实变函数论

于宗义　编著

山东大学出版社

山东师范大学著作出版基金资助项目

实变函数论

于宗义　编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/于宗义编著．—济南：山东大学出版社，1999.8

(2003.8重印)

ISBN 7-5607-2040-4

Ⅰ．实…

Ⅱ．于…

Ⅲ．实变函数论

Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第31301号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路27号　邮政编码:250100)

山 东 省 新 华 书 店 经 销

曲阜师范大学印刷厂印刷

850×1168毫米　1/32　9.625印张　250千字

2003年8月第2版　2003年8月第2次印刷

印数:2501—5000册

定价:17.80元

再版说明

本次修订，是作者对初版进行了数次教学实践和多所兄弟院校使用初版后提出意见和要求的基础上进行的。本版保持了初版的思想体系和结构，吸收了各方面的意见，从局部来看作了许多修改，目的是更便于教学及学生对理论来龙去脉的了解，对习题作了调整，增加了附录Ⅳ：部分习题参考解答与提示。为了不影响学生独立思考，解答也多以提示关键步骤的形式给出。

这次修订得到了山东师范大学、聊城大学、济南大学、德州学院、济南教育学院等学校许多专家、教师、读者及相关领导的关心和支持，在此一并表示衷心感谢。

作　者

2003 年 6 月

序

从 19 世纪下半叶以来，随着积分理论在工程和物理中越来越多的应用，以及人们对分析数学中几个基础概念的进一步研究，如连续性、面积、体积、微分等，Riemann 积分理论的缺陷逐步暴露出来．从广度来讲，Riemann 积分所能处理的函数基本上为连续函数；从应用上来讲，Riemann 积分对一些应用中常常涉及到的极限顺序交换问题限制较强，灵活性不足．而诸如积分与极限、积分与求和顺序交换等，不论在数学的理论上还是在应用上，都是至关重要的．

在这些问题推动下，新的测度理论和积分理论逐步发展起来，它在积分的广度和极限交换顺序的灵活性上比 Riemann 积分要优越得多．20 世纪以来，Legesgue 积分和测度理论已成为近代数学的一个不可缺少的工具．在现代概率论、泛函分析、大范围微分几何、微分方程、物理，以及应用数学中出现的非线性问题中，它已成为构建这些学科理论的一个基石．

实变函数论是数学系的一门重要主干课，其主要内容是建立 Lebesgue 测度和积分理论．该课程可以看作数学分析的深化和继续，是学习大学本科数学专业三大专业课泛函分析、近世代数和拓扑学的基础．这些课程集中体现了本科与专科的差别，对培养学生的数学素养是非常必要的．

到目前为止，多数实变函数论教材都由综合大学编写．由于师范院校培养目标的双重性，学生在学习以及教师在教学中，除专业知识外，还要兼顾到师范性这一培养准则，所以师范院校的教材

应照顾到这一特点．遗憾的是，这方面的教材至今仍不多见．

于宗义同志多年来一直担任实变函数论的教学，具有丰富的教学经验．该课程也是山东师范大学的重点课程．在长期的教学中，于宗义同志积累了若干第一手资料，并汇编成讲义．该讲义已在山东师范大学使用多年，汇总了学生及教师的经验．经过于宗义同志的辛苦劳动，该书现已出版．在内容上，该书特别注重了师范类院校教学的特点，使读者除了能体会到该课程对高等数学的作用，也能领悟到它对初等数学的指导作用；并新添了《与中学数学有关的若干问题》一章，使该书兼顾了师范教学和理论上的深度．相信该书的出版对师范院校的实变函数论教学具有重要的促进作用．

刘希玉　闫宝强

1998 年 12 月

目　　录

引　言

实变函数是以实数理论和集合论为基础的现代分析学科，形成于 20 世纪初期，它的中心内容是 Lebesgue 测度论和 Lebesgue 积分理论，学习这些理论对于理解、掌握近代数学思想是必不可少的，同时，这一理论又是数学分析中有关理论的推广和发展，因此，《实变函数》是具有承上启下作用的重要课程.

众所周知，Riemann 积分理论是数学分析教程的主要内容之一，它对数学理论本身的发展，对其他科学技术的应用都产生着极其深远的影响，然而随着科学技术的发展以及 Cantor 集合论的深入研究，Riemann 积分的缺陷逐渐显露出来，这是《实变函数》理论产生的主要动力.

§1　Riemann 积分的局限性

1. Riemann 积分只适合于“基本上”连续的函数

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数，对 $[a,b]$ 作分划 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<x_n=b$ 后，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积的充分必要条件是

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0 \qquad \cdots(*).$$

其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，$|P|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，$\omega_i$ 是 $f(x)$ 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅.

(*)式涉及两个因素，一是子区间的长度 Δx_i，二是 $f(x)$ 在子区间上的振幅 ω_i，因此，为使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积，粗略的说来，就是在 $|P|\to 0$ 的过程中，振幅 ω_i 不能随之缩小的那些相应项的子区间的长度总和可以任意小，由于函数的振幅 ω_i 的大小与函数的连续性有关，于是(*)式迫使函数 $f(x)$ 的不连续点可用长度总和任意小的区间所包围，也就是说，函数 $f(x)$ 必然是基本上连续的才行，那些很不连续的函数是在 Riemann 意义下不可积的．例如 Dirichlet 函数.

$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in[0,1]-Q\end{cases}$，$Q$ 为 $[0,1]$ 中有理点集，在 $[0,1]$ 上不是 (R) 可积的.

R 可积函数的范围太窄．

2. **在 Riemann 积分中进行某些运算不够灵活**

例如极限运算与积分运算交换次序时要求的条件太苛刻.

数学分析中，都是在函数列 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 的条件下保证极限与积分次序交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里“一致收敛”的要求太苛刻了，我们可以举出许多点点收敛但不一致收敛，而极限与积分能交换次序的例子．

例 1　$f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

例 2　$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[\frac{1}{n},1]\cup\{0\}\\ 1, & x\in(0,\frac{1}{n})\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$

$$f(x)\equiv 0\qquad x\in[0,1].$$

将条件减弱一些，在 (R) 积分意义下只有如下定理（参考

Amer. Math. Monthly, 78, 1980)

Riemann 积分的有界收敛定理:设

(1) $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上 (R) 可积函数;

(2) $\exists\ M\geqslant 0$,使 $|f_n(x)|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in[a,b]$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里,不仅受到条件(2)的限制,而且还必须假定极限函数 $f(x)$ 的可积性. 下例表明,即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性.

例 3 设 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 中全体有理数排成的数列,作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1,x=r_1,r_2,\cdots,r_n\\0,\text{其他}\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

显然,$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\leqslant 1$,且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=D(x)=\begin{cases}1,x\ \text{为有理数},\\0,x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

由于每个 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积且积分值为零,故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0$$

但极限函数是我们熟知的 Riemann 不可积函数 $D(x)$,根本谈不上积分号下取极限的问题.

在例 3 中,若对 $[0,1]$ 中有理数给出另外一种排列方法 $\{r_1',r_2',\cdots,r_n'\cdots\}$,令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1,\ x=r_1',r_2',\cdots,r_n'\\0,x\in[0,1]-\{r_1',r_2',\cdots,r_n'\}\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

则 $\{\varphi_n(x)\}$ 仍非负、渐升、一致有界,对每个固定的 n,$\int_0^1\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0$ $(n=1,2,\cdots)$,同时有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数}.\\ 0, x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$

但 $D(x)$ 不可积．这里积分列的极限值对不同函数列相同，说明此极限值不依赖于选取的函数列，而依赖于极限函数 $D(x)$，既然如此，不妨定义 $D(x)$ 的积分为

$$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这样就可以使极限与积分交换次序更方便了.

再如，重积分化为累次积分和累次积分换序时要求的条件也太苛刻，读者学习了 Fubini 定理后对照数分的相应结论便知．

3. 微积分基本定理的应用受到限制

微积分基本定理是微积分学的中枢，它有两层意思，一是 (R) 可积函数 $f(x)$ 在其连续点处成立 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$，二是公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(x)\mathrm{d}t$$

这表明 $F'(x)$ 必须 (R) 可积，但是，可微函数的导数未必可积，例如 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, x\in(0,1]\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$，$F'(x)$ 是无界函数，当然不可积，其实，早在 1881 年，Volterra 就作出了可微函数 $f(x)$，其导数 $f'(x)$ 是有界的，但 $f'(x)$ 不是 (R) 可积的（见文献[11]）. 这就是说微积分基本定理的应用受限.

4. (R) 可积函数空间 $R[a,b]$ 不完备

在 $R[a,b]$ 上经常规定距离

$$\rho(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

或 $\rho_1(f,g)=(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ $f,g\in R[a,b]$ 使$(R[a,b],\rho)$ [或$(R[a,b],\rho_1)$]成为距离空间，距离空间的完备性具有重要意义，泛函分析中许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性．这完备性是指函数列$\{f_n\}$满足

$$\rho(f_n,f_m)\to 0\left(\begin{matrix} n\to\infty \\ m\to\infty \end{matrix}\right)$$

时，$\exists\ f\in R[a,b]$，使 $\rho(f_n,f)\to 0$，可以证明$(R[a,b],\rho)$不是完备的，事实上，设$\{r_n\}$为$(0,1)$中有理数全体，$r_n\in I_n$，I_n 为$[0,1]$中开区间，其长度$|I_n|<\frac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$，作函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \\ 0, & x\in [0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n . \end{cases}$$

和 $$f_k(x)=\begin{cases} 1, & x\in \bigcup\limits_{n=1}^{k} I_n \\ 0, & x\in [0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{k} I_n \end{cases} \qquad k=1,2,\cdots$$

即有 $\rho(f_n,f_m)\to 0$ $(n\to\infty,m\to\infty)$但 f 在$[0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} In$ 上不连续，$f\overline{\in} R[0,1]$，且不存在 R 可积函数 g，使得 $\rho(f,g)=0$，即不存在 $g\in R[0,1]$，使 $\rho(f_n,g)\to 0$.

另外，R 积分理论本身并不完善，许多问题在 R 积分范围内是无法讲清的，例如 R 可积函数的基本特征等.

§2 Lebesgue 积分思想简介

当今应用最广泛的测度与积分系统是由法国数学家 Lebesgue 完成的. 1902 年他在“积分、长度与面积”的论文中所阐明的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点. Lebesgue 积分理论不仅

蕴涵了(R)积分所达到的成果，而且在较大程度上克服了后者的局限性，对 Lebesgue 的积分思想简单介绍如下.

对于定义在$[a,b]$上的函数，为使 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积，按照 Riemann 的积分思想，必须使分划 P 的多数子区间上 $f(x)$ 的振幅足够小，这迫使具有较多振动的函数被排除在可积函数之外，对此，Lebesgue 提出，不从分割$[a,b]$入手，而是从分割函数的值域着手，即任给 $\delta>0$，作分划：

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_n=M,$$

其中 $y_i-y_{i-1}<\delta, m, M$ 是 $f(x)$在$[a,b]$上的下界与上界，并且作点集

$$E_i=\{x \mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}, i=1,2,\cdots,n.$$

这样，在 E_i 上，$f(x)$的振幅就不会大于 δ，再计算

$|I_i|=$“矩形面积”$=$(高)$y_{i-1}\times$“底边长度”$|E_i|$，

并作和

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i|,$$

它是 $f(x)$在$[a,b]$上积分(面积)的近似值．然后，让 $\delta\to 0$，且定义

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i|$$

(如果此极限存在). 也就是说，采取在 y 轴上分划来限制函数值变动幅度，即按函数值大小先加以归类. Lebesgue 对这一设计作了生动的譬喻，大意如下：假定我欠人家许多钱，现在要归还. 此时，应先按照钞票的票面值的大小分类，再计算每一类的面额总值，然后相加，这就是我的积分思想；如果不先按面值大小来分类，而是按从钱袋中摸出的钞票的先后次序来计算总数，那就是 Riemann 的积分思想.

当然，按照 Lebesgue 积分构思，会带来一系列的新问题，首先分割函数值范围后，所得到的点集