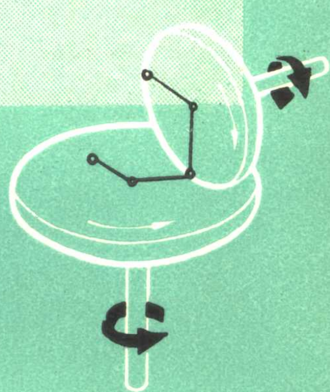
力学在数学上的一些应用

高天青編譯



科学普及出版社

力学在数学上的一些应用

內 容 提 要

在这本小冊子里，应用质点、重心等基本概念和不可能有永动机、位能极小等簡单力学原理解决了一些数学問题，証明了一些数学定理。写得比較通俗，可供高中学生閱读。

总号：155

力学在数学上的一些应用

编譯者：高 天 青

出版者：科 学 普 及 出 版 社

（北京市西直门外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

发行者：新 华 书 店 北 京 发 行 所

印刷者：北 京 市 通 县 印 刷 厂

开 本：787×1092 1/32 印张：15/16

1965年11月第 1 版 字数：14,000

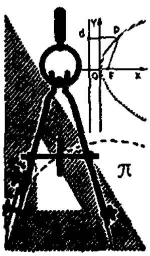
1965年11月第1次印刷 印数：29,625

統一书号：13051·090

定 价：（2）0.11元

力学在数学上的一些应用

高天青 编譯



科 学 普 及 出 版 社

一九六五年·北京

目　次

§ 1 質点和重心

在力学中，**质点**被理解成小得可以不计体积的物体。可以把它看作是附加一定数値(“质量”)的几何点。质点有一定的质量，因而有一定的重量。

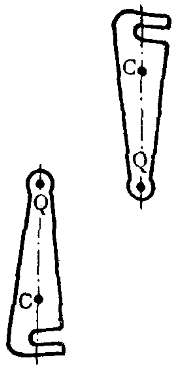


图 1

由许多质点组成的质点组有一个**重心**，它就是质点组中所有质点的重力的合力的作用点。

可以把物体看作是质点组。组成物体的质点组的重心就是物体的重心。物体的许多性质都和它的重心位置有很大关系。

由中学物理课本知道：

(A)如果悬挂在一点的物体处于靜止状态，那么这个悬点和重心在同一条竪直线上(图 1，其中 Q 是悬点，C 是重心)。

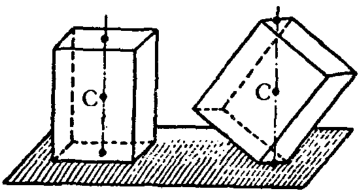


图 2

(B)如果物体放在那里处于靜止状态，那么經过重心的竪直线一定与物体的支持面(或支持棱)相交(图 2)。

§ 2 不可能有永动机

我们来考察一个任意的凸多边形和它内部的一点 O。从点 O 向多边形各边分别作垂线。这些垂线的垂足可能在边的本身上(例如在 AB 边上所作的垂线，图 3)，也可能在边的延长线上(例如在 FA 和 EF 边上所作的垂线，图 3)。当然，也可能所有垂线的垂足都在相应的边上(例如，O 是一个正多边形的中心)。

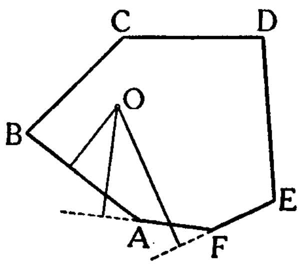


图 3

所有垂线的垂足都能不在相应的边上、而在相应边的延长线上吗？我们的回答是不能，也就是说，**至少有一条垂线的垂足在相应的边上(而不在它的延长线上)**。

我们用不可能有永动机的原理来证明这个命题。设想我们的多边形是一个重心在点 O 的薄片(可以这样看：整个薄片是没有重量的，而在点 O 有一个点重物[①])。用一条边当作底，把多边形竖立在水平的地板上。如果我们把它放得绝对竖直，那么它就不会倒下来；也可以在它的两旁用细杆子护住(图 4)。这时多边形或者是停住不动，或者要发生滚动；如果它滚动，那么最后还是会停止的(不然的话，我们就得到了

① 点重物就是質量集中在一点的重物。

永动机)。根据上一节命题 **B**，在它停住的那个位置上，从重心向底边所作的垂线一定与这条边相交。于是我们找到了多边形的这样一条边，从点 O 作这条边的垂线，垂足就在这条边本身上。

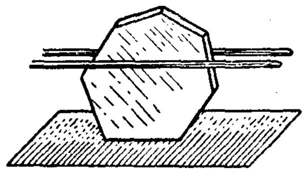


图 4

对于多面体来说，也有相似的定理成立。设已知一个凸多面体和它内部的一点 O，从这点向多面体的各个界面作垂线。这时，**这些垂线中至少有一条垂线的垂足是在界面本身上**(**而不是在界面的延展部分上**)。

§ 3 两个質点的重心

在一根沒有重量① 的棒上载有两个点重物，它们的重量为 P 和 Q，它们的距离为 d (图 5)。求由这两个点重物组成的质点组的重心。

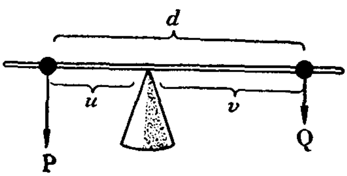


图 5

根据命题 $\boldsymbol{A}$，这个问题与下面的问题是等价的：

在怎样的一点支着这根棒，才能使它平衡？

设支点与点重物的距离分别为 u 和 v。于是，我们

① 确切些説是，質量小得可以忽略不計。

知道，当(且仅当)力 P 与力臂 u 的乘积等于力 Q 与力臂 v 的乘积

$$Pu=Qv \tag{1}$$

时，这根棒才能平衡。由(1)得到

$$\frac{u}{Q}=\frac{v}{P}=\frac{u+v}{P+Q}. \tag{2}$$

把 $u+v=d$ 代入(2)时，就得到

$$u=\frac{Q}{P+Q}d, \quad v=\frac{P}{P+Q}d. \tag{3}$$

由(3)求得：

当 $P=Q$ 时，

$$u=v=\frac{1}{2}d. \tag{4}$$

当 $P=2Q$ 时，

$$u=\frac{1}{3}d, \quad v=\frac{2}{3}d. \tag{5}$$

由(1)〔或(3)〕还可求得

$$\frac{u}{v}=\frac{Q}{P}. \tag{6}$$

§ 4 直綫相交定理

如果一个质点组的重心与另一个质点组的重心重合，且这两个质点组的总质量① 相等，那么就称这两个质点组是

① 总質量就是質点組各点的質量的总和。

等价的质点組。

在某质点组重心的质量等于这个质点组总质量的质点，称为这个质点组的**质心**。

任何质点组都与它的质心等价。

若 M、N 分别为质点组 γ 和 δ 的质心，则由 γ 和 δ 合成的质点组 α 与由 M 和 N 组成的质点组 β 等价。

証 设作用在 γ 各点上的重力的合力为 P_1，作用在 δ 各点上的重力的合力为 Q_1，作用在 M 和 N 上的重力分别为 P_2 和 Q_2．因为 γ 和 M 等价，所以 $P_1=P_2$（这意味着，力 P_1 和 P_2 的大小相等，方向相同且作用在同一点上）。同样，$Q_1=Q_2$．因此

$$P_1+Q_1=P_2+Q_2.$$

这意味着，力 P_1+Q_1 和 P_2+Q_2 的大小相等，方向相同且作用在同一点上。也就是说，质点组 α 和 β 的总质量相等，重心重合。因而它们是等价的质点组（证毕）。

因为 β 的重心在 M 和 N 的联结线上，所以 α 的重心也在 M 和 N 的联结线上。换句话说，下面的**重心定理**是成立的：

由质点組 γ 和 δ 合成的质点組的重心在 γ 和 δ 的重心的联結线上。

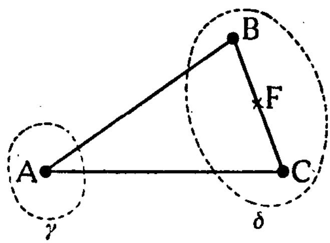


图 6

下面是这个定理在几何学上的三个应用。

在三角形的三个顶点分别放三个相等的点重物 A, B 和 C（图 6）。把它们分成这

样两个质点组γ和δ，使γ包含A，而δ包含B和C。质点组γ的重心在点A，根据(4)，质点组δ的重心在边BC的中点F。根据重心定理，质点组A,B,C的重心O在中线AF上。同理，O点也一定在另外两条中线上。由于物体的重心是唯一的，因而**三条中线必定相交于一点**。

由于质点组δ的质心M（在点F）的重量是质点组γ的质心(在点A)的两倍，所以，根据(5)，质点组$\{M,A\}$的重心O分线段FA为$FO:OA=1:2$。这个重心就是质点组A，B，C的重心，也就是三条中线的交点。因而，**从相应边算起，三条中线的交点在每一条中线的三分之一处**。

现在来证明，**若E,K,F,L为空間四边形$ABCD$的各边的中点**(图7)，**则EF和KL相交**。

在空间四边形$ABCD$的顶点分别放四个相等的点重物(图7)。把质点A,B,C,D分成两个质点组α和β：α包含A和B，β包含C和D。α的重心在点E，β的重心在点F。根据重心定理，四边形的重心在EF上。同样，可证明它也在KL上。因为四边形的重心是唯一的，所以EF和KL相交。

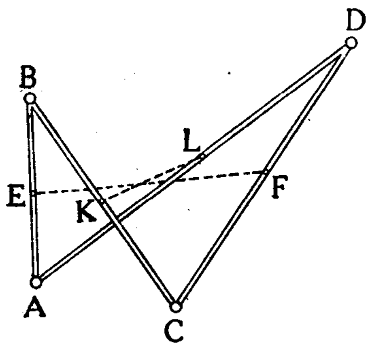


图 7

若将质点A,B,C,D这样分组：

$\gamma=\{A\}$,

$\delta=\{B,C,D\}$,

则γ的重心在点A，δ的重心在ΔBCD的三条中线的交点A_1。根据重心定

理和公式(6)，四边形的重心 O 在 AA_1 上，且 $AO:OA_1=3:1$. 同样可证明，四边形的重心也在 BB_1、CC_1和DD_1上，且

$$BO:OB_1=CO:OC_1=DO:OD_1=3:1.$$

因为四边形的重心是唯一的，所以 $\boldsymbol{AA_1}$、$\boldsymbol{BB_1}$、$\boldsymbol{CC_1}$和$\boldsymbol{DD_1}$交于一点，且

$$\boldsymbol{AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=DO:OD_1=3:1.}$$

§5 西瓦定理

我们来证明，若$\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{C_1}$是 $\Delta\boldsymbol{ABC}$ 三边上的三点（图8），且

$$\frac{\boldsymbol{AB_1}}{\boldsymbol{B_1C}}\cdot\frac{\boldsymbol{CA_1}}{\boldsymbol{A_1B}}\cdot\frac{\boldsymbol{BC_1}}{\boldsymbol{C_1A}}=1, \qquad (7)$$

则$\boldsymbol{AA_1}$, $\boldsymbol{BB_1}$, $\boldsymbol{CC_1}$相交于一点。

証 设

$AB_1=a$, $B_1C=b$,

$CA_1=c$, $A_1B=d$,

$BC_1=e$, $C_1A=f$.

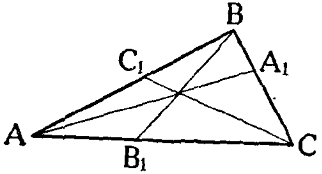


图 8

于是(7)变成

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1. \qquad (8)$$

在 A, B 和 C 上分别放重量为 bd, ac 和 ad 的点重物。由(3)即知，质点组 $\{A, C\}$ 和 $\{B, C\}$ 的重心分别在 B_1 和 A_1 上。设质点组 $\{A, B\}$ 的重心与点 A 和 B 的距离分别为 x 和 y.

于是，由（6）得

$$\frac{x}{y}=\frac{ac}{bd}. \tag{9}$$

由（8）得

$$\frac{ac}{bd}=\frac{f}{e}. \tag{10}$$

由（9）和（10）得

$$\frac{x}{y}=\frac{f}{e}. \tag{11}$$

此外

$$x+y=f+e. \tag{12}$$

由（11）和（12）得

$$x=f,\quad y=e.$$

因而质点组 $\{A, B\}$ 的重心在点 C_1 上。

再由上节的重心定理即知，整个三角形的重心在 AA_1, BB_1, CC_1 的每一条上。但整个三角形的重心只有一个，因此，AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点。

现在来证明，若 AA_1, BB_1, CC_1 交相于一点 O，则（7）成立。

証 假设三角形是没有重量的薄片。把它水平地架在点 O 上，并且在各个顶点上放上适当的点重物，使三角形平衡（图9）。根据命题 $\boldsymbol{A}$，点 O 是这些点重物组成的质点组的重心。因此点 O 应当在

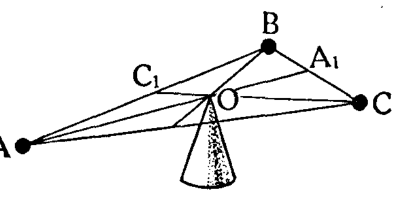


图 9

联结点 A 和质点组 $\{B,\ C\}$ 的重心的直线上，因而 A_1 是质点组 $\{B,\ C\}$ 的重心。同样，B_1 和 C_1 分别是质点组 $\{C,\ A\}$ 和 $\{A,\ B\}$ 的重心。如果分别用 p, q 和 r 来表示质点 A, B 和 C 的质量，那么，根据(6)有

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{r}{p},\qquad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{q}{r},\qquad \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{p}{q}.$$

这些等式互乘以后，我们就得到了所要求的关系式(7)。

将本节证明的两个命题合起来，就是**西瓦定理**：

若 A_1, B_1, C_1 是 ΔABC 三边上的三点，则当且仅当(7)成立时，AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点。

三角形的三条中线交于一点，三条高线交于一点，三条角平分线交于一点，是这个定理的三个特殊情况。读者可以验证一下。

§ 6 圆的切綫問題

被举高的重物具有位能，它下落时能够做功。一个重量是 q，高度为 h 的重物具有的位能是用乘积 qh 来度量的。因此，重物的位置越低，位能就越小。我们看到，物体总是尽可能落到最低的位置，使它的位能达到最小。

被细线吊着的小重物也是如此。它总是把细线拉得紧紧的，竖直地吊着，以使它达到最低位置，最小位能；而且，只有在这个最低位置上时，它才能处于平衡状态。于是

(C) 小重物在一切可能位置中的最低位置上；

(D) 小重物在从悬点引的竖直线上；

(E) 从小重物到悬点的距离等于细线的长度；

(F) 小重物的平衡位置只有一个。

现在来证明**圆的切线定理**(图10)：

半径 OP 垂直于过点 P 的切线 p。

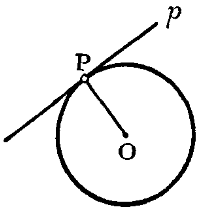


图 10

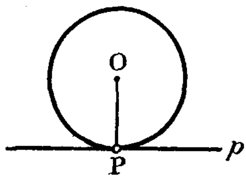


图 11

为此，我们把图形这样改画在竖直的墙上，使直线p成水平，圆在p的上方(图11)。可以看出，这时点 P 是这个圆上的最低点。现在把长度等于 OP 的细线的一端固定在点 O，另一端 M 挂一个点重物。我们来证明，端点 M 与点 P 重合。实际上，首先由于 $\boldsymbol{E}$，端点 M 只可能在圆上，其次由于 $\boldsymbol{C}$，这个端点是在这个圆的最低点上，也就是在点 P 上。因此细线是沿着半径 OP 的。因而，由于 $\boldsymbol{D}$，这条半径与直线 p 垂直，这就是所要求的证明。

当然，这个例子不很有趣，因为证明的是一个大家所熟悉的简单定理。以后，我们将用同样的“力学”方法来证明新的定理。在下一节里，我们将转入这个定理的一个很自然的推广——椭圆的切线定理。

§ 7 椭圓的切綫問題

我们把到定点的距离等于定长的点的轨迹定义为圆。推广它就得到椭圆的定义：到两个定点的距离的和等于定长的点的轨迹称为**椭圆**(图12)。这两个定点(图12中的 O_1 和 O_2)称为椭圆的**焦点**，这个定长称为椭圆的**长轴的长度**。椭圆上任意一点与焦点的联线称为**焦半径**。圆就是二焦点重合的特殊情形。在这种情形，两条焦半径也重合，并且等于圆的半径。

如果选取一条细线，并且在纸上这样选择任意两点 O_1 和 O_2，使它们之间的距离 O_1O_2 小于细线的长。把线的两端分别固定在点 O_1 和O_2 上。然后用铅笔拉紧这条细线(图13)，使笔尖沿着细线移动，那么就能在纸上画出椭圆。

我们把与椭圆只有一个公共点的直线叫做**椭圆的切线**(图14)。

下面这个**椭圆的切线定理**是成立的：**椭圆的切线与在切**

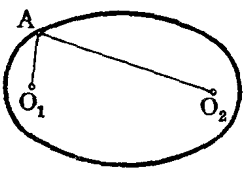


图 12

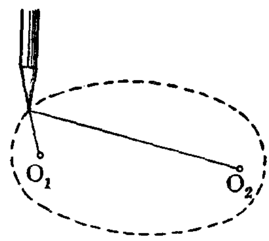


图 13

点所作的两条焦半径构成的两角相等。在图14上，就是

$$\angle O_1PK=\angle O_2PL。$$

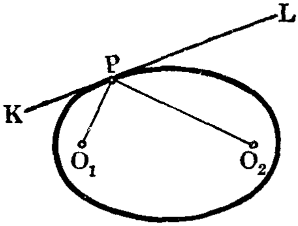


图 14

圆的切线定理是这个定理的特殊情形。实际上，在圆的情形，两条焦半径互相重合；因此，对圆的情形来说，椭圆的切线定理可以这样叙述：切线与在切点所作的半径构成两个相等的邻角，而这就表示，半径与切线垂直。

现在我们用“力学”方法来证明椭圆的切线定理。建议读者先自己证一下，再往下看。

我们先来作一个力学实验。在竖直平面上选定两个等高的点 $\overline{O}_1$ 和 $\overline{O}_2$。选取一条长度大于距离 $\overline{O}_1\overline{O}_2$ 的细线，把它的两端分别固定在点 $\overline{O}_1$ 和 $\overline{O}_2$。在细线上穿一个小重物，使小重物能够沿细线自由滑动（例如，把细线穿在砝码的小孔中，图15）。于是我们看到，小重物落到某一点 $\overline{M}$，在这一点它处于静止状态。并且

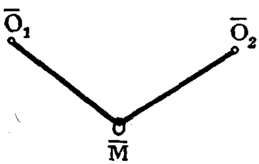


图 15

($\overline{D}_1$)平面 $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{M}$ 是竖直的（即，是通过竖直线的）。

($\overline{D}_2$)**线段 $\overline{M}\overline{O}_1$ 和 $\overline{M}\overline{O}_2$ 与在 $\overline{M}\overline{O}_1\overline{O}_2$ 平面内过点 $\overline{M}$ 所作的水平线构成的两角相等。**

我们来证明这两个命题。过线段 $\overline{O}_1\overline{O}_2$ 的中点作一条竖直线，把细线和小重物一起绕这条竖直线旋转180°。这时，细线的端点 $\overline{O}_1$ 转到 $\overline{O}_2$，而端点 $\overline{O}_2$ 转到 $\overline{O}_1$。显然，这时我