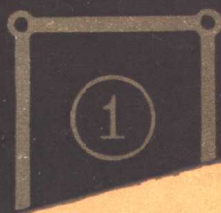
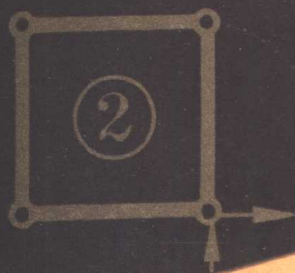
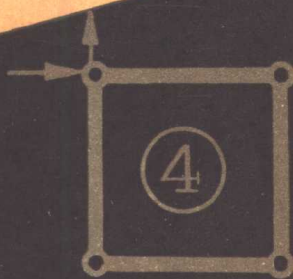


工程计算结构力学丛书



GONGCHENG JISUAN JIEGOU LIXUE CONGSHU



张允真 编

简明有限元法

辽宁科学技术出版社

工程计算结构力学丛书

简 明 有 限 元 法

张允真 编

辽宁科学技术出版社

一九八四年·沈阳

工程计算结构力学丛书

简明有限元法

Jianming Youxian Yuanfa

张允真 编

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行 沈阳新华印刷厂印刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: $10 \frac{3}{4}$ 字数: 240,000

1984年9月第1版 1984年9月第1次印刷

责任编辑: 李殿华 绘 图: 凡恩开

封面设计: 赵多良 责任校对: 王 莉

印数: 1—3,100

统一书号: 15288·84 定价: 1.45元

内 容 简 介

全书共分十章，内容包括三部分。一是基本部分，重点介绍了弹性平面问题有限元法的单元分析和整体分析以及轴对称问题，空间问题；二是工程力学部分，分别介绍了板壳的有限元法；三是专题部分，论述了结构的动力分析和稳定分析的有限元法。

本书可供工程技术人员学习参考，也可作高等院校工科专业的教学参考书或教材。

前 言

计算结构力学是一门新兴的力学分支，是力学理论和近代数字电子计算机上的计算方法相结合的产物。它的产生和发展，对于分析工程中复杂的结构问题发挥了巨大作用。

目前，广大科技人员迫切需要学习和掌握有关电算、力学的基本理论以及解决力学问题的新方法——有限元法等知识，许多工科院校已经开设了与此有关的课程，许多工厂、设计研究院也相继举办了短训班学习这方面的内容。为了适应这种新的需要，满足读者学习计算结构力学的要求，我们编写了这套工程计算结构力学丛书（简称丛书），包括：《工程力学中的计算方法》、《杆系结构矩阵分析》、《简明有限元法》、《简明弹性力学》、《有限元法的程序设计》等。

这套丛书，从数学的计算方法、力学的基本理论到具体计算的程序设计，都作了全盘考虑，力求作到前后呼应，相互联系，同时，又注意保持各册的独立性，以便单册阅读。叙述上力求简洁、清楚，并附有相当数量的例题。

这套丛书，可作广大工程技术人员的自学参考书，也可作高等院校工科专业和短训班学习计算结构力学的成套教学参考书或教材。

有限元法是一门新的力学学科，是力学与近代计算技术相结合的产物。有限元法的发展、普及和提高是势在必行

的，是衡量工程技术水平高低的一个重要标志。

有限元法是建立在力学特别是杆系结构力学和弹性力学的基础上的。实践证明，有限元法具有很大的实用价值，在结构分析中的应用范围是十分广泛的；同时，它已成为探讨各计算力学分支的基础。

本书共分十章，分别介绍和论述了弹性平面问题有限元法的单元分析和整体分析，轴对称问题，空间问题；板壳的有限元法；结构的动力和稳定问题的有限元法等。

邬瑞锋副教授看过全部书稿，并提出了宝贵意见，余家璞副教授对本书的编写也做了有益的工作，凡恩开同志描绘了全部插图。编者谨对他们表示衷心的感谢。

限于水平，书中不当之处甚至错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

一九八三年三月

目 录

第一章 绪 论

第一节	引言	1
第二节	离散化和计算简图	3
第三节	单元分析	6
第四节	整体分析	9

第二章 弹性平面问题的单元分析

第一节	三角形单元	13
第二节	单元刚度矩阵及其性质	23
第三节	等效节点荷载	29
第四节	矩形单元	35
第五节	六节点三角形单元	47
第六节	解答的收敛性	57
第七节	平面等参单元	61

第三章 弹性平面问题的整体分析

第一节	节点的平衡方程	74
第二节	结构的代数方程组	79

第三节	总刚度矩阵的形成	84
第四节	方程组右端项的形成	88
第五节	支承条件的引进	90
第六节	对称分析	98
第七节	网格和计算结果	107
第八节	实例	111

第四章 一些实际问题

第一节	变厚度问题和不同材料问题	117
第二节	设置加强筋的问题	121
第三节	温度应力问题	126
第四节	装配应力问题	131
第五节	接触问题	140
第六节	杆系结构有限元法	145

第五章 轴对称问题

第一节	计算模型	159
第二节	单元的应变和应力	160
第三节	单元刚度矩阵和等效节点荷载	164
第四节	单元分析的精确计算	169
第五节	非轴对称荷载问题	173

第六章 空间问题

第一节	四面体单元的计算模型	182
第二节	四面体单元位移函数	183

第三节	四面体单元节点荷载	186
第四节	四面体单元刚度矩阵	189
第五节	三维弹性体的离散化	192
第六节	二次四面体单元	194
第七节	长方体单元	198
第八节	计算实例	204

第七章 平板弯曲问题

第一节	引言	207
第二节	矩形薄板单元的位移法	208
第三节	矩形薄板单元的混合法	223
第四节	三角形薄板单元的位移法	239
第五节	三角形薄板单元的混合法	246
第六节	考虑横向剪切变形影响的单元	253

第八章 壳体弯曲问题

第一节	概述	257
第二节	平面壳体单元——矩形单元	258
第三节	平面壳体单元——三角形单元	263
第四节	轴对称壳体单元	266

第九章 结构的动力分析

第一节	结构的动力方程	272
第二节	质量矩阵和阻尼矩阵	277
第三节	结构的自由振动和特征值问题	282

第四节	特征值问题的计算方法	285
第五节	例题	294
第六节	减少分析的自由度数	297

第十章 结构的弹性稳定性

第一节	线性弹性稳定性问题	300
第二节	压杆的稳定性分析	301
第三节	压杆稳定性分析的例题	307
第四节	刚架的稳定性分析及例题	312
第五节	板的稳定性分析	321
第六节	矩形板单元的算例	327

第一章 绪 论

第一节 引 言

在杆系结构矩阵分析中，通常把杆件称为单元。其结构矩阵分析的要点是：

①把整体结构拆成若干个单元（单元一般是取自相邻两个节点之间的梁、柱或二力杆件），这一步骤称为离散化过程。之后，单独地分析一个或几个具有代表性的单元，称为单元分析；②在单元分析的基础上，在节点处根据力学的基本原理，利用平衡条件和连续条件把各单元拼装成整体结构，这一步骤称为拼装过程。对整体结构在外力作用下和一定的支承条件下进行力学分析，称为整体分析。因此，结构矩阵分析方法分为两个主要阶段：单元分析阶段和整体分析阶段，而拼装和离散化是矩阵分析的两个重要手段。

弹性力学中的有限元法是杆系结构矩阵分析方法 的推广。它模仿结构矩阵分析，首先剖分弹性体而实现离散化（当然是人为的离散和剖分），对单元进行分析；然后，拼装成整体结构，作整体分析。

有限元法与弹性力学解析法不同。解析法从研究连续体的微元体着手，在分析中取无限多个微元体，而令它的体积接近零，通过几何和力学分析得到描述弹性体性质的偏微分方程。在一定的条件下，用严格的数学方法解该微分方程，所得到的是解析解，它是一组数学表达式，能够给出弹性体内

任何一点的位移、应力和应变。然而，物体的几何形状、材料性质和作用荷载是各式各样的，是极其复杂的。基于这一原因，能够得到解析解的问题实在是太少了，对于绝大多数的实际工程问题，解析法是无能为力的。

有限元法从研究有限大小的单元体着手，在分析中取有限多个单元体，其体积为有限大小，通过分析得到一组代数方程。在一定的条件下解该代数方程组，首先得到某些点的位移，之后由位移求得应力和应变。有限元法是一种数值解法，所得到的是近似解。当然，相对于在解析法中解偏微分方程，在有限元法中解代数方程组是容易得多，并且总是可以得到解答的。

有限元法按照所选用的基本未知量和分析方法的不同，可以分为三种基本解法。

(1) 位移法。此法取节点的位移分量为基本的未知量，在节点上建立平衡方程。这是一种计算规律强的算法，便于编写计算机通用程序。

(2) 力法。此法取力的分量为基本未知量，在节点上建立位移连续方程。一般的讲，用力法求得的内力、应力，比用位移法求得的精度高。

(3) 混合法。此法取混合型的基本未知量，一部分是节点位移分量，另一部分是力的分量，在节点上既建立有关的平衡方程又建立有关的连续方程。

本书主要介绍有限元位移法，简称有限元法。

应用有限元法，确实使许多过去望而生畏的力学难题得到迅速而又可靠的解答。例如，图 1—1(a) 是一跨大型空腹桁架钢桥的计算简图（全桥由九跨相同的简支空腹桁架组成，图示为一跨，是大连新港油码头的大型输油栈桥），若

利用经典的力学计算方法和古老的计算工具对它进行空间的静力、动力计算和对节点（图 1—1b）、端部（图1—1c）进行局部应力分布计算，都完全是不可能的，而利用有限元法进行计算却获得了很好的效益。

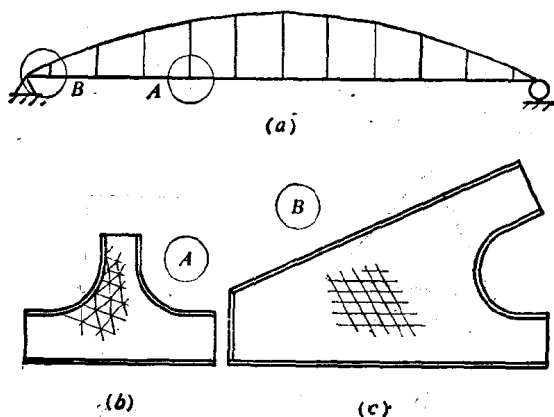


图 1—1

第二节 离散化和计算简图

杆系结构是由若干根杆件组成，因而可把每一根杆件视为离散化以后的单元。桁架单元是二力杆件，框架单元是梁和柱。

弹性力学中的有限元法与杆系结构矩阵分析法的解题思路、方法是一致的。在弹性体中需要人为地把弹性体划分成有限个单元，或者说把它离散成为一个离散的结构物，该结构物由有限个有限大小的构件在有限个节点上相互连接组成。有限大小的构件称为有限单元，简称单元。

在弹性平面问题中，最简单最常用的单元是三角形单元，其次是矩形单元、六节点三角形单元、任意四边形等参

单元等（图 1—2）。

在弯曲板的问题中，常用的单元是矩形单元、三角形单元等。

在弹性空间问题中，可以采用四面体单元、三棱体单元、六面体单元等（图 1—3）。

弹性力学中有限元法的计算简图是由若干个单元组成的一种替代结构物。例如，图 1—4(a)是弹性平面问题的一个计算简图；图 1—4(b)是弯曲板问题的计算简图。

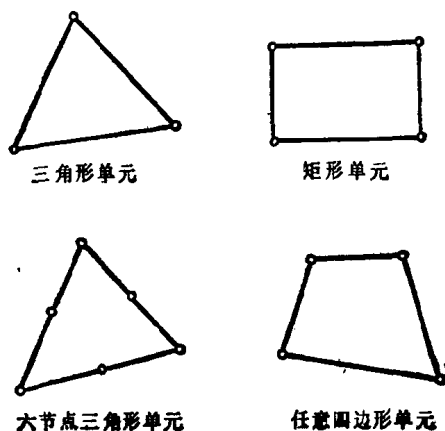


图 1—2

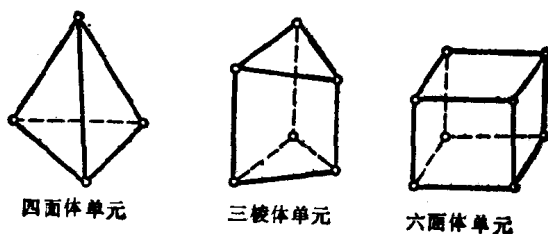


图 1—3

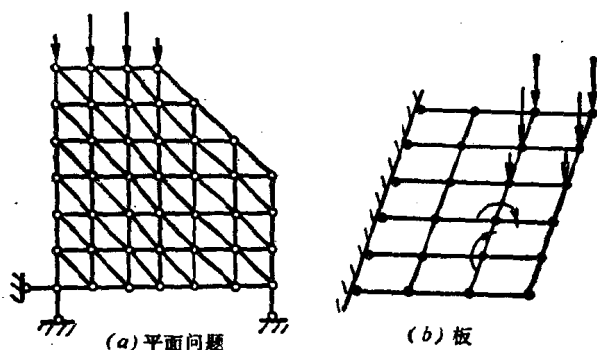


图 1—4

在有限元法中，把剖分成许多单元的分割线（面）称为网格。网格越密，替代结构物就越接近于原结构物。有时称密网格为细网格，称稀网格为粗网格。

用节点连接相邻单元，节点是网格线的诸汇交点。在桁架结构、弹性平面问题和空间问题中，所有的节点都是铰节点，它只起传递力分量的作用。在有限元法中，以节点位移分量为待定参数。如果相邻单元之间有横力和力矩作用，则要求连接这些单元的节点还能起传递横力和力矩的作用，因此必须把该节点理解为刚性节点。例如，在刚架和弯曲板的问题中，其节点通常是刚性的。

与有限元法计算简图相对应的支承是支承链杆和刚臂，其中限制铰节点的位移分量利用固定支承链杆，限制刚性节点的转动利用刚臂。当然，如果把整个计算区域当作一个盘体，则必须要求此盘体与外界的连接是几何不变的。例如，在弹性平面问题中至少要有三根延长线既不平行又不汇交于一点的支承链杆。

对于离散化以后的计算简图，可模仿结构矩阵分析法在

节点上建立平衡方程。因此，必须把作用在原结构上的荷载转化成作用在节点上的节点荷载，以适应在节点上建立平衡方程的需要。节点荷载有时是节点力荷载，有时又是节点力荷载和节点力矩荷载，统称节点荷载。

于是，有限元法计算简图的网格是由 M 个单元和 N 个节点组成的，而支承链杆和刚臂设置在某些节点上，其作用荷载是节点荷载，例如图1—4所示。

第三节 单元分析

弹性力学问题的解析法，是通过研究连续体的微元体或微线段来建立联系应变与位移的方程、联系应力与体积力的平衡方程和表示应变与应力关系的方程。有限元位移法，通过研究有限大小的单元（即为单元分析）来建立联系应变与节点位移分量的方程、联系应力与节点位移分量的方程，同时研究单元的节点力与节点位移之间的关系以及把作用在单元中间的外荷载转化成为节点荷载。

在本书中，把节点对单元的作用力定义为节点力，而把作用在单元中间的外荷载（包括温度荷载、惯性荷载等）利用静力等效原则转化成为作用在节点上的荷载，即为节点荷载。因此，节点力与节点荷载的含意有着明显的区分，对整体结构而言，前者为内力而后者为外力（荷载）。

必须强调指出，在单元分析中认为节点位移分量是“给定”的参数，而单元的位移场是假定的函数。当然，所假定的单元位移场在节点上的位移分量应该与该单元的节点位移参数完全一致。评价所假定的单元位移场是好是坏，是用有限元法计算所取得的精度作标准，如果所假定的单元位移场与真实的位移场相接近，一般会得到精度较高的计算结果。

单元分析是建立在所假定的单元位移函数的基础上的。众所周知，如果在单元中间没有外荷载作用，则等直二力杆件单元的位移函数是沿杆的轴向坐标的线性函数，而等直梁单元的位移函数是沿轴向坐标的三次函数。

例题 对二力杆件单元进行单元分析。

(1) 单元位移函数。假定单元位移函数是

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (1-1)$$

在单元的节点 i 、 j 上 (图 1—5)，式 (1—1) 应当分别取得给定的节点位移参数 u_i 、 u_j ，即应该有

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 l \quad (2)$$

由式 (2) 解得

$$\alpha_1 = u_i, \quad \alpha_2 = \frac{1}{l} (u_j - u_i) \quad (b)$$

于是，单元位移函数为

$$u = u_i + \frac{1}{l} (u_j - u_i) x \quad (c)$$

或

$$u = \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_i + \frac{x}{l} u_j \quad (1-2)$$

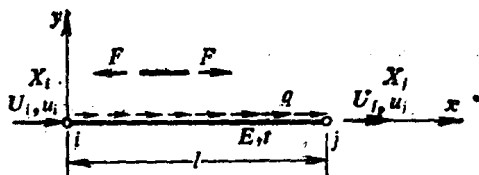


图 1—5

(2) 应变与节点位移的关系式。利用式 (c)，求导数