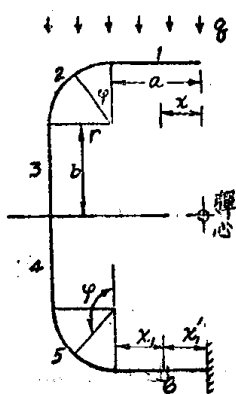


圖 10

以上的計算是以一半断面為準的。在各種荷載下的 $\int \frac{M_p ds}{EI}$, $\int \frac{M_p y ds}{EI}$, 和 M_p , N_p 等的計算可分別推導于次:

3-2 均布垂直壓力下的荷載項

令壓力強度為 q 。又將襯砌分為 1, 2, 3, 4, 5, 6 六段 (1, 3, 4, 6 為直綫段, 2, 5 為弧形段), 各段的靜定力矩和壓力是

$$M_{p1} = \frac{qx^2}{2} \quad (\text{以下簡寫為 } M_1 \text{ 等}) \quad (12)$$

$$N_{p1} = 0 \quad (\text{以下簡寫為 } N_1 \text{ 等}) \quad (13)$$

$$M_2 = \frac{q}{2} (r \sin \varphi + a)^2 \quad (14)$$

$$N_2 = q(r \sin \varphi + a) \sin \varphi \quad (15)$$

$$M_3 = \frac{q}{2} (r + a)^2 = M_4 \quad (16)$$

$$N_3 = q(r + a) = N_4 \quad (17)$$

$$M_5 = -q \frac{r+a}{2} [r(1 - 2 \sin \varphi) - a] \quad (18)$$

$$N_5 = q(r + a) \sin \varphi \quad (19)$$

$$M_6 = -q \frac{(r+a)}{2} (r + 2x_1 - a) \quad (20)$$

$$N_6 = 0 \quad (21)$$

代入求 $\int \frac{M ds}{EI}$, $\int \frac{M y ds}{EI}$ 等; 得

$$\begin{aligned} \int \frac{M ds}{EI} &= \frac{q}{2EI} [r^2(1.216r + 3a + 2b) + ra(2.14a + 4b) \\ &\quad + a^2(0.333a + 2b)] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int \frac{My ds}{EI} = -\frac{q}{2EI} [r^3(0.333r + 0.356b) + r^2a(a+b) + ra(r^2 + ab) + 0.333a^3(r+b)] \quad (23)$$

3-3 觀測自重下的荷載項

自重下的靜定系統是

$$M_1 = \frac{gx^2}{2} \quad (g \text{ 表示單位長之觀測自重}) \quad (24)$$

$$N_1 = 0 \quad (25)$$

$$M_2 = ga \left(r \sin \varphi + \frac{a}{2} \right) + gr^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) \quad (26)$$

$$N_2 = g(a + r\varphi) \sin \varphi \quad (27)$$

$$M_{3,4} = ga \left(r + \frac{a}{2} \right) + 0.571 gr^2 \quad (28)$$

$$N_{3,4} = g(1.57r + a + y) \quad (29)$$

$$M_5 = ga \left(r \sin \varphi + \frac{a}{2} \right) + gr^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - 2grb(1 - \sin \varphi) \quad (30)$$

$$N_5 = g(a + r\varphi + 2b) \sin \varphi \quad (31)$$

$$M_6 = ga \left(\frac{a}{2} - x_1 \right) - \pi r g \left(\frac{2r}{\pi} + x_1 \right) - 2gb(r + x_1) - \frac{gx_1^2}{2} \quad (32)$$

$$N_6 = 0 \quad (33)$$

積分後,求得

$$\int \frac{M ds}{EI} = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{My ds}{EI} = & -\frac{g}{EI} [(0.785r + 2a + 1.86b)r^3 + \\ & + r^2a(1.57a + 4b) + rab(2.57a + 2b) + \\ & + b^3(1.14r^2 + a^2) + 0.333a^3(r+b)] \end{aligned} \quad (35)$$