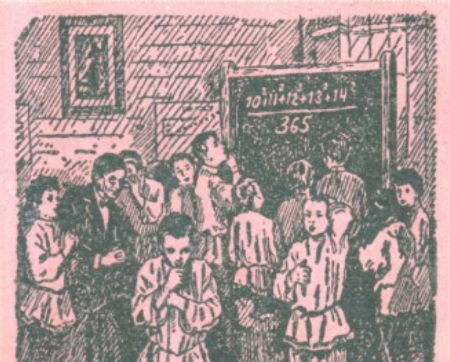
蘇聯青年科學叢書

循環級數

馬庫希維契著
朱美琨譯



開明書店

本書所講的主要是幾種重要的循環級數，循環級數和它的特徵方程式的關係，以及怎樣應用循環級數來求級數的和等，內容和方法都很新穎。在一般代數書中，等差級數、等比級數、級數的和等問題都各自獨立，不發生關係，而在本書中卻把它們統一起來研究，這是本書的一個特點。

④ 定價 2,30

蘇聯青年科學叢書

循 環 級 數

馬庫希維契著
朱 美 琨 譯

開 明 書 店

循環級數

(ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ)

每冊定價 2,300元　　32開本 70定價頁

著　者	蘇聯 馬庫希維契 (А. И. МАРКУШЕВИЧ)
譯　者	朱美琨
原著版本	蘇聯國家技術理論書籍出版局《數學通俗講話》小叢書第一種，1951
出版者	開明書店 (北京西總布胡同甲50號)
印刷者	華義印刷廠
發行者	三聯·中華·商務·開明·聯營 聯合組織 中國圖書發行公司

1952年11月初版(1—10000)　　分類10 書號3883(環)

前　言

這本小册子的內容，作者曾經用來對第九和第十年級學生——莫斯科數學競賽的參加者——講授過．後來，修改了一下，又用來在莫斯科教師進修學院講授．這些講演稿，加以擴充，就成了現在的形狀．

'循環級數'這個主題和中學課程（算術級數和幾何級數、自然數平方級數、兩多項式的商的係數的級數等等）是很接近的．同時，這個小小的理論*，畢竟是幾位數學分析大家所創立的，也和其他出於他們手筆的理論一樣，完整、簡單而且明白．

循環級數理論的基礎是在十八世紀二十年代由法國數學家棣莫弗［一般人常由所謂棣莫弗公式：$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ 而知道他的名字的］和彼得堡科學院最早的一位院士——瑞士數學家旦尼爾·伯努利建立和發表出來的．十八世紀的大數學家，彼得堡科學院院士萊翁那得·歐拉，更將這理論推進了一步，在他的'無窮小分析導言'(1748)的第十三章中就專討論循環級數（或序列）．在比較後出的

---

*對於熟悉數學分析的讀者我們可以這樣說，這個理論恰恰和具有常係數的直線微分方程式的理論相平行．

著作中應該特別提出的還有著名的俄羅斯數學家院士契比雪夫 (П. Л. Чебышев) 以及馬爾可夫 (А. А. Марков) 各人講授的定差算法教程中有關循環級數理論的敍述.

1. 循環級數的概念是算術級數和幾何級數概念的擴大和一般化．此外，自然數的平方級數和立方級數、分數化做循環小數時的各位數字所成的級數（以及任何按週期重複的級數）、兩個多項式相除得的商按 x 的昇冪寫出來時各項係數所成的級數等等，都是循環級數的特例．由此很明白，在中學數學課程中必然常常碰見循環級數的．循環級數的理論是數學學科中叫做定差算法裏面的特殊的一章．我們在本書中就講述這種理論，可是並不要求讀者有任何專門的預備知識（只有在一個地方我們不加證明就引用了一個普遍定理，那是要在一次方程式的理論中纔能好好地推證的）．

2. 我們將一個級數寫成如下形式：

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots, \tag{1}$$

或者簡單地寫成 $\{u_n\}$．如果存在一個自然數 k 和 k 個數 a_1, $a_2, \cdots\cdots, a_k$（實數或虛數），使得從數碼 n 的某個數值 m 起，

$$u_{n+k}=a_1 u_{n+k-1}+a_2 u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_k u_n \quad (n \geqslant m \geqslant 1), \tag{2}$$

都成立，那麼級數 (1) 就叫做 **k 階循環級數**，而關係式 (2) 叫做 **k 階循環方程式**．

因此，循環級數的特徵就在於，它的任意項（從某一項

起）可以用緊靠在它前面的、數目確定的——k——幾個項按公式 (2) 表示出來．它的俄文名稱‘回復’(возвратная) 的由來便是，每道要求它的較後面的項總得回到較前面的項；(‘循環’這名稱則由法文 récurrente——回到起點——而來)．下面舉幾個循環級數的例子：

〔例 1〕**幾何級數** 設有幾何級數

$$u_1=a,\ u_2=aq,\ u_3=aq^2,\cdots\cdots,\ u_n=aq^{n-1},\cdots\cdots; \tag{3}$$

對這種級數，方程式 (2) 取如下形式：

$$u_{n+1}=qu_n. \tag{4}$$

這兒 $k=1$ 而 $a_1=q$．因此幾何級數是一階循環級數．

〔例 2〕**算術級數** 對於算術級數

$$u_1=a,\ u_2=a+d,\ u_3=a+2d,\cdots\cdots,\ u_n=a+(n-1)d,\cdots\cdots$$

我們有 $$u_{n+1}=u_n+d.$$

這個關係式並不合於方程式 (2) 的形狀*．可是，如果我們考察，和 n 的兩個相鄰的值相當的兩個方程式：

$$u_{n+2}=u_{n+1}+d \quad 和 \quad u_{n+1}=u_n+d,$$

那麼兩端相減便可引出

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n,$$

也就是 $$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n \tag{5}$$

這就合於方程式 (2) 的形狀了．這兒 $k=2$，$a_1=2$，$a_2=-1$．

* 方程式 (2) 的特徵是，它的右端只能包含級數的項，各項可以帶着常數係數，而沒有包含常數項．

所以,算術級數是二階循環級數.

〔例3〕再看一個古老的關於兔子數目的斐波那契* 問題,假定每對大兔每月能生產一對小兔,而每對小兔過一個月就能完全長成.要求在一年裏面由一對大兔能繁殖出多少對大兔來.這個問題裏面有趣的並不是正面的答案,那是不難求出的.眞正有趣的是大兔的總對數所成的級數:最初是 u_1,過了一個月是 u_2,過了兩個月是 u_3,而一般地過了 n 個月是 u_{n+1}.顯然,$u_1=1$.過了一個月,有一對小兔生產出來,但大兔的對數還是如舊:$u_2=1$.過了兩個月,這對小兔也長大了,所以大兔的總對數等於2:$u_3=2$.假設我們已經求出 $n-1$ 個月後大兔的對數 (u_n) 和 n 個月後大兔的對數 (u_{n+1}).因爲在第 n 個月中間原來的 u_n 對大兔又生產了 u_n 對小兔,所以過了 $n+1$ 個月大兔的總對數是

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n. \tag{6}$$

由此　$u_4=u_3+u_2=3,\ u_5=u_4+u_3=5,$

$$u_6=u_5+u_4=8,\ u_7=u_6+u_5=13,\cdots\cdots$$

如此我們得出一個級數

$$\left.\begin{array}{l} u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3, \\ u_5=5,\ u_6=8,\ u_7=13,\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{7}$$

* 斐波那契,即比薩的萊翁那度,中世紀意大利的數學家(1200年左右),留下了'Liber abaci'一書,裏面包括了廣闊的算術和代數的知識,這些知識,是由中央亞細亞國家和拜占庭人傳來的;也有由他自己創造和加以發展了的.

其中每一項都等於緊接着它的前面兩項的和．這個級數叫做**斐波那契級數**，而它的各項叫做**斐波那契數**．方程式 (6) 說明了斐波那契級數是二階循環級數．

〔例 4〕作爲另一個例子我們來考察自然數平方所成的級數：

$$u_1=1^2,\ u_2=2^2,\ u_3=3^2,\cdots\cdots,u_n=n^2,\cdots\cdots \tag{8}$$

這兒 $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$，因而

$$u_{n+1}=u_n+2n+1 \tag{9}$$

把 n 加大 1，得到

$$u_{n+2}=u_{n+1}+2n+3. \tag{10}$$

所以 [(10) 和 (9) 兩端相減]，

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+2,$$

也就是

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+2. \tag{11}$$

把等式 (11) 中的 n 加大 1，就有

$$u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n+1}+2, \tag{12}$$

由此 [(12) 和 (11) 兩端相減]

$$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

也就是

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n. \tag{13}$$

我們就得到了一個三階循環方程式．所以，級數 (8) 是一個三階循環級數．用同樣的方法可以證明自然數立方所成的級數

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\cdots\cdots,\ n^3,\cdots\cdots \tag{14}$$

是四階循環級數．它的各項適合方程式

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n, \tag{15}$$

這個式子希望讀者自己推證出來．

〔例 5〕一切有按週期重複的級數都是循環級數．例如把分數 $\frac{761}{1332}$ 化成小數：

$$\frac{761}{1332}=0.57132132132\cdots\cdots,$$

我們來觀察這小數中各位數字所成的級數．

這兒
$$\left.\begin{array}{l} u_1=5,\ u_2=7,\ u_3=1,\ u_4=3, \\ u_5=2,\ u_6=1,\ u_7=3,\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{16}$$

很明顯地，
$$u_{n+3}=u_n \quad (n\geqslant 3). \tag{17}$$

要把上式表示成方程式 (2) 的形狀，只須將它寫做

$$u_{n+3}=0\cdot u_{n+2}+0\cdot u_{n+1}+1\cdot u_n.$$

由此很顯然，這是一個三階循環方程式 ($k=3$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$)．所以，級數 (16) 是三階循環級數．

〔例 6〕現在來研究兩個多項式相除的商，按 x 的昇冪排列時各係數所成的級數．假設

$$P(x)=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_lx^l$$

和

$$Q(x)=B_0+B_1x+\cdots\cdots+B_kx^k \qquad (B_0\neq 0).$$

用 $Q(x)$ 除 $P(x)$；如果 $P(x)$ 不能用 $Q(x)$ 除盡，那麼可以無限制地除下去，逐步得出商的各項：

$$D_0+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\cdots\cdots+D_nx^n+\cdots\cdots$$

我們來看級數

$$u_1=D_0,\ u_2=D_1,\cdots\cdots,\ u_n=D_{n-1},\cdots\cdots \tag{18}$$

而要證明它是一個 k 階循環級數（記住，k 是除式的次數）．爲達這一目的，任意指定一個自然數 n，只要適合唯一的條件 $n\geqslant l-k+1$，而將除法過程停止在求得商中含 x^{n+k} 的項的地方．這時餘式應當是一個多項式 $R(x)$，其中一切項的次數都高於 $n+k$．被除式、除式、商式、餘式相互間的關係則可以用下面的恆等式來表示：

$$A_0+\cdots\cdots+A_lx^l$$
$$=(B_0+\cdots\cdots+B_kx^k)\cdot(D_0+\cdots\cdots+D_{n+k}x^{n+k})+R(x).$$

求出這個恆等式左右兩端中 x^{n+k} 的係數而使它們相等．因爲 $n+k\geqslant l+1$，所以左端中 x^{n+k} 的係數等於零．因而右端中 x^{n+k} 的係數也必須等於零．可是這兒只有乘積 $(B_0+\cdots\cdots+B_kx^k)\cdot(D_0+\cdots\cdots+D_{n+k}x^{n+k})$ 中纔含 x^{n+k} 的項［我們已經講過，$R(x)$ 只含 x 的更高次的項］．因此，所求的係數是

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots\cdots+D_nB_k; \tag{19}$$

依照上面講的，它必須等於零：

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots\cdots+D_nB_k=0,$$

由此（記住，$B_0\neq0$）

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\cdots\cdots-\frac{B_k}{B_0}D_n\quad(n\geqslant l-k+1). \tag{20}$$

這是一個 k 階循環方程式，跟着又可知道級數 (18) 是

k 階循環級數.

3. 在所有上面舉出的例子裏面,例 6 有最一般的性質.我們還要證明,**任意一個 k 階循環級數**

$$u_1,\ u_2, \cdots\cdots,\ u_n, \cdots\cdots, \tag{21}$$

如果適合這樣一個方程式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\cdots\cdots+a_ku_n \quad (n\geqslant m\geqslant 1), \tag{22}$$

那麼它就和用多項式

$$Q(x)=1-a_1x-\cdots\cdots-a_kx^k \tag{23}$$

除某個多項式 $P(x)$ 的商中係數的級數合一.

假設 n 是一個任意自然數,但適合條件 $n>k+m-2$;用 $u_1+u_2x+u_3x^2+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n$ 乘多項式 $Q(x)$. 得到

$$\begin{aligned}(1-a_1x-a_2x^2-&\cdots\cdots-a_kx^k)(u_1+u_2x\\&+\cdots\cdots+u_{k+m-1}x^{k+m-2}+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n)\\=[u_1+(u_2-a_1u_1)x+&\cdots\cdots\\&+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}]\\+[(u_{k+m}-&a_1u_{k+m-1}-\cdots\cdots-a_ku_m)x^{k+m-1}+\cdots\cdots\\&+(u_{n+1}-a_1u_n-\cdots\cdots-a_ku_{n-k+1})x^n]\\-[(a_1u_{n+1}+&\cdots\cdots+a_ku_{n-k+2})x^{n+1}+\cdots\cdots\\&+a_ku_{n+1}x^{n+k}].\end{aligned} \tag{24}$$

這兒的第一個方括號裏面是一個多項式,它的次數不比 $l=k+m-2$ 高,它的係數則和我們所取的 n 的數值無關;我們用 $P(x)$ 來表示它:

$$P(x)=u_1+(u_2-a_1u_1)x+\cdots\cdots$$
$$+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}. \quad (25)$$

第二個方括號裏面的多項式，由於等式 (22)，它的一切係數都等於零．最後，末了一個方括號裏面的多項式，它的係數和 n 有關；但是它並不包含次數比 $n+1$ 低的項．用 $R_n(x)$ 來表它，而將恆等式 (24) 寫成下式：

$$P(x)=(1-a_1x-a_2x^2-\cdots\cdots-a_kx^k)(u_1+u_2x$$
$$+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n)+R_n(x). \quad (26)$$

由此顯然，$u_1+u_2x+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n$ 是用

$$Q(x)=1-a_1x-a_2x^2-\cdots\cdots-a_kx^k$$

除 $P(x)$ 的商，而 $R_n(x)$ 是其餘式，即

$$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,u_n,\ u_{n+1},\cdots\cdots,$$

的確是由多項式 (23) 除 (25) 所得商的係數所成的級數．

我們把斐波那契級數

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\cdots\cdots$$

作爲一個實例來考察．

因爲它的各項適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \quad (n\geqslant 1),$$

所以這兒 $m=1$，$k=2$，$a_1=1$，$a_2=1$，和 $Q(x)=1-x-x^2$.

多項式 $P(x)$ 的次數必須不比 $k+m-2=1$ 高．按公式 (25) 還可求得

$$P(x)=1+(1-1\cdot1)x=1.$$

這樣，斐波那契數和用 $1-x-x^2$ 除 1 所得的商中的係數所成的級數是完全相同的.

4. 在中學課程中，和算術級數、幾何級數及自然數平方級數有關而必須解決的一個問題就是求這些級數的 n 項的和.

假設，一般地，

$$u_1,\ u_2, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots \tag{27}$$

是一個 k 階循環級數，它的各項適合方程式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n \quad (n \geqslant m). \tag{28}$$

觀察 (27) 中各數起首 n 項的和 S_n 所成的新級數

$$S_1=u_1, S_2=u_1+u_2, \cdots\cdots, S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n, \cdots\cdots, \tag{29}$$

而來證明，這個和的級數也是循環的，是 $k+1$ 階的，而且它的各項適合方程式

$$\begin{aligned} S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1} \\ +\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n. \end{aligned} \tag{30}$$

要證明它，先應注意

$$\left.\begin{aligned} &u_1=S_1,\ u_2=S_2-u_1=S_2-S_1, \cdots\cdots, \\ &u_n=S_n-(u_1+\cdots\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1}, \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

命 $S_0=0$，使得 $u_1=S_1-S_0$，再將方程式 (28) 裏面的 u_1, $u_2, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ 用它們以 S_0, $S_1, \cdots\cdots, S_n, \cdots\cdots$，表出的式子來代替，得到

$$\begin{aligned} S_{n+k}-S_{n+k-1}=a_1(S_{n+k-1}-S_{n+k-2}) \\ +a_2(S_{n+k-2}-S_{n+k-3})+\cdots\cdots+a_k(S_n-S_{n-1}), \end{aligned}$$

由此

$$S_{n+k}=(1+a_1)S_{n+k-1}+(a_2-a_1)S_{n+k-2}$$
$$+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_n-a_kS_{n-1}\quad(n\geqslant m).$$

或，用 $n+1$ 代 n:

$$S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1}$$
$$+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n\quad(n\geqslant m-1).$$

這是一個 $k+1$ 階循環方程式.

舉幾個例子:

(甲) **幾何級數** 此處

$$u_n=aq^{n-1} \text{ 和 } S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=a+aq+\cdots\cdots+aq^{n-1}.$$

因為 $\{u_n\}$ 的各項適合方程式 $u_{n+1}=qu_n$，所以 $\{S_n\}$ 的各項適合方程式

$$S_{n+2}=(1+q)S_{n+1}-qS_n. \tag{32}$$

(乙) **自然數平方級數** 此處

$$u_n=n^2 \text{ 和 } S_n=1+2^2+\cdots\cdots+n^2.$$

因為 $\{u_n\}$ 的各項適合方程式

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$$

[參看第六頁 (13)]，所以 $\{S_n\}$ 的各項適合方程式

$$S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n.$$

(丙) **斐波那契數** 因為它們適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

所以它們 n 項的和 S_n 必須適合方程式

$$S_{n+3}=2S_{n+2}-S_n.$$

5. 對於簡單的循環級數,例如算術級數、幾何級數、自然數平方或立方級數以及週期級數,我們用不到先計算級數中的某一項前面的各項,就能够將這一項求出來. 至於斐波那契級數或者由兩多項式的商的係數所成的一般級數,乍一看去,我們就沒有可能這樣地辦,所以如果要計算第十三項斐波那契數 u_{13},似乎就得把它前面的一切項一項一項地都求出來(利用方程式 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$):

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\ u_6=8,$$
$$u_7=13,\ u_8=21,\ u_9=34,\ u_{10}=55,\ u_{11}=89,$$
$$u_{12}=144,\ u_{13}=233.$$

現在我們試將循環級數中各項的結構加以深入的研究,便能得出一個公式,可以用來計算最一般的循環級數的任何項,而不必把它的前面各項都求出來. 這種公式可以看做由算術級數或幾何級數中求普遍項的公式的一般化.

假設

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n \tag{33}$$

是一個 k 階循環方程式. 既然它對所有自然數 $n=1,2,3,\cdots\cdots$, 都成立,那麼,設 $n=1$,我們就得

$$u_{k+1}=a_1u_k+a_2u_{k-1}+\cdots\cdots+a_ku_1.$$

這麼一來,既然知道了 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_k$,就可以計算 u_{k+1}. 再在方程式(33)中設 $n=2$,又得