大学数学的内容、方法与技巧丛书

数学分析
内容、方法与技巧（上）

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社

大学数学的内容、方法与技巧丛书

数学分析

内容、方法与技巧

(上)

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 内容、方法与技巧(上)/孙清华 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2003 年 7 月
ISBN 7-5609-2953-2

Ⅰ. 数…
Ⅱ. ①孙… ②孙…
Ⅲ. 数学分析-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O17

数学分析 内容、方法与技巧(上) 孙清华 孙 昊

责任编辑:徐正达 李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:张兴田 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.625 字数:377 000
版次:2003 年 7 月第 1 版 印次:2003 年 12 月第 2 次印刷 定价:19.00 元
ISBN 7-5609-2953-2/O · 282

内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的辅导书，分上、下两册，编写顺序与一般的数学分析教材同步，本册内容包括实数与数列极限，函数、极限与连续性，导数与微分，微分中值定理与利用导数研究函数，不定积分，定积分及其应用等，在归纳内容、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题为读者诠释概念，演绎技巧，举证方法，通过学习它，读者可以循序渐进地融会知识，理解概念，熟悉技巧和掌握方法．因此，读者有必要认真学习本书，通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识．

希望本书能成为你的良师益友，欢迎你选用本系列丛书．

前　言

数学分析是高等学校数学专业的主要基础课程. 对初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮

助，在此向他们表示衷心的感谢.在本书写作中，曾参阅了一些作者关于数学分析问题的著作，本人借此向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限，本书的失误之处望同行和读者热心指正.

孙清华　孙　昊

2003年1月

目　录

第一章　实数与数列极限

第一节　实数的表示与实数系的连续性

主 要 内 容

一、实数的表示

1. 全体有理数与全体无理数所构成的集合称为实数集合，记作

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 是有理数或无理数}\}.$$

2. 任何一个实数都可用无尽小数表示. 其中任何有理数都可以表示为无尽循环小数（有尽小数视作后面有无尽个零的循环小数），任何无理数都可以表示为无尽小数.

3. 实数分为非负实数与负实数. 任何非负实数大于任何负实数.

对任意两个实数 a 和 b，必有且只有以下三种情形之一（称为三歧性）：

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b.$$

4. 有尽小数在实数系中处处稠密.

设 a 和 b 是实数，$a<b$，则存在有尽小数 c，满足 $a<c<b$.

5. 实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{若 } x \text{ 是非负实数},\\ -x, & \text{若 } x \text{ 是负实数}.\end{cases}$$

$-x$ 称为 x 的相反数，零的相反数是零本身.

二、实数系的连续性

1. 对于实数集合中的任何的分割(Dedekind)$A|A'$,存在产生这个分割的实数β,这个数β:1) 或是下类A中的最大数;2) 或是上类A'中的最小数.

此性质称为实数系的连续性,或完备性、密接性.

2. 实数集$\mathbf{R}$的各种子集,简称为数集.

设E为一非空数集,若$\exists\ M\in\mathbf{R}$,使$\forall\ x\in E$,有$x\leqslant M$,则称M为E的一个上界;若$\exists\ m\in\mathbf{R}$,使$\forall\ x\in E$,有$x\geqslant m$,则称m为E的一个下界.既有上界又有下界的数集E,称为有界集.即

E为有界集$\Longleftrightarrow\exists\ X>0$,使$\forall\ x\in E$,有$|x|\leqslant X$.

E的上界中的最小数,称为数集E的上确界,记作$\sup E$;E的下界中的最大数,称为数集E的下确界,记作$\inf E$.

3. 确界存在定理——实数系连续性定理　非空有上界的数集必有上确界,非空有下界的数集必有下确界.

4. 非空有界数集的上(下)确界是惟一的.

疑 难 解 析

1. 数集的最大数与最小数同数集的上确界与下确界有什么关系?

答　设E为一数集,如果$\exists\ \beta\in E$,使$\forall\ x\in E$,有$x\leqslant\beta$,则称β是E的最大数;如果$\exists\ \alpha\in E$,使$\forall\ x\in E$,有$x\geqslant\alpha$,则称α是E的最小数.

与E的上、下界定义比较,知其区别在于:α与β是属于E的,而E的上、下界是属于$\mathbf{R}$的,可能不属于E.所以,上、下确界可能不属于E.

E的上界的全体不可能有最大数,一定有最小数,即上确界;E的下界的全体不可能有最小数,一定有最大数,即下确界.

2. 为什么要引入确界概念?

答　因为，对有限数集 E，必有最大数 $\max E$ 和最小数 $\min E$，它们分别为数集 E 的上边边界和下边边界. 但当数集为无限集时，最大数与最小数就有可能不存在. 因此，需要找出一个数作为它的上边(下边) 边界.

若无限数集上方(下方) 无界，则没有上边(下边) 边界. 若无限数集有上(下) 界，且存在最大(小) 数，则此最大(小) 数即为此数集的上边(下边) 边界；若不存在最大(小) 数，则可以用其上(下) 确界来作为上边(下边) 边界. 如无限数集 $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbf{N}\}$ 没有最大数，但有上界，则其上确界 $\sup\{n/(n+1) \mid n \in \mathbf{N}\} = 1$ 可作为数集的上边边界.

另外，求开区间 (a,b) 长度的问题也要利用上、下确界来解决. 因为，开区间 (a,b) 是有界的无限集，没有最大数，也没有最小数，也有上确界 b 和下确界 a. 以 a 和 b 作为数集的下边边界与上边边界，就可求得开区间 (a,b) 的长度 d 为

$$\begin{aligned} d &= \sup\{x \mid a < x < b\} - \inf\{x \mid a < x < b\} \\ &= \sup\{y - x \mid \forall\, x, y \in (a,b), y > x\} = b - a. \end{aligned}$$

由上可见，引入确界概念可以更好地描述实数的连续性，并且给证明问题带来许多方便.

3. 试叙述上(下) 确界的等价命题.

答　数集 E 的上确界 $\sup E = \beta$ 有三种等价命题，它们是：

(1) $\begin{cases} \forall\, x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \forall\, x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta; \\ \forall\, x < \beta, \exists\, x_0 \in E \Rightarrow x < x_0. \end{cases}$

(3) $\beta = \min\{y \mid \forall\, x \in E, x \leqslant y\}$，即数集 E 的上确界 β 是数集 E 的上界所构成数集中的最小数.

类似地，可写出下确界 $\inf E = \alpha$ 的等价命题.

方法、技巧与典型例题分析

本节的例题绝大多数是证明题，因此必须对概念十分熟悉和理解. 证明可以从正面进行，也可以从反面进行. 一般，当问题从正面不易入手时，可考虑利用反证法证明.

一、最大数与最小数

例 1 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且分割 $A|B$ 确定实数 c. 其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，A 类包含所有其余的有理数. 求证：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 在 A 类中任取有理数 $a>0$，则 $a^2<c$. 设 $r=c-a^2$，选取有理数 x，使 $0<x<1$，且 $(a+x)^2<c$. 这在 $0<x<\frac{r}{2a+1}$ 时即可实现，因为

$$c-(a+x)^2=r-2ax-x^2>r-(2a+1)x>0.$$

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{c-a^2}{2a+1}\right\}$，则在 $(0,\delta)$ 中任取一有理数 x，都有 $(a+x)^2<c$，所以 $a+x$ 属于 A 类，且 $a+x>a$，即 A 类中无最大数.

在 B 类中任取一有理数 b，设 $s=b^2-c$. 选取有理数 y，使 $0<y<b$，且 $(b-y)^2>c$. 这在 $0<y<\frac{s}{2b}$ 时即可实现，因为

$$(b-y)^2-c=s-2by+y^2>s-2by>0,$$

取 $\epsilon=\min\left\{b,\frac{b^2-c}{2b}\right\}$，则在 $(0,\epsilon)$ 中任取一有理数 y，有 $(b-y)^2>c$，所以 $b-y$ 属于 B 类，且 $b-y<b$，即 B 类中无最小数.

例 2 设 $A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>0$，且 $x^2<2,x\in\mathbf{Q}\}$，

$$B=\{x|x>0,\text{且 } x^2>2,x\in\mathbf{Q}\},$$

其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数. 证明：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 利用例 1，令 $c=2$，即可证出. 请读者一试.

例 3 设 $a\leqslant c\leqslant b$，证明：$|c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$.

证 因为

$$\max\{|a|,|b|\} \geqslant |b| \geqslant b \geqslant c,$$

$$-\max\{|a|,|b|\} \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant c,$$

所以
$$|c| \leqslant \max\{|a|,|b|\}.$$

例 4 设 $\max\{|a+b|,|a-b|\} < 1/2$,求证:

$$|a| < 1/2,\ |b| < 1/2.$$

证 用反证法. 设 $|a| > 1/2, |b| > 1/2$.

(1) 设 $0 < a < b$,则

$$1/2 < |a| < |a+b|,\ 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\} > \frac{1}{2}$,引出矛盾.

(2) 设 $a < b < 0$,则

$$1/2 < |a| < |a+b|,\quad 1/2 < |b| < |a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\} > 1/2$,引出矛盾.

(3) 设 $a < 0 < b$,则

$$1/2 < |a| < |a-b|,\quad 1/2 < |b| < |a-b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\} > 1/2$,引出矛盾.

综上所述可知,必有 $\max\{|a+b|,|a-b|\} < 1/2$.

例 5 证明:$\forall\, a,b \in \mathbf{R}$,有

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\} \geqslant 1/2.$$

证 用反证法. 设 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\} < 1/2$. 由例 4 知,此时有 $|a| < 1/2, |b| < 1/2$,因而

$$|1-b| \geqslant 1 - |b| > 1/2,$$

与所设矛盾. 故命题必成立.

二、上、下确界的命题

例 6 证明:若数集 E 的上(下)确界存在,则它必惟一存在.

证 用反证法. 设 p 和 q 是 E 的上确界,且 $p \neq \varepsilon_0 = (q-p)/2$,则 $\forall\, x \in E, x \leqslant p < q-(q-p)/2 = q-\varepsilon_0$,这与 q 为 E 的上确界矛盾. 故必有 $p = q$,即数集 E 的上确界是惟一的.

类似可证，数集 E 的下确界也是惟一的.

例 7　设 $E=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$，求 $\sup E,\inf E$，问：$\min E$ 与 $\max E$ 是否存在？

解　因为 $\forall\ n,1-\frac{1}{n}<1$，且 $\forall$ 任 $\varepsilon>0,\exists\ n_0$，使 $1-\frac{1}{n_0}\in\left\{1-\frac{1}{n}\right\},1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$，仅当 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$，所以，$\sup E=1$.

类似可证，$\inf E=\frac{1}{2}$.

由 $E=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 是单调增加的知，$\min E=\frac{1}{2}$，$\max E$ 不存在.

例 8　设 $E=\{x\mid x\in\mathbf{Q}$，且 $x^2<2,x>0\}$，证明：E 有上界，但在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界.

证　E 有上界是显然的. 例如，2 就是 E 的一个上界.

用反证法证明 E 在 $\mathbf{Q}$ 内无上确界.

设 E 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界，$\sup E=\frac{n}{m}(m,n\in\mathbf{N}^+$，且 m,n 互质)，则有 $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$. 因为有理数的平方不可能等于 2，就出现下列两种可能.

(1) $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<2$. 若记 $2-\left(\frac{n}{m}\right)^2=t$，则 $0<t<1$. 令 $r=\frac{n}{6m}t$，有 $\frac{n}{m}+r>0$，且 $\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$.

由于 $r^2=\frac{n^2}{36m^2}t^2<\frac{t}{18}$，且 $\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<\frac{2}{3}t$，得

$$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2-2=r^2+\frac{2n}{m}r-t<0.$$

由此可知，$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$，与 $\frac{n}{m}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的上确界矛盾.

(2) $2<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$. 若记 $\left(\frac{n}{m}\right)^2-2=t$，则 $0<t<1$. 令 $r=$