

G7633.602/4
C
13

高等学校教学用书

中学数学 教学概论

曹才翰 编著

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书是根据作者多年在北京师范大学数学系讲授《中学数学教材教法》课的讲稿整理而成的。全书共分九章：中学数学教学的目的与任务；中学数学教学改革；数学能力；思维与数学思维；思维过程；思维形式；中学数学教学工作的基本要求；概念、公式、定理的教学；中学数学教学工作。作为《中学数学教材教法》课的教材，全书在继承和保留传统教材的同时，比较系统地总结了近些年来有关中学数学教学的目的与任务、中学数学改革、数学能力与数学思维等方面的研究成果，使全书具有一定的学术性和资料性。

本书可作为高师院校、师范专科学校有关数学教育课程的教材，同时对各有关学科的研究工作者也有参考价值。

高等学校教学用书

中学数学教学概论

曹才翰 编著

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

宝坻县第十印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：10·625 字数：271千

1990年1月第1版 1990年1月第1次印刷

印数：1-5 000

ISBN7-303-00644-3/O·107

定价：2.30元

作者的话

本书是根据作者多年在北京师范大学数学系讲授《中学数学教材教法》课的讲稿整理而成的。讲稿曾以讲义形式由山东省高师院校数学教育研究会于1984年印发给讲习班的学员。这次整理是在该讲义的基础上，对体系作了调整、材料作了充实，并在理论上作了适当的提高。

本书力图做到以下几点：

1. 围绕正确理解数学教育思想和数学教育发展规律，对“为什么教”、“教什么”、“如何教”进行论述，使读者明白该做什么，不该做什么；明白数学教育改革的方向。

2. 本书结构的指导思想是由“一般到具体”，即发展数学能力是中学数学教学目的中的核心问题，而发展数学思维能力又是中学数学教学中能力培养的核心问题，故关于数学思维的论述成为全书的核心，并贯彻全书始终。

3. 在介绍具体教学经验时，力争阐明它们的背景条件和理论根据，以使读者明白“该怎样做”和“为什么这样做”。

本书可作为高师院校《中学数学教材教法》课的教材。对一些纯理论的学术性讨论的材料，可根据课时、学生情况灵活处理。本书也可作为学科教育专业数学教育方向硕士研究生、数学教育研究工作者和中学数学教师的参考书。

在出版本书之际，值得提起我的导师钟善基教授。在我讲授《中学数学教材教法》课和写作本书的过程中，曾得到他无微不至的关怀、支持和帮助。在此，对钟教授表示衷心的感谢。

在整理本书的过程中，我的研究生吴福能同志做了大量的工作。本书能早日和读者见面是和他的工作分不开的。对此，也表示我的感谢。

数学教育是一门多学科交叉的实践性很强的理论学科，它涉

及的知识面相当广泛，由于作者水平有限，论述不全面或不当在所难免，敬请读者不吝赐教。

曹才翰

谨识于北京师范大学数学系

序

数学教育，随着社会发展的需要，通过数学教育工作者不断的实验与研究，演变至本世纪70年代，已开始形成独立的科学，成为涉及哲学（主要是认识论）、历史（主要是数学史和数学教育史）、心理（主要是教育心理）、教育（主要是教学论）、逻辑和数学等几门科学的一门边缘科学了。这一发展，当然是历史发展的必然。然而对于数学教育工作者说来，这也确是一件可喜的大事。

和任何一门科学从开始形成到建立完整体系尚有一段距离一样，数学教育这门科学，目前也还处于开始形成的阶段。作为这门科学的内容，在国际上虽然有以数学课程论、数学学习论和数学教学论这三论为主的趋势，但还有待于普遍的承认。由此引出的、关于这门科学研究对象的科学论断，也还正在研究之中。甚至对于这门科学的名称，虽然像苏联、日本等国，都各自定名为《数学教育学》，但也还有待于公认。因此，当前摆在数学教育工作者面前的任务，应该说亟应解决的，是为数学教育这门科学定名；科学地确立这门科学的研究对象；确定这门科学的内容；研究与建成这门科学的理论体系。

在我国内，把数学教育作为一门独立的科学来研究，虽然开始得比较晚——大体上自1980年才普遍地进行研究，但是经过数学教育的研究工作者和广大的数学教师同志们的不懈努力，通过反复交叉的研究、实验、研究的过程，在不到十年的时间内，已使得这门科学的研究，取得了不小的进展。这是非常鼓舞人心的。在研究过程中，多数同志都以研究数学课程论、数学学习论和数学教学论的内容作为研究的出发点。而以如何指导数学教学改革实验，以利数学教学质量更迅速地提高；以及尽快地建成上述的《数学教育学》等为总的研究目标。同时，把已取得的研究成果，还及时地付诸中小学数学教学实践，或进行数学课的专题

教学改革，或编写新的数学课的实验教材，进行系统的数学教学改革实验。更较普遍的，是把取得的这些新的研究成果，纳入高等师范院校的数学教育课程中，用以更新教材，使未来的数学教师——高等师范院校数学系的学生学得新的数学教育理论；并为进一步建成《数学教育学》，准备更充足的条件。

曹才翰同志自1956年开始，在北京师范大学担任数学教育课程的教学工作以来，至今已达三十二年。在这期间，经历了作为数学教育课程的《中学数学教学法》的教学工作；经历了由《中学数学教学法》课程演变为《中学数学教材教法》课程的改革与教学的工作；也经历了由60年代的《中学数学教材教法》课程演变为70年代的新《中学数学教材教法》的改革与教学的工作，直至今日。恰逢其会，此时正当数学教育开始形成独立的科学，并向建立《数学教育学》迈进之际，因而又积极投入了这一有巨大意义的研究工作。因此，才翰同志在数学教育的教学和教学改革方面、在数学教育的科学研究方面，都取得了相当丰富的经验，并且积累了相当广泛的资料。为了更好地进行本学科的教学改革，以及早日建成《数学教育学》，用他本人的话来说，愿作一些抛砖引玉的工作，根据自己的认识，把积累的资料经过整理和分析并参照着撰写成书，供广大从事数学教育工作的同志们用作教学改革的参考；也为同志们建立《数学教育学》提供一项较为具体扼要的资料。工作大约进行了三年多的时间，本着批判地继承、继承并发展的科学态度，经历了资料的整理与分析、设想的试教与检验以及一再易稿的过程，最终完成了定稿而成书，并定书名为“中学数学教学概论”。

《中学数学教学概论》，全书共分九章。首先从论述中学数学教学目的与任务开始，作为全书的第一章。在这一章里，除阐明当前的中学数学教学目的与任务外，还就着50年代以来历次制订与改订的中学数学教学大纲中，所提出的中学数学教学目的与任务，进行了比较与分析。用以从演变的过程中，体现今日确定的中学数学教学目的与任务的必要性。在这一章里，还在原有的

教学经验的基础上，结合数学课程论的研究，作为一章之首，提出了“确定中学数学教学目的依据”，论述了确定中学数学教学目的的理论基础；并作为阐明当前的中学数学教学目的与任务的科学根据。

作为学科的教学要求，是要随着国家建设的需要而不断改革的。小以至于教材的重新选取，或教学方法的改变；大以至于从根本上提高教学要求，对教材、教法进行全面改革，都以国家建设的需要为准。因此，不断地进行教学改革对国家的建设是必须的，意义是积极的。只是在内容上，有时改革得大一些，有时改革得小一些；在每次改革后的相对稳定时期，有时较长一些，有时较短一些而已。数学，作为一门学科，由于它在教学中的重要作用，在学科的教学改革中，常常处于改革的先列。更由于近三十年来，为适应科学技术飞速发展的需要，在国内外对数学的教学改革，进行得也较多些。因而积累了不少数学教学改革正反两方面的经验。从积累的经验中可以看出，如何不脱离原有的基础，而是在原有的基础上，以积极的、科学的态度进行教学改革，不是形式地进行教学改革，这是使教学改革得以成功的首要问题。为此，在《中学数学教学概论》一书中，作为第二章，专门论述了中学数学教学改革问题。其中论述了中学数学教学改革的意义；整理与分析近年来改革的状况；并本着科学的态度，展望了下一步进行中学数学教学改革的主要方向。这可以说对本书的论述，提出了一项指导思想。无疑，也为科学地进行中学数学教学改革的研究，提供了一份较系统的资料。

书中第三章论述了数学能力。这是当前进行教学改革，用以提高教学质量所提出的、新的首要要求——要把在数学教学中充分培养学生的数学能力，和对知识的教学、技能的训练一样，也作为教学的首要要求。能力的概念在心理学中与在日常生活的使用中，常常不尽相同。因而在这一章里，开始论述数学能力的含义时，首先把两种能力的概念作了区分。在此基础上，才对数学能力的含义作了较清晰的论述，并介绍了目前存在的各种观点。

以此为前提，结合对数学课程论的研究，对现行中学数学教学大纲中所提出的、应培养学生的数学能力的三个方面——运算能力、空间想象力和逻辑思维能力，阐明了各自所包含的内容，并论述了三方面的教学要求。而后，还结合对数学课程论和数学学习论的研究，围绕着数学能力的实质、培养学生的数学能力在数学教学全过程中的体现等有关问题，作了进一步的探索。可以说，这又为进一步研究数学课程论，提出了一项具体的课题。

学生的思维能力的培养问题，在数学能力的培养过程中，可以说是带有根本性的问题。书中以心理学的理论为主要依据，结合对数学学习论的研究，利用较大的篇幅、安排了两章——第四章与第五章，顺次论述了思维与数学思维的概念、特性、成分和思维的一般过程。这是在过去的《中学数学教学法》和《中学数学教材教法》中没怎么涉及到的内容；而是在当前数学教学改革的进行中，根据新的教学要求引出的新的理论问题。它既与数学课程论的研究密切相关，也和数学教学论的研究密切相关，是数学教育理论研究中，应该予以足够重视的一项研究课题。

逻辑学是研究思维形式的科学；数学的特点之一又在于必须按逻辑的要求表达与阐述各项结论。因而在数学教学中，必须使学生明确正确的思维形式与逻辑表达的要求。在学校教育中，使学生掌握住逻辑的规律与要求并能正确地运用，这虽然关系到各个学科的教学，但在一定程度上说，这项培养任务主要应通过数学教学来完成。为此，在本书中立有专章——第六章思维形式——专门论述了数学中所需的逻辑上的基本知识以及在数学中的运用。与过去《中学数学教学法》和《中学数学教材教法》的有关内容相比，还作了一些必要的补充。自不待言，这一章的内容，是在数学教学实践中，确定教学内容理论深度的主要根据。也是研究数学教育理论时，经常援引的理论根据的一个方面。

书中第七、八、九章，对中学数学课的教学工作，进行了较为全面的论述。第七章从理论上论述了中学数学教学工作进行时的基本要求。主要内容是先结合数学学科的特点，论述了教育学

中提出的各项教学原则在数学教学中的体现；而后再根据数学发展的过程和人们认识事物的过程，论述了在数学教学工作进行中，还应遵循的几项特殊的教学原则。当然，上述的一般教学原则和数学教学的特殊原则，基本上都来自班级授课制的课堂教学的经验。随着学校教育的发展；随着课程论与学习论的研究，课堂教学的教学组织形式，已日益使人感到它已不那么科学了。例如，在课堂教学中，不可能从同一课堂内的每一学生的实际基础出发进行教学；以课堂教学为单位进行学生的学习成绩的检查，其结果也不足以反映每一学生的实际进展的状况，等等。但是在革新的教学组织形式建立之前，仍应在课堂教学这种教学组织形式之下，积极地进行研究。研究如何充分发挥课堂教学的优越性，以及如何降低它的局限性的干扰。第七章的内容就包含了这方面的研究所得。因此，这一章仍是具有现实意义的理论。而且也为数学教学论的进一步研究，提供了一项前提。

根据数学的特点，从逻辑学的角度来说，数学知识的教学，主要就是数学概念与数学定理（包括公式）的教学。书中以第八章专章论述了这个问题。这是以第六章的逻辑要求为出发点，结合认识论的观点，按照第七章的教学原则，根据中学数学教学目的，综合而提出的。它反映了在数学教学中，如何正确处理逻辑学与教育学两方面在要求上的矛盾，以达到预期的教学效果的准则；也为数学课程论的进一步研究，提供出一项例据。

书中最后一章——第九章，较全面地概括并阐述了有关进行中学数学教学的各项主要工作。从常用的各种教学方法的作用及其选择到教师备课应涉及的各个方面、备课的要求，再到备课中对于在数学教学中有特殊作用的例题和习题的作用、选择、配备，再到根据数学的学科特点对学生的复习工作应采取的特殊措施，等等。这些都是在密切结合实践经验的基础上，根据前面各章的理论，提出的一般性的准则，以作为进行中学数学教学实践的指导。当然也用作进一步研究教学方法改革的基础。

纵观全书内容，由于既有适应当前教学要求的现实意义；也

反映了某些新的具有启发性的研究成果，因而本书确如才翰同志在“作者的话”中所指出的，除可作高等师范院校的《中学数学教材教法》课的部分教材外，也可作为数学教育研究工作者的参考，还可作为中学数学教师的参考。

在本书即将付印之际，略作数语如上。聊作对本书的读后感，也愿作为对本书内容的简介。

钟善基

1988年9月序于北京师范大学

目 录

绪言	(1)
第一章 中学数学教学的目的与任务	(5)
§ 1 确定中学数学教学目的的依据	(5)
一、党的教育方针	(6)
二、普通中学的性质与任务	(6)
三、数学的特点	(6)
四、学生的年龄特征	(9)
§ 2 中学数学教学目的	(9)
一、使学生切实学好数学的基础知识	(10)
二、培养并发展学生的技能和能力	(15)
三、培养学生的个性品质和学习习惯	(21)
§ 3 关于建国以来中学数学教学目的的回顾	(25)
第二章 中学数学教学改革	(32)
§ 1 改革的一般概况	(32)
一、改革的原因	(32)
二、改革的发展概况	(35)
§ 2 改革的内容	(42)
一、教学内容的改革	(42)
二、教学方法的改革	(53)
§ 3 未来数学教育的动向	(60)
第三章 数学能力	(60)
§ 1 数学能力的概述	(66)
一、两种数学能力的区分	(66)
二、关于数学能力意义的各种观点	(69)
三、数学能力的组成成分	(71)
§ 2 运算能力	(73)

一、运算的理解	(73)
二、运算能力的结构特点	(74)
三、运算能力发展的几点解释	(75)
§ 3 空间想象力	(79)
§ 4 逻辑思维能力	(81)
§ 5 关于数学能力实质的新探索	(83)
一、数学概括能力是数学能力的核心	(84)
二、数学能力实质的认知结构说	(86)
§ 6 浅谈学生数学能力培养的几个问题	(91)
一、注意数学的早期教育	(91)
二、重视数学思想和方法的教学	(93)
三、注意教学内容间的联系	(95)
四、正确对待练习	(97)
第四章 思维与数学思维	(99)
§ 1 思维的概念及其本质	(99)
§ 2 思维的明显特性	(102)
一、思维的概括性	(102)
二、思维的间接性	(104)
三、思维的自觉性	(106)
四、思维的社会性	(106)
§ 3 数学思维的品质	(110)
一、思维的深刻性	(110)
二、思维的广阔性	(113)
三、思维的灵活性	(115)
四、思维的创新性	(119)
五、思维的目的性	(120)
六、思维的敏捷性	(121)
七、思维的批判性	(122)
§ 4 数学思维的基本成分	(123)
一、思维的种类	(123)
二、数学思维的基本成分	(124)
§ 5 数学直觉思维的意义及其特征分析	(130)

一、数学直觉思维的意义	(130)
二、数学直觉思维的特征	(134)
§ 6 数学思维结构初探	(140)
一、数学思维方式	(140)
二、数学思维基本成分	(145)
三、个体发展水平	(146)
第五章 思维过程	(149)
§ 1 观察与实验	(149)
§ 2 归纳	(154)
§ 3 比较	(157)
§ 4 分析与综合	(162)
§ 5 概括与抽象	(165)
第六章 思维形式	(174)
§ 1 思维形式的一般概述	(174)
§ 2 概念、定义和原名	(177)
一、什么是概念	(177)
二、概念的内涵和外延	(179)
三、概念间的关系	(179)
四、内涵和外延的反变关系	(182)
五、定义	(183)
六、划分	(188)
§ 3 判断	(190)
一、判断与语句	(190)
二、判断的种类	(191)
§ 4 命题演算规则	(197)
一、复合命题(语句)的值	(197)
二、命题演算中常用的等价式	(198)
三、命题演算在形式逻辑中的应用 举例	(199)
§ 5 逻辑规律	(202)
§ 6 推理与证明	(204)
一、推理的种类	(204)
二、三段论	(205)

三、关系推理	(207)
四、证明	(208)
第七章 中学数学教学工作的基本要求	(214)
§ 1 教育学中的教学原则	(214)
一、教学的科学性与思想性相结合的原则	(214)
二、教学中理论联系实际的原则	(214)
三、教学中教师的主导作用与学生的自觉性、积极性相结合 的原则	(215)
四、教学中感知与理解相结合的原则	(215)
五、教学的循序前进性与系统性原则	(216)
六、知识技能的巩固性原则	(216)
七、教学符合学生年龄特点和接受能力原则	(216)
八、教学中统一要求与因材施教相结合原则	(217)
§ 2 严谨性与量力性相结合	(219)
一、严谨性	(219)
二、量力性	(221)
三、如何贯彻严谨性与量力性相结合的原则	(222)
§ 3 抽象性与具体性相结合	(239)
一、数学的特点之一——高度的抽象性	(239)
二、具体——抽象——具体是数学教学的特点之一	(241)
§ 4 巩固性与发展性相结合	(250)
一、学习材料的适量、意义和组织	(250)
二、练习	(255)
三、复习	(257)
第八章 概念、公式、定理的教学	(258)
§ 1 概念的教学	(258)
一、在体系中掌握概念	(258)
二、概念的引入	(262)
三、概念的形成	(265)
四、概念的明确	(269)
五、明白表示概念的符号	(271)
六、概念的巩固	(274)

§ 2 公式、定理的教学.....	(276)
一、定理的教学	(276)
二、公式的教学	(281)
第九章 中学数学教学工作	(284)
§ 1 教学方法	(284)
一、教学方法的概述	(284)
二、中学数学教学中常用的教学方法	(285)
三、启发式	(289)
§ 2 备课.....	(291)
一、备课的工作内容及其程序	(291)
二、教案的编制	(292)
§ 3 习题的教学	(300)
一、习题(例题)的作用	(300)
二、习题(例题)的分类和选配	(300)
三、提高学生解题能力的基本途径	(301)
四、要注意习题的科学性	(310)
§ 4 复习工作	(313)
一、经常复习	(313)
二、阶段复习	(314)
参考文献	(320)

绪 言

《数学教育学》是一门实践性很强的综合性理论学科。它是数学、哲学、逻辑、教育、心理、教学现代化手段等多种学科的边缘性学科。

《数学教育学》是一门新兴的、目前正在发展中的学科。

关于《数学教育学》的研究对象还存在着不同的看法。主要有下面几种意见：

一、苏联学者 A.A. 斯托利亚尔在所著《数学教育学》^①一书中谈到：“数学教育学的对象中包含的问题大致可以分成两类：

1. 属于‘教什么’的教学内容问题；
2. 属于‘如何教’的教学方法问题。”

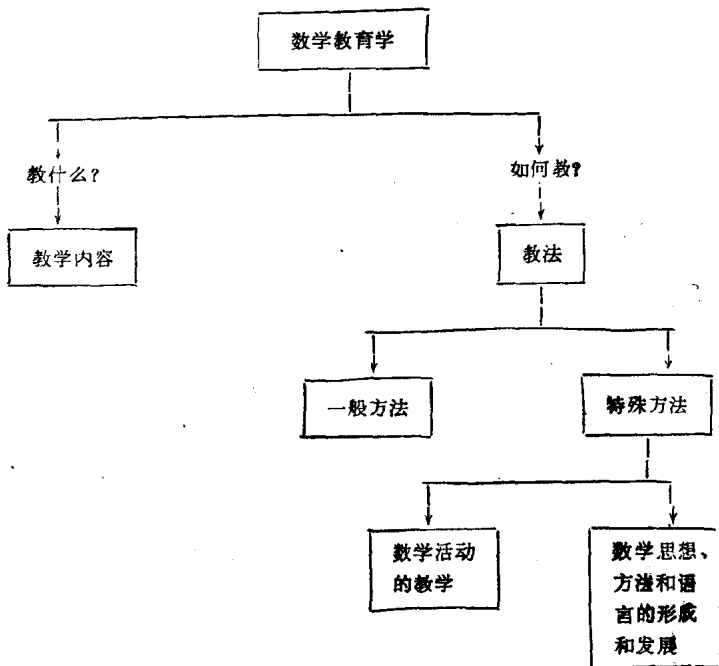
并提出如下页的结构简图。

这里作者提出了“数学活动的教学”。作者认为，“‘数学’这个术语可以表示一种思维活动（数学活动），或者表示这种活动的结果——理论”。他认为：“数学教育学，一种是研究某种数学理论的教学，更确切些说是研究数学理论初步的教学的一个领域；另一种是研究以‘数学活动’为名统称的那些思维活动的教学的一个领域。”于是他认为：“数学教育学的任务是形成和发展那些具有数学思维（或数学家思维）特点的智力活动结构，并且促使数学中的发现。”

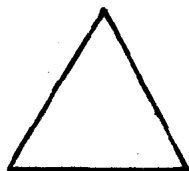
二、美国的 Tom Kieren 在一篇题为《数学教育研究——三角形》的文章中，对数学教育的研究对象作了形象的比喻和描述^②。他把西德的 H. Bauersfeld 在第三届国际数学教育会上描述的数学教育的三个研究对象：课程、教学、学习比作三角形的

① [苏]A.A. 斯托利亚尔著《数学教育学》，中译本，人民教育出版社。

② 丁尔升：《中国教育学会数学教学研究会成立大会开幕词》，载《中学数学教育论文选编》，人民教育出版社，p7。



课程论 (课程设计者)



教学论 (教师) 学习论 (学生)

三个顶点，分别对应于三种人：课程设计者、教师、学生。数学教育学有三个研究的方面，这就是课程论、教学论、学习论。这个三角形有个“兴趣中心，就是儿童和成人实际学习数学的经验。”一切数学教育研究都“面对”这些经验。研究者都希望自己的研究会直接或间接地提高这些经验。