

大学数学的内容、方法与技巧丛书

数学分析

内容、方法与技巧（上）

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社

大学数学的内容、方法与技巧丛书

数 学 分 析

内容、方法与技巧

(上)

孙清华 孙 昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 内容、方法与技巧(上)/孙清华 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2003年7月
ISBN 7-5609-2953-2

I. 数…

II. ①孙… ②孙…

III. 数学分析-高等学校-教学参考资料

IV. O17

数学分析 内容、方法与技巧(上)

孙清华 孙 昊

责任编辑:徐正达 李立鹏

封面设计:刘 卉

责任校对:张兴田

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.625

字数:377 000

版次:2003年7月第1版 印次:2003年12月第2次印刷

定价:19.00元

ISBN 7-5609-2953-2/O·282

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的辅导书,分上、下两册,编写顺序与一般的数学分析教材同步,本册内容包括实数与数列极限,函数、极限与连续性,导数与微分,微分中值定理与利用导数研究函数,不定积分,定积分及其应用等,在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念,演绎技巧,举证方法,通过学习它,读者可以循序渐进地融会知识,理解概念,熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

前 言

数学分析是高等学校数学专业的主要基础课程. 对初学者来说, 数学分析课程的概念难懂, 方法抽象, 解题难以入手, 思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析, 解决学习中的困难, 指导学习的方法, 提高学习的效率, 我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进, 扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧, 我们采用与教材同步、以章节为序的方法, 对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳, 在提升知识、解析疑难的基础上, 用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法, 使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结, 从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法, 将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识, 更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样, 以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后, 自己做一些归纳提高、整理加工的工作, 以增强自己的实践能力.

数学分析的题目浩如烟海, 编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的, 因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证, 这是数学分析的理论基础, 但也用了相当篇幅来叙述计算方法, 希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮

助,在此向他们表示衷心的感谢.在本书写作中,曾参阅了一些作者关于数学分析问题的著作,本人借此向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处望同行和读者热心指正.

孙清华 孙 昊

2003 年 1 月

目 录

第一章 实数与数列极限	(1)
第一节 实数的表示与实数系的连续性	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(2)
方法、技巧与典型例题分析	(4)
一、最大数与最小数	(4)
二、上、下确界的命题	(5)
第二节 实数的四则运算与实数系的基本性质	(10)
主要内容	(10)
第三节 不等式	(11)
主要内容	(11)
方法、技巧与典型例题分析	(12)
第四节 数列极限与收敛数列的性质	(21)
主要内容	(21)
疑难解析	(22)
方法、技巧与典型例题分析	(23)
一、关于数列极限的概念	(23)
二、数列极限的求解	(29)
三、数列极限的证明	(35)
四、应用斯笃兹定理求数列极限	(38)
五、用其它方法求数列极限	(41)
第五节 数列极限存在的条件	(43)
主要内容	(43)
疑难解析	(44)
方法、技巧与典型例题分析	(45)
第六节 数列的上、下极限	(57)
主要内容	(57)

方法、技巧与典型例题分析	(58)
第二章 函数、极限与连续性	(63)
第一节 映射与函数	(63)
主要内容	(63)
疑难解析	(65)
方法、技巧与典型例题分析	(66)
第二节 函数的极限	(79)
主要内容	(79)
疑难解析	(82)
方法、技巧与典型例题分析	(82)
第三节 两个重要极限 无穷小量与无穷大量	(92)
主要内容	(92)
疑难解析	(93)
方法、技巧与典型例题分析	(94)
一、两个重要极限	(95)
二、无穷小量与无穷大量	(101)
第四节 连续函数	(109)
主要内容	(109)
疑难解析	(111)
方法、技巧与典型例题分析	(112)
一、连续函数概念的命题	(112)
二、闭区间上的连续函数	(119)
三、一致连续性问题	(125)
第三章 导数与微分	(131)
第一节 导数概念与求导法则	(131)
主要内容	(131)
疑难解析	(132)
方法、技巧与典型例题分析	(134)
一、导数概念的命题	(134)
二、求导法则的运用	(139)
第二节 隐函数与参数方程确定函数的导数	(151)

主要内容	(151)
疑难解析	(152)
方法、技巧与典型例题分析	(153)
一、隐函数的导数	(153)
二、参数方程确定函数的导数	(156)
第三节 微分与高阶导数	(161)
主要内容	(161)
疑难解析	(162)
方法、技巧与典型例题分析	(163)
一、微分问题	(163)
二、高阶导数与高阶微分问题	(167)
第四章 微分中值定理与利用导数研究函数	(177)
第一节 微分中值定理	(177)
主要内容	(177)
疑难解析	(178)
方法、技巧与典型例题分析	(179)
一、罗尔定理的应用	(179)
二、拉格朗日中值定理的应用	(188)
三、柯西中值定理的应用	(198)
第二节 洛必达法则	(205)
主要内容	(205)
疑难解析	(207)
方法、技巧与典型例题分析	(208)
第三节 泰勒公式	(219)
主要内容	(219)
疑难解析	(221)
方法、技巧与典型例题分析	(222)
一、利用泰勒公式计算极限	(222)
二、函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式	(226)
三、证明不等式或等式及其它	(228)
第四节 函数的单调性与极值	(238)
主要内容	(238)

疑难解析	(239)
方法、技巧与典型例题分析	(241)
一、函数的单调性问题	(241)
二、函数的极值与最值问题	(250)
第五节 函数的凸性与拐点	(255)
主要内容	(255)
疑难解析	(256)
方法、技巧与典型例题分析	(257)
第五章 不定积分	(266)
第一节 不定积分的概念与基本公式	(266)
主要内容	(266)
疑难解析	(267)
方法、技巧与典型例题分析	(268)
一、不定积分的基本概念	(268)
二、用基本公式与性质计算不定积分	(272)
第二节 换元积分法与分部积分法	(276)
主要内容	(276)
疑难解析	(277)
方法、技巧与典型例题分析	(279)
一、换元积分法的应用	(279)
二、分部积分法的应用	(298)
第三节 有理函数与无理函数的不定积分	(313)
主要内容	(313)
疑难解析	(316)
方法、技巧与典型例题分析	(317)
一、有理函数的不定积分	(317)
二、三角函数有理式的不定积分	(324)
三、无理函数的不定积分	(330)
第六章 定积分及其应用	(338)
第一节 定积分概念与可积分条件	(338)
主要内容	(338)

疑难解析	(341)
方法、技巧与典型例题分析	(342)
一、定积分的概念	(342)
二、函数的可积性	(346)
第二节 定积分的性质	(354)
主要内容	(354)
疑难解析	(355)
方法、技巧与典型例题分析	(357)
一、利用定积分求极限	(357)
二、定积分的估值与比较	(363)
三、求定积分的极限	(368)
四、关于定积分的等式和不等式的证明	(376)
五、利用定积分研究函数	(387)
第三节 变上限积分与定积分的计算	(392)
主要内容	(392)
疑难解析	(394)
方法、技巧与典型例题分析	(395)
一、变动上限积分函数	(396)
二、定积分的计算与证明	(408)
第四节 非正常积分(反常积分)	(435)
主要内容	(435)
疑难解析	(438)
方法、技巧与典型例题分析	(439)
一、非正常积分的计算	(439)
二、非正常积分敛散性的判别	(445)
三、非正常积分的其它问题	(459)
第五节 定积分的应用	(462)
主要内容	(462)
疑难解析	(466)
方法、技巧与典型例题分析	(467)
一、定积分在几何中的应用	(467)
二、定积分在物理中的应用	(483)

第一章 实数与数列极限

第一节 实数的表示与实数系的连续性

主要内容

一、实数的表示

1. 全体有理数与全体无理数所构成的集合称为实数集合, 记作

$$\mathbf{R} = \{x | x \text{ 是有理数或无理数} \}.$$

2. 任何一个实数都可用无尽小数表示. 其中任何有理数都可以表示为无尽循环小数(有尽小数视作后面有无尽个零的循环小数), 任何无理数都可以表示为无尽小数.

3. 实数分为非负实数与负实数. 任何非负实数大于任何负实数.

对任意两个实数 a 和 b , 必有且只有以下三种情形之一(称为三歧性):

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

4. 有尽小数在实数系中处处稠密.

设 a 和 b 是实数, $a < b$, 则存在有尽小数 c , 满足 $a < c < b$.

5. 实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 是非负实数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 是负实数.} \end{cases}$$

$-x$ 称为 x 的相反数, 零的相反数是零本身.

MAG94/12

二、实数系的连续性

1. 对于实数集中的任何的分割 (Dedekind) $A|A'$, 存在产生这个分割的实数 β , 这个数 β : 1) 或是下类 A 中的最大数; 2) 或是上类 A' 中的最小数.

此性质称为实数系的连续性, 或完备性、密接性.

2. 实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集, 简称为数集.

设 E 为一非空数集, 若 $\exists M \in \mathbf{R}$, 使 $\forall x \in E$, 有 $x \leq M$, 则称 M 为 E 的一个上界; 若 $\exists m \in \mathbf{R}$, 使 $\forall x \in E$, 有 $x \geq m$, 则称 m 为 E 的一个下界. 既有上界又有下界的数集 E , 称为有界集. 即

E 为有界集 $\Leftrightarrow \exists X > 0$, 使 $\forall x \in E$, 有 $|x| \leq X$.

E 的上界中的最小数, 称为数集 E 的上确界, 记作 $\sup E$; E 的下界中的最大数, 称为数集 E 的下确界, 记作 $\inf E$.

3. 确界存在定理 —— 实数系连续性定理 非空有上界的数集必有上确界, 非空有下界的数集必有下确界.

4. 非空有界数集的上(下)确界是惟一的.

疑 难 解 析

1. 数集的最大数与最小数同数集的上确界与下确界有什么关系?

答 设 E 为一数集, 如果 $\exists \beta \in E$, 使 $\forall x \in E$, 有 $x \leq \beta$, 则称 β 是 E 的最大数; 如果 $\exists \alpha \in E$, 使 $\forall x \in E$, 有 $x \geq \alpha$, 则称 α 是 E 的最小数.

与 E 的上、下界定义比较, 知其区别在于: α 与 β 是属于 E 的, 而 E 的上、下界是属于 $\mathbf{R}$ 的, 可能不属于 E . 所以, 上、下确界可能不属于 E .

E 的上界的全体不可能有最大数, 一定有最小数, 即上确界; E 的下界的全体不可能有最小数, 一定有最大数, 即下确界.

2. 为什么要引入确界概念?

答 因为,对有限数集 E ,必有最大数 $\max E$ 和最小数 $\min E$,它们分别为数集 E 的上边边界和下边边界.但当数集为无限集时,最大数与最小数就有可能不存在.因此,需要找出一个数作为它的上边(下边)边界.

若无限数集上方(下方)无界,则没有上边(下边)边界.若无限数集有上(下)界,且存在最大(小)数,则此最大(小)数即为此数集的上边(下边)边界;若不存在最大(小)数,则可以用其上(下)确界来作为上边(下边)边界.如无限数集 $\{n/(n+1) | n \in \mathbf{N}\}$ 没有最大数,但有上界,则其上确界 $\sup\{n/(n+1) | n \in \mathbf{N}\} = 1$ 可作为数集的上边边界.

另外,求开区间 (a, b) 长度的问题也要利用上、下确界来解决.因为,开区间 (a, b) 是有界的无限集,没有最大数,也没有最小数,也有上确界 b 和下确界 a .以 a 和 b 作为数集的下边边界与上边边界,就可求得开区间 (a, b) 的长度 d 为

$$\begin{aligned} d &= \sup\{x | a < x < b\} - \inf\{x | a < x < b\} \\ &= \sup\{y - x | \forall x, y \in (a, b), y > x\} = b - a. \end{aligned}$$

由上可见,引入确界概念可以更好地描述实数的连续性,并且给证明问题带来许多方便.

3. 试叙述上(下)确界的等价命题.

答 数集 E 的上确界 $\sup E = \beta$ 有三种等价命题,它们是:

- (1) $\begin{cases} \forall x \in E \Rightarrow x \leq \beta; \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in E \Rightarrow \beta - \epsilon < x_0. \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \forall x \in E \Rightarrow x \leq \beta; \\ \forall x < \beta, \exists x_0 \in E \Rightarrow x < x_0. \end{cases}$

(3) $\beta = \min\{y | \forall x \in E, x \leq y\}$, 即数集 E 的上确界 β 是数集 E 的上界所构成数集中的最小数.

类似地,可写出下确界 $\inf E = \alpha$ 的等价命题.

方法、技巧与典型例题分析

本节的例题绝大多数是证明题,因此必须对概念十分熟悉和理解.证明可以从正面进行,也可以从反面进行.一般,当问题从正面不易入手时,可考虑利用反证法证明.

一、最大数与最小数

例 1 设 c 为正整数,而不为整数的平方,且分割 $A|B$ 确定实数 c . 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , A 类包含所有其余的有理数. 求证: A 类中无最大数, B 类中无最小数.

证 在 A 类中任取有理数 $a > 0$, 则 $a^2 < c$. 设 $r = c - a^2$, 选取有理数 x , 使 $0 < x < 1$, 且 $(a+x)^2 < c$. 这在 $0 < x < \frac{r}{2a+1}$ 时即可实现, 因为

$$c - (a+x)^2 = r - 2ax - x^2 > r - (2a+1)x > 0.$$

取 $\delta = \min\left\{1, \frac{c-a^2}{2a+1}\right\}$, 则在 $(0, \delta)$ 中任取一有理数 x , 都有 $(a+x)^2 < c$, 所以 $a+x$ 属于 A 类, 且 $a+x > a$, 即 A 类中无最大数.

在 B 类中任取一有理数 b , 设 $s = b^2 - c$. 选取有理数 y , 使 $0 < y < b$, 且 $(b-y)^2 > c$. 这在 $0 < y < \frac{s}{2b}$ 时即可实现, 因为

$$(b-y)^2 - c = s - 2by + y^2 > s - 2by > 0,$$

取 $\epsilon = \min\left\{b, \frac{b^2-c}{2b}\right\}$, 则在 $(0, \epsilon)$ 中任取一有理数 y , 有 $(b-y)^2 > c$, 所以 $b-y$ 属于 B 类, 且 $b-y < b$, 即 B 类中无最小数.

例 2 设 $A = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 0, \text{ 且 } x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}$,

$$B = \{x | x > 0, \text{ 且 } x^2 > 2, x \in \mathbb{Q}\},$$

其中 $\mathbb{Q}$ 为有理数. 证明: A 类中无最大数, B 类中无最小数.

证 利用例 1, 令 $c = 2$, 即可证出. 请读者一试.

例 3 设 $a \leq c \leq b$, 证明: $|c| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

证 因为

$$\begin{aligned}\max\{|a|, |b|\} &\geq |b| \geq b \geq c, \\ -\max\{|a|, |b|\} &\leq -|a| \leq a \leq c,\end{aligned}$$

所以

$$|c| \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

例 4 设 $\max\{|a+b|, |a-b|\} < 1/2$, 求证:

$$|a| < 1/2, |b| < 1/2.$$

证 用反证法. 设 $|a| > 1/2, |b| > 1/2$.

(1) 设 $0 < a < b$, 则

$$1/2 < |a| < |a+b|, 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|, |a-b|\} > \frac{1}{2}$, 引出矛盾.

(2) 设 $a < b < 0$, 则

$$1/2 < |a| < |a+b|, 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|, |a-b|\} > 1/2$, 引出矛盾.

(3) 设 $a < 0 < b$, 则

$$1/2 < |a| < |a-b|, 1/2 < |b| < |a-b|,$$

从而 $\max\{|a+b|, |a-b|\} > 1/2$, 引出矛盾.

综上所述可知, 必有 $\max\{|a+b|, |a-b|\} < 1/2$.

例 5 证明: $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq 1/2.$$

证 用反证法. 设 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} < 1/2$.

由例 4 知, 此时有 $|a| < 1/2, |b| < 1/2$, 因而

$$|1-b| \geq 1 - |b| > 1/2,$$

与所设矛盾. 故命题必成立.

二、上、下确界的命题

例 6 证明: 若数集 E 的上(下)确界存在, 则它必惟一存在.

证 用反证法. 设 p 和 q 是 E 的上确界, 且 $p \neq \epsilon_0 = (q-p)/2$, 则 $\forall x \in E, x \leq p < q - (q-p)/2 = q - \epsilon_0$, 这与 q 为 E 的上确界矛盾. 故必有 $p = q$, 即数集 E 的上确界是惟一的.

类似可证,数集 E 的下确界也是惟一的.

例 7 设 $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$, 求 $\sup E, \inf E$, 问: $\min E$ 与 $\max E$ 是否存在?

解 因为 $\forall n, 1 - \frac{1}{n} < 1$, 且 $\forall$ 任 $\epsilon > 0, \exists n_0$, 使 $1 - \frac{1}{n_0} \in \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$, $1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon$, 仅当 $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, 所以, $\sup E = 1$.

类似可证, $\inf E = \frac{1}{2}$.

由 $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$ 是单调增加的知, $\min E = \frac{1}{2}, \max E$ 不存在.

例 8 设 $E = \{x | x \in \mathbf{Q}, \text{且 } x^2 < 2, x > 0\}$, 证明: E 有上界, 但在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界.

证 E 有上界是显然的. 例如, 2 就是 E 的一个上界.

用反证法证明 E 在 $\mathbf{Q}$ 内无上确界.

设 E 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界, $\sup E = \frac{n}{m} (m, n \in \mathbf{N}^+, \text{且 } m, n \text{ 互质})$, 则有 $1 < \left(\frac{n}{m} \right)^2 < 3$. 因为有理数的平方不可能等于 2, 就出现下列两种可能.

(1) $1 < \left(\frac{n}{m} \right)^2 < 2$. 若记 $2 - \left(\frac{n}{m} \right)^2 = t$, 则 $0 < t < 1$. 令 $r = \frac{n}{6m}t$, 有 $\frac{n}{m} + r > 0$, 且 $\frac{n}{m} + r \in \mathbf{Q}$.

由于 $r^2 = \frac{n^2}{36m^2}t^2 < \frac{t}{18}$, 且 $\frac{2n}{m}r = \frac{n^2}{3m^2}t < \frac{2}{3}t$, 得

$$\left(\frac{n}{m} + r \right)^2 - 2 = r^2 + \frac{2n}{m}r - t < 0.$$

由此可知, $\frac{n}{m} + r \in \mathbf{Q}$, 与 $\frac{n}{m}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的上确界矛盾.

(2) $2 < \left(\frac{n}{m} \right)^2 < 3$. 若记 $\left(\frac{n}{m} \right)^2 - 2 = t$, 则 $0 < t < 1$. 令 $r =$